Pouvez-vous "mesurer" la "forme" d'un triangle ?

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, Patrice Lassère, Pierre-Jean Laurent

Résumé. Pour un triangle de périmètre p, de cercle inscrit de rayon r et de cercle circonscrit de rayon R, nous présentons une "mesure" définie à partir de ces données, $p-(4R+2r)$ précisément, qui permet de décider si le triangle en question est rectangle, a un angle obtus, ou a ses trois angles aigus.

1. Introduction

Le triangle est assurément la figure du plan dont la géométrie est la plus riche. C'est pour cela qu'elle est l'objet d'études depuis des millénaires, qu'on l'utilise encore aujourd'hui comme support d'enseignement des mathématiques dans les collèges et lycées, et qu'elle est toujours source de questions dans les "rubriques de problèmes" de journaux divers et variés.

Notre contribution ici est de caractériser la "forme" d'un triangle (sous-entendu, est-il rectangle, obtusangle, acutangle ?) à l'aide d'une "mesure" définie à partir de données comme le périmètre du triangle, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit.

Mais commençons par un mini-quiz comme il en existe de nombreux, et qui pourrait continuer ad libitum.

Considérons trois nombres réels $a>0, b>0, c>0$. Procédons progressivement.

Q1. *Existe-t-il un triangle dont les côtés (c'est-à-dire les longueurs des côtés) seraient a, b, c ?*

La réponse est clairement : Non, pas toujours. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est fournie par les trois inégalités, dites *triangulaires* justement, $a<b+c, b<a+c, c<a+b$. Disons tout de suite, et ce sera valable pour toute la suite, que nous ne considérons que des "vrais" triangles, pas les aplatis ou dégénérés. D'ailleurs, le degré de platitude ou de non-dégénérescence peut être "mesuré" par le produit des écarts $(b+c)-a, (a+c)-b, (a+b)-c$, qui est :

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=\frac{16\mathcal{A}^2}{a+b+c}, \tag{1}$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'aire du triangle de côtés a, b, c. Ceci résulte de la formule de Héron donnant $\mathcal{A}$ en fonction de a, b, c, formule que nous aurons l'occasion de revoir plus loin.

Notons que la conjonction des trois inégalités triangulaires peut être résumée en une seule :

$$|b-c|<a<b+c. \tag{2}$$

Réduisons l'information... On se donne $p>0$.

Q2. *Existe-t-il un triangle dont le périmètre (c'est-à-dire la somme des longueurs des trois côtés) est p ?*

La réponse est évidemment Oui, et même un collègien pourra rétorquer qu'on peut avoir des triangles de tout type : rectangle, obtusangle, acutangle [1], etc. La seule donnée du périmètre p est donc une donnée très faible.

Ajoutons des informations, sur les angles éventuellement, ou concernant le rayon r du cercle inscrit et le rayon R du cercle circonscrit. Rappelons que ces données r et R sont parfaitement définies puisqu'il y a un et un seul cercle inscrit dans un triangle, et un et un seul cercle circonscrit à un triangle. La donne change radicalement dès qu'on passe à d'autres figures géométriques pourtant simples du plan.

Considérons donc simplement r et R provenant d'un triangle.

Q3. *La connaissance de r et R donne t-elle le "type" ou la "forme" d'un triangle ?*

La réponse est : Non en règle générale. Euler a démontré que seule l'inégalité large $R \geqslant 2r$ est toujours valide, et que l'égalité $R = 2r$ "rigidifie" les choses puisque cela *caractérise* les triangles équilatéraux.

On pourrait ainsi continuer la liste des questions... Il existe pour cela des ouvrages fort complets et nous nous contentons de n'en signaler qu'un : [3] .

La question qui nous préoccupe dans cette note est la suivante : *peut-on décider de la "forme" d'un triangle (c'est-à-dire rectangle, obtusangle, acutangle) à partir des seules données p, r, R ?* On a vu que, prises séparément, p ou (r, R), elles ne conduisent à rien... De manière un peu étonnante (pour nous, du moins), la réponse est Oui ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

2. Une "mesure" de la "forme" d'un triangle

Le point de départ fut de démontrer que l'on a $p = 4R + 2r$ pour un triangle rectangle, ce qui n'est pas difficile à faire,... puis de démontrer la réciproque, ce qui est un peu plus retors. Et si cet écart $p - (4R + 2r)$ était la "mesure" qui caractérise la "forme" d'un triangle ? Enonçons sans plus attendre le résultat principal.

Théorème. *On a les caractérisations suivantes :*
- *Le triangle est rectangle si et seulement si $p = 4R + 2r$;*
- *Le triangle est obtusangle si et seulement si $p < 4R + 2r$;*
- *Le triangle est acutangle si et seulement si $p > 4R + 2r$.*

Nous obtiendrons les trois caractérisations en un seul coup, en démontrant au préalable une formule qui a son intérêt propre. La voici. Soit donc un triangle ABC ; on note α, β, γ les angles aux sommets A, B, C (que l'on note aussi $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ dans la littérature) et a, b, c les (longueurs des) côtés opposés à A, B, C. La clé de la démonstration du théorème énoncé est la relation suivante :

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) = \frac{p^2 - (2r + 4R)^2}{16R^2}. \tag{3}$$

---

1. Nous adoptons ici trois appellations de même assonance : *rectangle* lorsque le triangle a un angle droit, *obtusangle* lorsque le triangle a un angle obtus (un seul angle obtus est possible), *acutangle* lorsque les trois angles du triangle sont aigus.

Ainsi, le produit $\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$ est du signe de $p-(2r+4R)$. Muni de cette clé, le serrurier conclut rapidement :

- L'un des cosinus est nul, et donc l'angle correspondant est rectangle, si et seulement si $p = 2r+4R$;

Sachant qu'un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus, il n'y a donc qu'un seul cosinus qui peut être négatif, d'où

- Les trois cosinus sont strictement positifs, et donc les trois angles sont aigus, si et seulement si $p > 2r+4R$;
- Un seul cosinus est strictement négatif, et donc l'angle correspondant est obtus, si et seulement si $p < 2r+4R$.

Notre parcours pour démontrer le théorème ci-dessus a une histoire. Après avoir démontré le premier cas (caractérisation du triangle rectangle), nos recherches pour démontrer les autres cas nous ont conduit à l'opus de V. Prasolov ([2]). Par une série de résultats se renvoyant les uns aux autres, l'auteur arrive à la formule (3), à une erreur de coefficient près, que nous corrigeons ici.

La démonstration proposée ci-dessous est la plus simple et, à notre avis, celle qui présente les enchaînements les plus logiques.

Démonstration de la formule (3).

Comme souvent en mathématiques, et toujours dans les démonstrations, il faut indiquer les prérequis, bref le matériel dont on dispose. Rappelons donc quelques propriétés classiques (*cf.* [3] par exemple).

- Si $\mathcal{A}$ désigne l'aire du triangle et $s = p/2$ son demi-perimètre, on a :

$$\mathcal{A} = pr/2 = sr. \tag{4}$$

- La dite “règle des sinus” :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{1}{2R}. \tag{5}$$

Comme $\mathcal{A} = sr$ (formule (4)) et $\mathcal{A} = bc\sin(\alpha)$ (ou $ac\sin(\beta)$ ou $ab\sin(\gamma)$), on déduit :

$$abc = 4srR. \tag{6}$$

- La formule de Héron pour l'aire $\mathcal{A}$ du triangle :

$$\mathcal{A}^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \tag{7.a}$$

$$= \frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \tag{7.b}$$

$$= \frac{1}{16}\left[(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)\right]. \tag{7.c}$$

La variante (7.b) met bien évidence les écarts aux inégalités triangulaires évoqués plus haut. La variante (7.c) peut s'avérer utile dans certains calculs. La formulation (7.a) est la plus connue. Pour la retenir, nous conseillons aux élèves ou étudiants de se rappeler qu'elle est le cas limite de la formule de Brahmagupta donnant l'aire d'un quadrilatère *inscriptible* de côtés a, b, c, d (et de semi-périmètre s) :

$$\mathcal{A}^2 = (s-d)(s-a)(s-b)(s-c). \tag{8}$$

Formule très élégante où les quatre côtés interviennent de la même façon. En faisant tendre un côté vers zéro, d par exemple, on arrive à (7.a) sans perdre de vue qu'un triangle est toujours inscriptible !

Nous sommes prêts pour la démonstration, en quatre étapes de complexité croissante.

Lemme 1.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4s^2 - 2(ab + bc + ca). \tag{9}$$

En effet, $4s^2 = 4\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$.

Lemme 2.

$$ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4rR. \tag{10}$$

Grâce à (4) et (7.a), on a : $\mathcal{A}^2 = s^2r^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, d'où :

$$\begin{array}{rcl} sr^2 & = & (s-a)(s-b)(s-c) \\ & = & s^3 - s^2(a+b+c) + s(ab+bc+ca) - abc \\ & = & s^3 - 2s^3 + s(ab+bc+ca) - abc \text{ puisque } a+b+c = 2s \\ sr^2 & = & s^3 - 2s^3 + s(ab+bc+ca) - 4srR \text{ puisque } abc = 4srR \ (\textit{cf.}\ (6)). \end{array}$$

En divisant par s la dernière égalité, on arrive bien à (10). □

Des Lemmes 1 et 2, on déduit :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2s^2 - 2r^2 - 8rR. \tag{11}$$

Jusqu'à présent tout était "métrique" (*i.e.*, ne concernait que a, b, c, r, R). Maintenant on va faire intervenir la trigonométrie, avec les angles α, β, γ.

Lemme 3.

$$\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2}. \tag{12}$$

Cela résulte directement de la règle des sinus (*cf.* (5)).

Lemme 4. C'est le plus délicat, ou du moins le plus calculatoire, car il s'agit de relier $\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$ et $\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma)$. De fait, on a :

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) = \frac{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) + \sin^2(\gamma)}{2} - 1. \tag{13}$$

Pour démontrer (13), nous allons procéder en deux étapes : d'abord évaluer $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta)$ (ce qui conduira à $\left[1 - 2\sin^2(\alpha)\right] + \left[1 - 2\sin^2(\beta)\right]$), puis évaluer $\cos(2\gamma)$ en tenant compte du fait que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Observons d'abord que les deux nombres complexes $e^{i(\alpha+\beta)}e^{i(\alpha-\beta)} + e^{i(\alpha+\beta)}e^{i(\beta-\alpha)}$ et $e^{i(2\alpha)} + e^{i(2\beta)}$ sont égaux ; ils ont donc même partie réelle, c'est-à-dire :

$$2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos(2\alpha) + \cos(2\beta). \tag{14}$$

Du fait que $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, il vient $\cos(\gamma) = -\cos(\alpha+\beta)$, puis avec (14) :

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) = -2\cos(\gamma)\cos(\alpha-\beta). \tag{15}$$

Toujours pour la même raison, on a :

$$\cos(2\gamma) = 2\cos^2(\gamma) - 1 = -2\cos(\gamma)\cos(\alpha+\beta) - 1. \tag{16}$$

En rassemblant (15) et (16), on obtient donc :

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) &= -2\cos(\gamma)\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right] - 1 \\ &= -4\cos(\gamma)\cos(\alpha)\cos(\beta) - 1. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à transformer les $\cos(2x)$ en $1 - 2\sin^2(x)$ pour arriver à :

$$\left[1 - 2\sin^2(\alpha)\right] + \left[1 - 2\sin^2(\beta)\right] + \left[1 - 2\sin^2(\gamma)\right] = -4\cos(\gamma)\cos(\alpha)\cos(\beta) - 1,$$

d'où le résultat (13). □
Des Lemmes 3 et 4, on déduit :

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8R^2} - 1. \tag{17}$$

En réunissant (11) et (17), on obtient :

$$8R^2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) = 2s^2 - 2r^2 - 8rR - 8R^2,$$

soit, en remplaçant s par $p/2$ et en multipliant par 2 :

$$\begin{aligned} 16R^2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) &= p^2 - 4r^2 - 16rR - 16R^2 \\ &= p^2 - (2r + 4R)^2. \end{aligned}$$

C'est la formule (3) annoncée. □
Remarque 1. En utilisant la dite "règle des cosinus", $\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, l'égalité (3) devient :

$$(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = \frac{(abc)^2}{2R^2}\left[p^2 - (2r + 4R)^2\right]. \tag{18}$$

Cette formule, que l'on peut qualifier de "pythagoricienne" en raison de son premier membre, est une sorte de mesure du "déficit de rectangularité" d'un triangle.

Dans la référence classique ([1]), l'auteur dit ceci en page 225 : *"En utilisant les formules bien connues (4), (6), (7.a) et en les injectant dans l'expression $p = 2r + 4R$, on obtient après un peu d'exercice* $(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$*"*. Avouons que nous avons essayé de manière assidue et que nous n'y sommes pas arrivés ; l'expression "avec un peu d'exercice" nous paraît donc *an understatement.* Notre approche, plus générale car mesurant exactement le produit $(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$, indique clairement ce que l'auteur demandait de démontrer : le triangle est rectangle si et seulement si $p = 2r + 4R$.

Remarque 2. Les problèmes d'optimisation qui consistent à maximiser ou à minimiser $f(\alpha, \beta, \gamma) = \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$ parmi tous les angles α, β, γ de trinagles (non aplatis) sont faciles à résoudre. On aboutit à :

$$\max f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{8} \,;\ \inf f(\alpha, \beta, \gamma) = -1. \tag{19}$$

Toutes valeurs de l'intervalle $]-1, 1/8]$ sont possibles. La valeur maximale $1/8$ est atteinte pour un triangle équilatéral, par exemple avec $a = b = c = \sqrt{3}, r = 1/2, R = 1$. La valeur -1 est une borne inférieure, pas un minimum ; on s'en approche avec un triangle isocèle en A d'angle α tendant vers 180°.

Références

1. Arthur Engel, *Solutions d'expert*, vol. 2. Editions Cassini (2010).

2. Viktor Prasolov, *Problems in plane and solid geometry.*

Ce "pavé" de près de 500 pages peut être trouvé sur internet sous forme de fichier pdf. Au vu de certaines imprécisions ou erreurs de coefficients dans des formules, il est clair qu'il ne s'agit pas de la forme définitive de l'ouvrage. L'auteur, contacté par nos soins (août 2022), confirme cela et précise qu'une traduction professionnelle en anglais est programmée.

3. René et Yvonne Sortais, *La géométrie du triangle. Exercices résolus.* Editions Hermann (1997).

J.-B. H.-U. et P. L. :
Département de mathématiques
Campus de Rangueil
Université Paul Sabatier de Toulouse

P.-J. L. :
Laboratoire Jean Kuntzmann
Campus de Saint-Martin d'Hères
Université de Grenoble-Alpes.