

# LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ET L'OPTIMISATION CONVEXE FONT BON MÉNAGE...

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY

Institut de mathématiques

Université PAUL SABATIER

118, route de Narbonne

31062 TOULOUSE Cedex 9, France

[www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/](http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/)

**RESUMÉ.** Nous montrons dans ce travail comment la géométrie (classique) du triangle et l'optimisation convexe (moderne) font bon ménage. Dans ce qui constitue l'essentiel de notre approche, nous revisitons les points particuliers du triangle, les plus connus du moins, à la seule lumière de l'optimisation. Nous montrons comment ils sont les solutions uniques de problèmes de minimisation dont les fonctions-objectifs sont définies à partir des distances aux côtés du triangle ou des distances aux sommets du triangle. Les fonctions-objectifs qui entrent en jeu sont toutes convexes, mais certaines sont non différentiables. Néanmoins, les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en minimisation convexe sont applicables dans tous les cas, elles conduisent précisément à la caractérisation "variationnelle" des points familiers du triangle : isobarycentre, point de FERMAT, point de LEMOINE, centre du cercle inscrit, centre du cercle circonscrit, orthocentre. Deux autres problèmes d'optimisation liés au triangle complètent notre article.

**MOTS-CLÉS.** *Points particuliers du triangle. Distance euclidienne entre deux points, d'un point à une droite. Fonction convexe. Gradient d'une fonction. Sous-différentiel d'une fonction convexe.*

## Introduction

Ah le triangle! S'il y a des souvenirs, bons ou mauvais, associés à notre apprentissage des mathématiques en collèges ou lycées, ils ne peuvent occulter ce qui a concerné le triangle. Figure très particulière et ô combien importante du plan, le triangle a nourri notre formation et, même à des années (-lumière) de cette période, nous avons encore en tête les constructions et propriétés des points particuliers comme l'isobarycentre, l'orthocentre, le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit (les quatre plus importants), ainsi que les multiples raisonnements à base d'angles, côtés et sommets, etc. L'opuscule [8] est un délicieux ouvrage rappelant tout cela. Bien que la formation des futurs enseignants du secondaire (collèges et lycées) ne fasse plus une grande place à l'étude de cette géométrie du triangle, il reste d'excellents ouvrages sur le sujet, témoin l'échantillon [2,6,7].

Ce que nous proposons ici est une nouvelle visite de ce "royaume" du triangle en enfourchant notre monture préférée : l'optimisation. En effet, si comme l'affirmait L.EULER en 1744, "*Rien ne se passe dans le monde qui ne soit la signification d'un certain maximum ou d'un certain minimum*", le triangle n'y échappe pas : les points particuliers "minimisent

donc quelque chose”, reste à trouver quoi. Les fonctions-objectifs ou critères à minimiser se trouvent être définis à partir des distances aux sommets du triangle ou des distances aux côtés du triangle. Ces fonctions sont donc relativement simples, toutes convexes, mais parfois non différentiables, ce qui ajoute un peu de piment (et d’originalité) à notre démarche. La plupart des formulations “variationnelles” (*i.e.*, exprimées en termes d’optimisation) exhibées sont connues, même si nous ne sommes pas toujours à même de donner pour toutes des références sûres et précises. Pour l’une d’entre elles, celle concernant l’orthocentre, elle est inédite, à notre connaissance. Mais, commençons par planter le décor.

## 1. Le triangle, on commence par quoi ?

### 1.1 Un peu de géométrie du plan

Le plan est repéré par  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , où les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont unitaires et orthogonaux, dans la structure euclidienne standard. Le produit scalaire entre deux vecteurs sera marqué par un (discret) point. On parlera indifféremment des coordonnées du point  $P$  ou de celles du vecteur  $\vec{OP}$ . Plutôt que  $\vec{OP}$ , il nous arrivera de noter simplement  $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur courant.

Les droites du plan sont définies via leurs équations cartésiennes

$$\vec{a} \cdot \vec{X} = b,$$

où  $\vec{a}$  est un vecteur (de  $\mathbb{R}^2$ ) que l’on choisira toujours unitaire (c’est-à-dire de longueur égale à 1), et  $b$  un nombre réel. Cette droite détermine deux demi-plans affines

$$H_- = \left\{ \vec{X} : \vec{a} \cdot \vec{X} \leq b \right\} \text{ et } H_+ = \left\{ \vec{X} : \vec{a} \cdot \vec{X} \geq b \right\}$$

que l’on utilisera systématiquement dans notre traitement des triangles. Notons tout de suite que la distance d’un point  $P$  à  $H_-$  est la partie positive de  $\vec{a} \cdot \vec{X} - b$  et la distance de  $P$  à  $H_+$  la partie négative de  $\vec{a} \cdot \vec{X} - b$ .<sup>1</sup>

La définition d’un triangle  $\mathcal{T}$  se fait usuellement à l’aide de trois points, de trois angles (de somme 180 degrés) ou de trois côtés (dont les longueurs doivent vérifier certaines inégalités), d’où les diverses appellations : tripoints, triangles (la plus commune) et trigones. Nous, nous préférons utiliser une définition autre : une description à l’aide de trois demi-espaces :

$$\mathcal{T} = \left\{ \vec{X} : \vec{a}_1 \cdot \vec{X} \leq b_1, \vec{a}_2 \cdot \vec{X} \leq b_2, \vec{a}_3 \cdot \vec{X} \leq b_3 \right\}. \quad (1)$$

Voir la Figure 1. Oui mais, qui nous dit que (1) définit bien un triangle au sens usuel du terme, c’est-à-dire pour nous un polyèdre convexe compact (du plan) d’intérieur non vide ? Les propriétés des polyèdres convexes fermés nous permettent d’y répondre, à la seule vue des données : les trois vecteurs unitaires  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  et les trois nombres réels  $b_1, b_2, b_3$ . En effet,

---

1. La partie positive d’un réel  $r$  est  $r$  si  $r \geq 0$ , 0 si  $r \leq 0$ ; autrement dit, c’est  $\max(r, 0)$ .

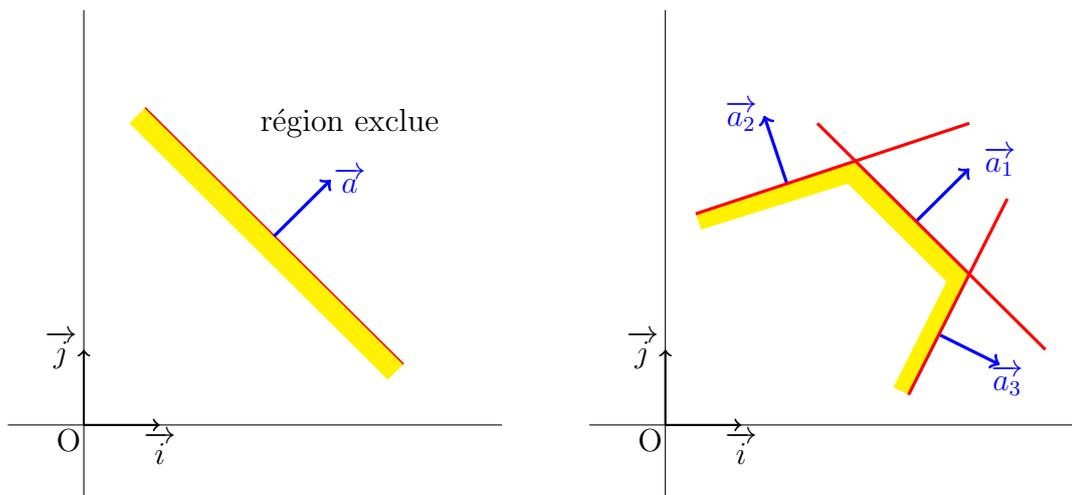


FIGURE 1 –

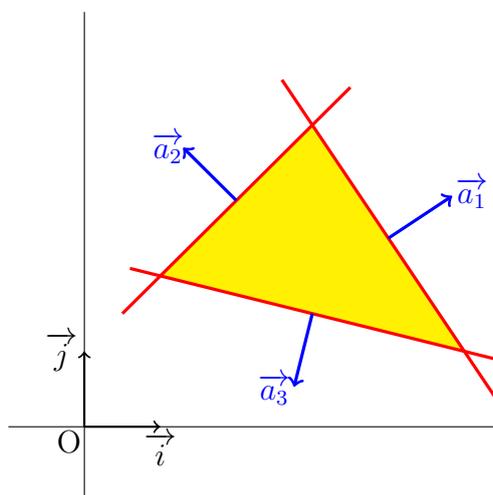


FIGURE 2 –

- L'ensemble  $\mathcal{T}$  défini en (1) n'est pas vide si, et seulement si,

$$\left( \begin{array}{l} \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0} \\ \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0 \end{array} \right) \implies (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \geq 0). \quad (2)$$

Le polyèdre convexe fermé non vide ainsi défini n'est pas forcément borné. Pour cela, on a la caractérisation suivante :

- L'ensemble  $\mathcal{T}$  défini en (1) est borné si, et seulement si,

$$\left\{ \vec{X} : \vec{a}_1 \cdot \vec{X} \leq 0, \vec{a}_2 \cdot \vec{X} \leq 0, \vec{a}_3 \cdot \vec{X} \leq 0 \right\} = \left\{ \vec{0} \right\}, \quad (3)$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\left\{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0 \right\} = \mathbb{R}^2 \text{ (tout le plan vectoriel)}. \quad (4)$$

Ceci est une propriété relative à la “disposition” des vecteurs  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ . Voir la Figure 2. On remarquera que les conditions (3) et (4) ne font pas intervenir le jeu de données  $(b_1, b_2, b_3)$ ; si  $\mathcal{T}$  est borné pour un jeu de données  $(b_1, b_2, b_3)$ , il reste borné pour tout autre jeu de données  $(b_1, b_2, b_3)$ , à condition, bien sûr, de garder le même triplet de vecteurs  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ . Il reste le risque d’avoir  $\mathcal{T}$  réduit à un point ou d’avoir un triangle aplati, ce qui n’est pas gênant car d’autres hypothèses additionnelles exclueront ce cas. On peut encore caractériser les points à l’intérieur de  $\mathcal{T}$ , triangle de sommets  $A, B, C$  :

$$(P \text{ est intérieur à } \mathcal{T}) \iff \left( \left\{ \alpha_1 \vec{PA} + \alpha_2 \vec{PB} + \alpha_3 \vec{PC}, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0 \right\} = \mathbb{R}^2 \right). \quad (5)$$

Ces propriétés (2) à (5), pas vraiment spécifiques aux polyèdres convexes à trois côtés, sont démontrées dans les traités sur les polyèdres convexes fermés ou leur utilisation en optimisation linéaire, dans [1] par exemple.

## 1.2 Un peu d’analyse à propos des fonctions convexes et des fonctions différentiables

Nous reprenons rapidement ici des choses expliquées plus en détail dans notre article [5]. Les fonctions en jeu seront simples, des distances ou des carrés de distances; elles seront toujours convexes. Du point de vue calcul différentiel, si la fonction  $f$  en jeu est différentiable en  $P$ , nous noterons simplement  $\nabla f(P)$  le vecteur gradient<sup>2</sup> de  $f$  en  $P$ . Nous savons que que la fonction convexe et différentiable  $f$  est minimisée en  $P$  si, et seulement si,  $\nabla f(P) = \vec{0}$  (c’est la fameuse règle de FERMAT). Plus intéressant -et également utile pour nous- est de voir ce qui se passe lorsque la fonction convexe  $f$  n’est pas différentiable en  $P$ . Alors le substitut de la notion de gradient est ce qu’on appelle *le (ou la) sous-différentiel(le)* de  $f$  en  $P$ . Noté par le graphisme  $\partial f(P)$ , il consiste à collecter tous les vecteurs pentes (ou pentes)  $\vec{p}$  des droites affines qui minorent  $f$  et qui coïncident avec elle en  $P$  :

$$\partial f(P) = \left\{ \begin{array}{l} \text{pentes } \vec{p} \text{ telles que, pour tout point } Q, \\ f(Q) \geq f(P) + \vec{p} \cdot \vec{PQ} \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Introduit il y a cinquante ans exactement, ce concept joue pour les fonctions convexes  $f$  le rôle du vecteur gradient, y compris là où le gradient de  $f$  n’existe pas (d’ailleurs les éléments de  $\partial f(P)$  s’appellent des *sous-gradients* de  $f$  en  $P$ ). Comme l’on s’y attend,  $\partial f(P)$  est un singleton (c’est-à-dire réduit à un seul élément) si, et seulement si,  $f$  est différentiable en  $P$ , auquel cas l’unique élément de  $\partial f(P)$  est  $\nabla f(P)$ . Les fonctions convexes, éventuellement non différentiables, auxquelles nous aurons affaire, sont très simples, leurs sous-différentiels aussi; par exemple :

- Si  $f(P) = \left\| \vec{AP} \right\|^2$  (le carré de la distance euclidienne d’un point (fixe)  $A$  au point courant  $P$ ),  $f$  est différentiable en  $P$  et  $\partial f(P) = \{\nabla f(P)\} = \{2\vec{AP}\}$ .

- Si  $f(P) = \left\| \vec{AP} \right\|$ ,  $f$  est différentiable en  $P \neq A$ , avec  $\partial f(P) = \{\nabla f(P)\} = \left\{ \frac{\vec{AP}}{\left\| \vec{AP} \right\|} \right\}$  (c’est le vecteur unitaire pointant de  $A$  vers  $P$ ). Mais cette fonction  $f$  n’est pas différentiable

2. sans flèche sur le vecteur, pour alléger l’écriture.

en  $A$  ; qu'à cela ne tienne, il y a un sous-différentiel en ce point, facile à déterminer d'ailleurs, c'est  $\partial f(A) = \overline{B(0, 1)}$  (la boule unité fermée).

- Si  $f$  est une fonction du type maximum, c'est-à-dire  $f = \max(f_1, f_2, f_3)$  par exemple, construite à partir des fonctions convexes différentiables  $f_1, f_2$  et  $f_3$ ,

$$\partial f(P) = \text{le plus petit convexe (i.e., point, segment, triangle) contenant les vecteurs gradients } \nabla f_k(P), \text{ pour les indices } k \text{ tel que } f_k(P) = f(P); \quad (7)$$

$$\text{ensemble noté aussi } co \left\{ \begin{array}{l} \nabla f_k(P), \\ \text{pour les indices } k \text{ tel que } f_k(P) = f(P) \end{array} \right\}^3.$$

Bref, en (7), on collecte toutes les combinaisons convexes des gradients correspondant aux indices  $k$  où la fonction  $f_k$  "touche" la fonction maximum finale  $f$  en  $P$ . Voir la Figure 3.

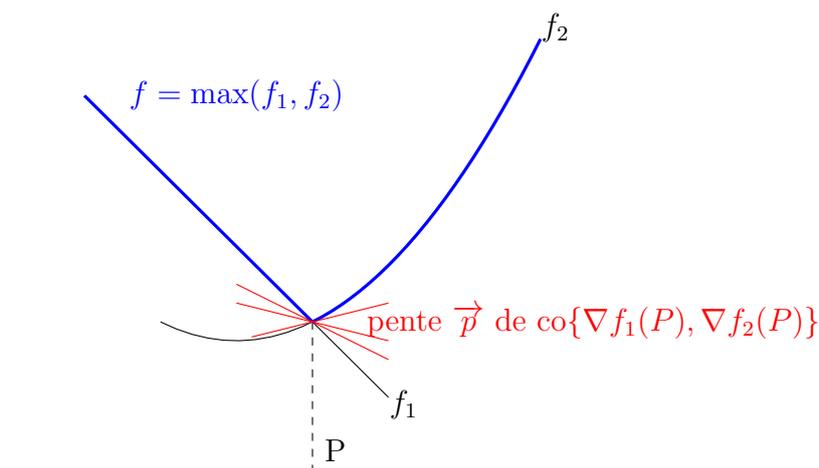


FIGURE 3 –

Quand il s'agira de minimiser une fonction convexe, comme ce sera notre cas, la règle d'optimalité, généralisant celle de FERMAT, devient :

$$\text{La fonction } f \text{ est minimisée en } P \text{ si, et seulement si, } \vec{0} \in \partial f(P). \quad (8)$$

Voir la Figure 3. Les règles de calcul sous-différentiel sont similaires à celles du calcul différentiel (voir le chapitre D de [4]) ; par exemple, en voici une que nous utiliserons :

$$\partial(f + g)(P) = \partial f(P) + \partial g(P) \text{ (une addition d'ensembles au lieu de vecteurs)}. \quad (9)$$

---

3.  $co(A)$  signifie "enveloppe convexe de  $A$ ", ce qui est le plus petit ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant  $A$ .

Nous sommes ainsi parés pour minimiser des sommes, des maximums, de fonctions convexes construites à partir de distances ou de carrés de distances.

## 2. Minimisation d'une fonction-objectif (ou critère) construit à partir des distances aux côtés du triangle

### 2.1 Minimisation de la somme des distances aux côtés

Commençons par un triangle équilatéral. Imaginons un campeur désirant planter sa toile de tente sur une île en forme de triangle équilatéral, mais envisageant de se baigner dans les trois mers bordant l'île. Il choisit de placer sa tente en *un point minimisant la somme des distances aux côtés du triangle*. Et là, ô surprise, cette somme des distances est toujours constante... il peut donc planter sa tente n'importe où dans l'île... C'est un joli résultat dû à V.VIVIANI (1660)<sup>4</sup>. Une fois qu'on connaît le résultat, sa démonstration en est très facile<sup>5</sup>; nous en donnerons une plus bas. En fait, nous considérons le cas d'un triangle quelconque et voyons ce à quoi conduit la minimisation de la somme des distances aux côtés.

En suivant les notations présentées plus haut, la distance du point  $P$  (appartenant au triangle) aux côtés du triangle est

$$\begin{aligned} f_1(P) &= (b_1 - \vec{a}_1 \cdot \vec{OP}) + (b_2 - \vec{a}_2 \cdot \vec{OP}) + (b_3 - \vec{a}_3 \cdot \vec{OP}) \\ &= (b_1 + b_2 + b_3) - (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) \cdot \vec{OP}. \end{aligned} \quad (10)$$

Premier cas :  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$ . C'est exactement le cas du triangle équilatéral. Alors, la fonction-objectif est constante sur le triangle  $\mathcal{T}$ . On voit, sans calculs supplémentaires, en choisissant comme point  $P$  un sommet du triangle par exemple, que la constante en question est la longueur (commune)  $h$  d'une hauteur.

Deuxième cas :  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \neq \vec{0}$ . Dans ce cas, la minimisation de  $f_1(P)$  pour  $P$  dans le triangle  $\mathcal{T}$  est un problème d'optimisation linéaire (on dit aussi programmation linéaire, une appellation ambiguë que nous récusons) : la fonction objectif est linéaire (affine plus exactement) et l'ensemble contraint est un polyèdre convexe fermé. Dans notre exemple, les lignes d'égale valeur de  $f_1(P)$ ,  $P$  dans  $\mathcal{T}$ , sont des segments de droites ; ainsi, un sommet du triangle, parfois tout un côté (dans le cas d'un triangle isocèle dont l'angle compris entre les deux côtés égaux est inférieur à 60 degrés), fournit les solutions à notre problème. Dans tous les cas de figure, une solution est fournie par le sommet d'où est issue la plus courte des hauteurs du triangle ; la valeur minimale de  $f_1(P)$  est alors la plus petite des (longueurs des) trois hauteurs du triangle.

---

4. Personnellement, j'ai rencontré pour la première fois le nom de VIVIANI en classe de Terminale (appelée Math-Elém à l'époque) ; c'était à l'occasion de ladite "fenêtre de VIVIANI". Cette courbe particulière de l'espace est obtenue comme l'intersection d'une sphère de rayon  $R$  centrée en  $(0, 0, 0)$  avec un cylindre vertical de rayon  $\frac{R}{2}$  dont l'axe passe au point  $(\frac{R}{2}, 0, 0)$ . Lors de ma carrière, à l'occasion d'exercices sur le calcul intégral avec des étudiants de deuxième année post-bac, j'ai toujours trouvé de l'intérêt à faire visualiser cette courbe et à faire calculer l'aire surfacique du morceau ainsi découpé sur la sphère, ainsi que le volume du solide délimité par ce morceau et le plan horizontal.

5. par exemple avec les aires des trois triangles appuyés sur les côtés (d'égale longueur) ; la somme des trois aires est l'aire du triangle de départ.

## 2.2 Minimisation de la somme des carrés des distances aux côtés

Imaginons que notre campeur soit aussi surfeur et que la fatigue du transport de sa planche de surf vers les trois bords de mers (d'océans plutôt pour surfer!) soit proportionnelle au carré de la distance parcourue. Question : cette fois-ci, où dans l'île doit-il planter sa tente ? La fonction-objectif à minimiser est ici

$$\begin{aligned} f_2(P) &= \left\| \overrightarrow{PH_1} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{PH_2} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{PH_3} \right\|^2 \\ &= (\vec{a}_1 \cdot \vec{OP} - b_1)^2 + (\vec{a}_2 \cdot \vec{OP} - b_2)^2 + (\vec{a}_3 \cdot \vec{OP} - b_3)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Minimiser  $f_2(P)$  pour  $P$  dans le triangle  $\mathcal{T}$  est un problème d'optimisation convexe différentiable : l'existence et l'unicité de la solution, sa localisation (à l'intérieur du triangle), sa caractérisation (en termes de condition nécessaire et suffisante d'optimalité), etc. ne posent aucune difficulté. Voyons cela rapidement. La fonction  $f_2$  est convexe (strictement même<sup>6</sup>), "coercive à l'infini" (c'est-à-dire vérifiant :  $f_2(P) \rightarrow +\infty$  quand  $\left\| \vec{OP} \right\| \rightarrow +\infty$ ) ; il existe donc un et un seul point minimisant  $f_2(P)$ . Ce point est caractérisé par la relation  $\nabla f_2(P) = \vec{0}$ , c'est-à-dire

$$(\vec{a}_1 \cdot \vec{OP} - b_1)\vec{a}_1 + (\vec{a}_2 \cdot \vec{OP} - b_2)\vec{a}_2 + (\vec{a}_3 \cdot \vec{OP} - b_3)\vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Cette relation montre déjà qu'aucune des quantités  $\vec{a}_i \cdot \vec{OP} - b_i$  ne peut être nulle (car  $\vec{a}_i$  et  $\vec{a}_j$  ne peuvent être colinéaires), c'est-à-dire que  $P$  est intérieur au triangle. Désignons par  $d_A$  la distance de  $P$  à  $BC$  (c'est-à-dire  $d_A = \left\| \overrightarrow{PH_1} \right\| = b_1 - \vec{a}_1 \cdot \vec{OP}$ ), par  $d_B$  la distance de  $P$  à  $AC$  et par  $d_C$  la distance de  $P$  à  $AB$  (voir la Figure 4). La relation d'optimalité au-dessus se réécrit en

$$d_A \vec{a}_1 + d_B \vec{a}_2 + d_C \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Le point solution est ce qu'on appelle (dans la géométrie du triangle) *le point de E.LEMOINE* (1840-1912) du triangle  $\mathcal{T}$ . Une autre manière d'opérer est de repérer ce point optimal  $P$  par ses coordonnées barycentriques. On en reparlera plus loin, au paragraphe 4.

## 2.3 Minimisation du maximum des distances aux côtés

La fonction-objectif (ou critère) à minimiser que nous considérons ici est

$$\begin{aligned} f_3(P) &= \max(\left\| \overrightarrow{PH_1} \right\|, \left\| \overrightarrow{PH_2} \right\|, \left\| \overrightarrow{PH_3} \right\|) \\ &= \max(b_1 - \vec{a}_1 \cdot \vec{OP}, b_2 - \vec{a}_2 \cdot \vec{OP}, b_3 - \vec{a}_3 \cdot \vec{OP}). \end{aligned} \quad (12)$$

Elle est convexe mais, à la différence des deux sous-cas précédents, *elle n'est pas différentiable* ; c'est le rôle perturbateur de la construction avec un maximum. Qu'à cela ne

---

6. *f strictement convexe* signifie que l'inégalité de convexité (de définition)  $f(\lambda P + (1-\lambda)Q) \leq \lambda f(P) + (1-\lambda)f(Q)$  est stricte dès lors que  $0 < \lambda < 1$  et  $P \neq Q$ .

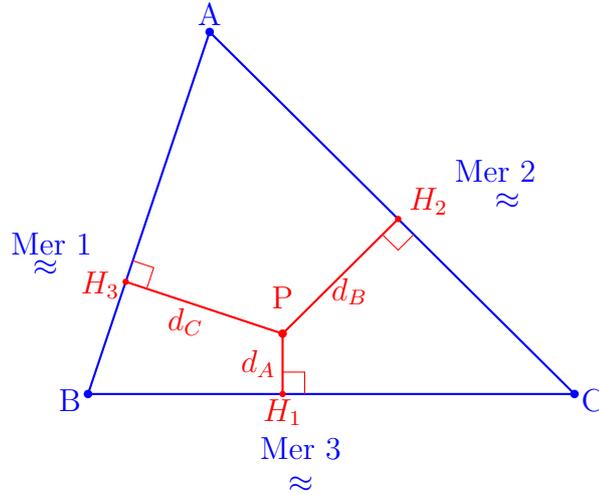


FIGURE 4 –

tienne, nous disposons du sous-différentiel  $\partial f_3$  de la fonction  $f_3$  (revoir le sous-paragraphe 1.2 si nécessaire) : En un point  $P$  intérieur au triangle :

$$\partial f_3(P) = \{\vec{a}_1\}, \text{ ou } \{\vec{a}_2\} \text{ ou } \{\vec{a}_3\} \text{ lorsque } \|\vec{PH}_1\|, \|\vec{PH}_2\| \text{ et } \|\vec{PH}_3\| \text{ sont différents ;}$$

$$\partial f_3(P) = \text{co}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} \text{ lorsque } \|\vec{PH}_1\| = \|\vec{PH}_2\| > \|\vec{PH}_3\|$$

(et deux autres situations du même acabit) ;

$$\partial f_3(P) = \text{co}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \text{ lorsque } \|\vec{PH}_1\| = \|\vec{PH}_2\| = \|\vec{PH}_3\|.$$

La condition d'optimalité qui caractérise le point  $P$  minimiseur de  $f_3$  est que  $\vec{0}$  soit dans  $\partial f_3(P)$ . Au vu de la disposition des vecteurs unitaires  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  (revoir la fin du sous-paragraphe 1.1) et de ce qui vient d'être décrit au-dessus, ceci n'est possible que dans le troisième sous-cas, c'est-à-dire lorsque  $\|\vec{PH}_1\| = \|\vec{PH}_2\| = \|\vec{PH}_3\|$ . En bref, le point solution est *le centre du cercle inscrit au triangle*.

Une autre manière d'opérer est de repérer ce point optimal  $P$  par ses coordonnées barycentriques. On en reparlera au paragraphe 4.

### 3. Minimisation d'une fonction-objectif (ou critère) construit à partir des distances aux sommets du triangle

#### 3.1 Minimisation de la somme des carrés des distances aux sommets

C'est sans doute, parmi toutes celles que nous envisageons, la situation la plus simple et la plus connue. Imaginons que notre campeur-surfeur doive se rendre nécessairement aux trois points de départ  $A, B$  et  $C$ . Voir la Figure 5. Question : cette fois-ci, où dans l'île doit-il planter sa tente ? La fonction-objectif (ou critère) à minimiser est ici

$$f_4(P) = \|\vec{PA}\|^2 + \|\vec{PB}\|^2 + \|\vec{PC}\|^2. \quad (13)$$

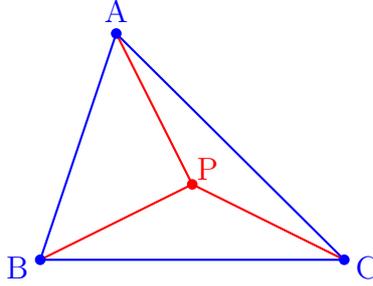


FIGURE 5 –

Elle est convexe (strictement même) et différentiable. La condition nécessaire et suffisante d’optimalité, appliquée ici, est très simple :  $P$  minimise  $f_4$  si, et seulement si,  $\nabla f_4(P) = \vec{0}$ , c’est-à-dire

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}. \quad (14)$$

On reconnaît là la caractérisation du point  $P$  *isobarycentre* (appelé aussi, un peu improprement, *centre de gravité*) du triangle  $\mathcal{T}$ . Nous reviendrons sur ces questions de barycentres de manière plus générale et plus en détail au paragraphe suivant (paragraphe 4).

### 3.2 Minimisation de la somme des distances aux sommets

Ici, le critère à minimiser est voisin du précédent dans son expression, mais le problème de minimisation résultant est plus élaboré :

$$f_5(P) = \|\vec{PA}\| + \|\vec{PB}\| + \|\vec{PC}\|. \quad (15)$$

La fonction  $f_5$  est convexe, strictement même car nous considérons le cas d’un triangle  $\mathcal{T}$  non aplati (donc avec des sommets  $A, B$  et  $C$  non alignés). Jusque là tout va bien. La difficulté -et nouveauté- est que  $f_5$  n’est pas différentiable en  $A, B$  et  $C$ . Mais, avec ce que nous avons vu au paragraphe 1.2, nous avons les outils et techniques pour traiter *tous les cas d’une seule façon*, que le point candidat à l’optimalité soit un sommet (= un point de non différentiabilité de  $f_5$ ) ou intérieur au triangle (= un point de différentiabilité de  $f_5$ ).

Si le point candidat  $P$  n’est pas un des sommets, la condition de caractérisation de  $P$  solution de notre problème de minimisation est

$$\frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|} + \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} + \frac{\vec{PC}}{\|\vec{PC}\|} = \vec{0}. \quad (16)$$

Si le point candidat  $P$  est l’un des sommets,  $A$  par exemple, il faut faire appel au sous-différentiel de  $f_5$ . Avec ce que nous avons présenté au paragraphe 1.2, le sommet  $A$  est le point minimiseur de  $f_5$  si, et seulement si,

$$\vec{0} \in \partial f_5(A) = \overline{B(0,1)} + \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}. \quad (17)$$

Détaillons quelque peu les deux cas de figure possibles (16) et (17).

Premier cas. Le point  $P$  n'est pas l'un des sommets du triangle. Désignons par  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  les trois vecteurs unitaires apparaissant dans (16),  $\vec{u} = \frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|}$ , etc. La condition (16),  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ , donne par produit scalaire avec  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  successivement :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} &= -1, \\ \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} &= -1, \\ \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} &= -1.\end{aligned}$$

La résolution de ce système de CRAMER conduit à

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} = -\frac{1}{2},$$

c'est-à-dire<sup>7</sup>

$$\text{angle}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{angle}(\vec{v}, \vec{w}) = \text{angle}(\vec{u}, \vec{w}) = 120 \text{ degrés.}$$

Deuxième cas. La condition (17) s'exprime par  $\vec{v} + \vec{w} \in \overline{B(0, 1)}$ . Mais, grâce au développement  $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w}$ , se rappelant que  $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$ ,

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq 1 \text{ équivaut à } \vec{v} \cdot \vec{w} \leq -\frac{1}{2},$$

soit encore

$$\text{angle}(\vec{v}, \vec{w}) \geq 120 \text{ degrés.}$$

Les deux cas examinés sont possibles, incompatibles, et couvrent toutes les possibilités. En somme :

- Si aucun des trois angles aux sommets  $A, B, C$  du triangle  $\mathcal{T}$  n'est supérieur ou égal à 120 degrés, le point optimal  $P$ , solution de notre problème de minimisation, est le point intérieur au triangle caractérisé par

$$\text{angle}(\vec{PA}, \vec{PB}) = \text{angle}(\vec{PA}, \vec{PC}) = \text{angle}(\vec{PB}, \vec{PC}) = 120 \text{ degrés.}$$

- Si l'un des angles au sommet,  $A$  par exemple, est supérieur ou égal à 120 degrés, alors le point optimal recherché est  $A$ .

Le problème de minimisation que nous venons d'évoquer fut posé sous forme de défi par FERMAT ; il en connaissait la réponse, mais le challenge fut relevé par E. TORRICELLI, ce qui explique que le point intérieur au triangle, d'où on voit les trois côtés du triangle sous un même angle de 120 degrés (lorsque cela est possible) est appelé *point de FERMAT* ou *point de FERMAT & TORRICELLI*.

### 3.3 Minimisation du maximum des distances aux sommets

7. L'angle géométrique, ou écart angulaire, de deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , comme celui des triangles plus loin, est toujours entre 0 et 180 degrés ; de manière précise c'est  $\arccos(\vec{u} \cdot \vec{v})$ .

De manière similaire à ce que nous avons traité au paragraphe 2.3, nous considérons ici la fonction-objectif ou critère suivant :

$$f_6(P) = \max(\|\vec{PA}\|, \|\vec{PB}\|, \|\vec{PC}\|). \quad (18)$$

Cette fonction  $f_6$ , toujours convexe, est plus complexe à traiter que la précédente, car sa zone de non différentiabilité s'étend au-delà des sommets du triangle. Pour simplifier un peu, nous supposons que le triangle  $\mathcal{T}$  (de sommets  $A, B, C$ ) est acutangle (c'est-à-dire avec trois angles aigus). En fait, comme au paragraphe 2.3, nous avons le résultat de calcul sous-différentiel que voici : en un point  $P$  intérieur au triangle,

$$\begin{aligned} \partial f_6(P) &= \left\{ \frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|} \right\}, \text{ ou } \left\{ \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} \right\} \text{ ou } \left\{ \frac{\vec{PC}}{\|\vec{PC}\|} \right\} \\ &\quad \text{lorsque } \|\vec{PA}\|, \|\vec{PB}\| \text{ et } \|\vec{PC}\| \text{ sont différents;} \\ \partial f_6(P) &= \text{co} \left\{ \frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|}, \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} \right\} \text{ lorsque } \|\vec{PA}\| = \|\vec{PB}\| > \|\vec{PC}\| \\ &\quad \text{(et deux autres situations du même acabit);} \\ \partial f_6(P) &= \text{co} \left\{ \frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|}, \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|}, \frac{\vec{PC}}{\|\vec{PC}\|} \right\} \text{ lorsque } \|\vec{PA}\| = \|\vec{PB}\| = \|\vec{PC}\|. \end{aligned}$$

La condition d'optimalité qui caractérise le point  $P$  minimisant  $f_6$  est que  $\vec{0}$  soit dans  $\partial f_6(P)$ . Au vu de ce qui a été décrit au-dessus, ceci n'est possible que dans le troisième sous-cas, c'est-à-dire lorsque  $\|\vec{PA}\| = \|\vec{PB}\| = \|\vec{PC}\|$ . Bref, le point solution est *le centre du cercle circonscrit au triangle*.

**Remarque.** Concernant les fonctions-objectifs considérées dans les problèmes des paragraphes 2.1 et 3.2, nous avons l'inégalité générale suivante :

$$\text{Pour tout point } P \text{ du triangle, } 2f_1(P) \leq f_5(P), \quad (19)$$

avec égalité seulement lorsque le triangle est équilatéral. C'est un beau résultat de ERDÖS & MORDELL. Conjecturé par P.ERDÖS en 1935 (mais non démontré, ce qui, vu la virtuosité de ce mathématicien, laisse entrevoir que ça n'était pas immédiat), puis résolu par MORDELL en 1936. Plusieurs démonstrations, aussi ingénieuses les unes que les autres, ont été proposées depuis. Il est probable qu'il doit y en avoir une via l'optimisation... Nous serions intéressés de la trouver.

### 3.4 Minimisation d'un mélange des distances aux sommets et aux côtés

Ce sous-paragraphe est intermédiaire dans son essence entre les paragraphes 2 et 3, car il va traiter d'une fonction-objectif alliant les distances aux côtés et les distances aux sommets d'un triangle. En fait, nous y sommes arrivés "à l'envers", comme nous allons

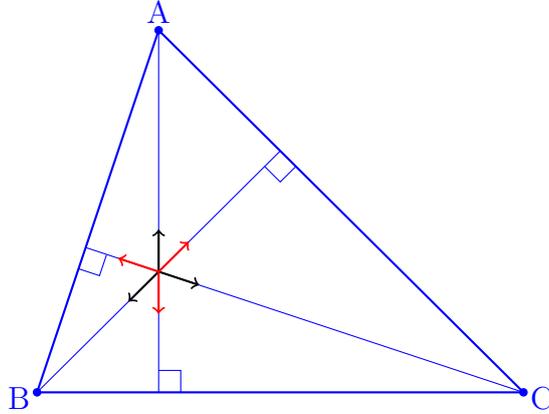


FIGURE 6 –

l'expliquer. Dans les paragraphes précédents, nous avons caractérisé les points usuels du triangle (isobarycentre, centre du centre inscrit, centre du cercle circonscrit) comme minimiseurs de fonctions convexes adéquates... Des points usuels oui, mais pas l'orthocentre. D'où notre question : *de quelle fonction-objectif l'orthocentre est-il le minimiseur ?* La réponse, à notre connaissance inédite, nous a été fournie par P.-J.LAURENT (professeur honoraire à l'université J.FOURIER de Grenoble) dans une communication personnelle d'août 2013. Considérons donc un triangle acutangle (pour simplifier) et la fonction-objectif (convexe) suivante :

$$f_7(P) = \|\vec{PA}\| + \|\vec{PB}\| + \|\vec{PC}\| + \|\vec{PH}_1\| + \|\vec{PH}_2\| + \|\vec{PH}_3\| \quad (1)$$

( =  $f_1(P) + f_5(P)$ , somme des distances aux sommets et des distances aux côtés).

Alors : *L'orthocentre H est un point minimiseur de la fonction convexe  $f_7$ .* Une fois qu'on connaît le résultat, sa démonstration devient plus facile (comme assez souvent en mathématiques). En effet (voir la Figure 6), chacune des six fonctions entrant dans la définition de  $f_7$  a, en un point  $P$  intérieur au triangle, un gradient qui est un vecteur unitaire (cela a été vu dans les paragraphes précédents). En l'orthocentre  $P$ , ces vecteurs unitaires sont opposés deux à deux, et donc se "tuent" entre elles ; donc le gradient de  $f_7$  en l'orthocentre est nul, ce qui fait que ce point est minimiseur de  $f_7$ .

L'orthocentre a, en fait, la propriété remarquable de "minimisation emboîtée" suivante :

- il minimise  $P \mapsto \|\vec{PA}\| + \|\vec{PH}_1\|$  (mais il n'est pas le seul) ;
- il minimise  $P \mapsto \|\vec{PA}\| + \|\vec{PH}_1\| + \|\vec{PB}\| + \|\vec{PH}_2\|$  (il est alors le seul) ;
- (pour le même prix) il minimise la fonction complète

$$P \mapsto \|\vec{PA}\| + \|\vec{PB}\| + \|\vec{PC}\| + \|\vec{PH}_1\| + \|\vec{PH}_2\| + \|\vec{PH}_3\|.$$

Une variante consisterait à minimiser

$$f_8(P) = \left\| \overrightarrow{PA} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{PB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{PC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{PH_1} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{PH_2} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{PH_3} \right\|^2$$

( =  $f_2(P) + f_4(P)$ , somme des carrés des distances aux sommets et aux côtés).

Un point minimisant  $f_8$  existe bien, il est à l'intérieur du triangle, "intermédiaire" en quelque sorte entre le point de LEMOINE et l'isobarycentre. Nous l'avons signalé aux collègues gérant le site web *Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)* (dont on parlera plus loin); ils l'ont ajouté au titre du "point X(5544)", "*The Hiriart-Urruty minimizer*", le 30 août 2013.

#### 4. "Tu seras barycentre mon fils..."

##### 4.1 Les coordonnées barycentriques : le retour

Nous avons évoqué dans le paragraphe 3.1 l'isobarycentre, c'est-à-dire un barycentre des sommets du triangle affectés de poids égaux. Dans ce paragraphe, nous allons en dire un peu plus sur cette notion de barycentre. D'une connotation physique claire ( $\beta\alpha\rho\sigma$  = lourd en grec), les dites coordonnées barycentriques furent introduites par MÖBIUS en 1827 (*Der Barycentrische Calcul*)<sup>8</sup>. Soit un triangle  $\mathcal{T} = ABC$  non aplati. En affectant les sommets  $A, B, C$  de poids  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$  respectivement, et prenant les barycentres, on peut balayer ainsi tous les points intérieurs au triangle  $\mathcal{T}$ . Mais qu'est-ce qu'un barycentre? Il y a au moins deux manières de définir le barycentre de  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$  :

- d'abord, en disant que c'est le seul point minimisant la fonction (strictement convexe, différentiable)

$$f(P) = \alpha \left\| \overrightarrow{PA} \right\|^2 + \beta \left\| \overrightarrow{PB} \right\|^2 + \gamma \left\| \overrightarrow{PC} \right\|^2; \quad (20)$$

- ou encore, en disant que c'est le seul point satisfaisant la condition vectorielle

$$\alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} = \vec{0}. \quad (21)$$

En fait, (21) n'est que l'explicitation de  $\nabla f(P) = \vec{0}$ , qui est exactement la condition caractérisant le point  $P$ .

L'existence d'un tel point  $P$  ne pose aucune difficulté dans le contexte de l'optimisation puisque  $f$  est continue et "coercive à l'infini" (c'est-à-dire vérifiant :  $f(P) \rightarrow +\infty$  quand  $\left\| \overrightarrow{OP} \right\| \rightarrow +\infty$ ).

Il est habituel de "normaliser" les poids  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$  en exigeant que  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ; ils deviennent alors ce qu'on appelle des "coefficients de combinaisons convexes". Le fait

---

8. Pour un étudiant en mathématiques, le nom de MÖBIUS est plutôt rattaché à la "surface de MÖBIUS", l'exemple le plus simple de surface non orientable. Quand j'étais étudiant, nous transformions légèrement cette surface pour en faire ce que nous appelons le "slip de MÖBIUS", c'est-à-dire que, quand on l'enfile, on ne sait plus s'il est à l'endroit ou à l'envers... Depuis quelques années, un ruban de type MÖBIUS est le logo universel des matériaux recyclables. Plus récemment, en 2013, le nom de MÖBIUS est revenu au goût du jour avec un film d'espionnage intitulé ainsi.

que  $\vec{OP}$  soit une combinaison convexe de  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  se vérifie alors immédiatement puisque

$$\begin{aligned}\alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} &= (\alpha + \beta + \gamma)\vec{OP} + \alpha\vec{PA} + \beta\vec{PB} + \gamma\vec{PC} \\ &= \vec{OP}.\end{aligned}$$

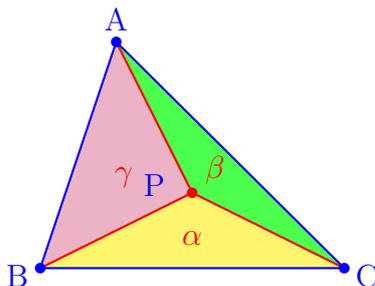


FIGURE 7 –

Tout point intérieur du triangle étant un barycentre, tout point particulier portant une appellation ou un nom (orthocentre, de LEMOINE, etc.) l'est, et donc résultat d'un problème de minimisation ; il suffit de trouver des coefficients ou poids  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$  correspondants. Une observation intéressante ici est que les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  se "voient" sur une figure : dans le triangle  $\mathcal{T} = ABC$ , le coefficient  $\alpha$  est le rapport de l'aire du triangle  $PBC$  à celui du triangle  $ABC$  tout entier, le coefficient  $\beta$  est  $Aire(PAC)/Aire(ABC)$ , et le coefficient  $\gamma$  est  $Aire(PAB)/Aire(ABC)$ . Voir la Figure 7. Ce sont des résultats faciles à démontrer, bien spécifiques au triangle ; une démonstration rapide à l'aide du calcul vectoriel est fournie en annexe. Passons en revue les principaux points particuliers du triangle et voyons leurs coefficients barycentriques (en fait un ou deux jeux de tels coefficients, non normalisés). Pour cela, nous désignons par  $a$  la longueur du côté  $BC$  (opposé à  $A$ ), par  $b$  la longueur du côté  $AC$ , par  $c$  la longueur du côté  $AB$  ; nous notons  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  les angles aux sommets  $A, B, C$  du triangle. Alors :

- L'*isobarycentre* (ou *centre de gravité* ou encore *centre de masse* (chez les physiciens)) est, comme l'indique son nom, le barycentre de  $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$  ;
- Le *centre du cercle inscrit* est le barycentre de  $(A, a), (B, b), (C, c)$ , ou bien de  $(A, \sin \hat{A}), (B, \sin \hat{B}), (C, \sin \hat{C})$  ;
- Le *point de LEMOINE* est le barycentre de  $(A, a^2), (B, b^2), (C, c^2)$  ;
- L'*orthocentre* d'un triangle acutangle (c'est-à-dire avec trois angles aigus) est le barycentre de  $(A, \tan \hat{A}), (B, \tan \hat{B}), (C, \tan \hat{C})$  ;
- Le *centre du cercle circonscrit* d'un triangle acutangle est le barycentre de  $(A, \sin 2\hat{A}), (B, \sin 2\hat{B}), (C, \sin 2\hat{C})$ .

Pour l'orthocentre comme pour le centre du cercle circonscrit, on peut éviter de faire appel aux angles et proposer des coefficients barycentriques qui ne font apparaître que les valeurs  $a, b, c$ , mais c'est un peu plus compliqué (termes en puissance 2 ou 4 de  $a, b, c$ ).

Pour les coordonnées barycentriques du point de FERMAT, je ne connais pas de formule simple faisant intervenir  $a, b, c$  (seuls) par exemple. Il existe néanmoins un site web où des centaines -que dis-je, des milliers- de points particuliers du triangle sont répertoriés ; il y en a vraiment beaucoup... On pourra y jeter un coup d'oeil :

CLARK KIMBERLING : <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>

Les coordonnées barycentriques du point particulier du triangle minimisant  $f_8$  (*cf.* sous-paragraphe 3.4), ainsi que la valeur minimale de  $f_8$ , ont été déterminées par P.MOSES ; voir X(5544) dans la partie 4 du site web mentionné au-dessus.

#### 4.2 Un peu d'optimisation barycentrique

On peut aussi résoudre les problèmes d'optimisation posés aux paragraphes 2.2 et 2.3 en déterminant les barycentres des points solutions. Rappelons que les distances d'un point du triangle aux côtés sont notés  $d_A, d_B, d_C$ . Par ailleurs, connaître  $d_A$  permet de connaître  $Aire(PBC)$  (puisque  $Aire(PBC) = \frac{1}{2}ad_A$ ) et donc un coefficient barycentrique associé au point  $A$  (*cf.* le sous-paragraphe 4.1). Le problème du paragraphe 2.2 se formalise en

$$(\mathcal{P}_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } (d_A^2 + d_B^2 + d_C^2) \\ \text{sous la contrainte } \frac{1}{2}(ad_A + bd_B + cd_C) = S \text{ (= Aire du triangle } ABC). \end{array} \right.$$

Quant au problème du paragraphe 2.3 , il se formalise en

$$(\mathcal{P}_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \max(d_A, d_B, d_C) \\ \text{sous la contrainte } \frac{1}{2}(ad_A + bd_B + cd_C) = S. \end{array} \right.$$

Dans les deux cas, on oublie la contrainte de positivité de  $d_A, d_B, d_C$ , laquelle sera automatiquement satisfaite *a posteriori*. Dans le premier problème ( $\mathcal{P}_1$ ) (resp. dans le deuxième problème ( $\mathcal{P}_2$ )), il s'agit de trouver le point du plan (de  $\mathbb{R}^3$ ) d'équation  $\frac{1}{2}(ad_A + bd_B + cd_C) = S$  (= Aire du triangle  $ABC$ ) qui soit le plus proche de l'origine au sens de la norme euclidienne (resp. au sens de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ). Dans le premier problème ( $\mathcal{P}_1$ ), la solution est

$$(d_A, d_B, d_C) = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2},$$

d'où  $(a^2, b^2, c^2)$  pour des coordonnées barycentriques du point de LEMOINE. Dans le deuxième problème ( $\mathcal{P}_2$ ), la solution est

$$(d_A, d_B, d_C) = \frac{2S}{a + b + c},$$

d'où  $(a, b, c)$  pour des coordonnées barycentriques du point centre du cercle inscrit au triangle.

En modifiant légèrement ( $\mathcal{P}_2$ ) en

$$(\mathcal{P}_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \max(\frac{1}{2}ad_A, \frac{1}{2}bd_B, \frac{1}{2}cd_C) \\ \text{sous la contrainte } \frac{1}{2}(ad_A + bd_B + cd_C) = S \end{array} \right. ,$$

on a un problème où la fonction-objectif à minimiser représente un maximum d'aires (des sous-triangles déterminés par  $P$ ) plutôt que de distances. La solution de  $(\mathcal{P}_3)$  est clairement

$$(d_A, d_B, d_C) = \left( \frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}, \frac{2S}{3c} \right),$$

et le point  $P$  correspondant est l'isobarycentre de  $ABC$  (permettant un partage du triangle en trois sous-triangles de même aire).

Pour terminer ce paragraphe sur les barycentres, voici une courte anecdote. Il y a quelques années, un homme politique français très en cour à l'époque, R. BARRE, de tendance centriste, convoqua les journalistes pour une conférence de presse; il allait leur annoncer sa candidature à la présidence de la république (en 1988). Il argumenta qu'il se présentait en "rassembleur" (c'est une phrase type des hommes politiques lorsqu'ils sont candidats à quelque chose), qu'il se situait au centre de gravité de l'échiquier politique, bref qu'il était "un barycentre". Et là les journalistes s'esclaffent de rire, pensant à un jeu de mots bien choisi "Barre-Centre"; manifestement ils n'avaient aucune idée de ce qu'était un barycentre...

### 5. Minimisation du parcours de visite des trois côtés du triangle

Voici un autre problème d'optimisation attaché au triangle. Mettons trois points sur les côtés des triangles,  $M_1$  sur  $BC$ ,  $M_2$  sur  $CA$ ,  $M_3$  sur  $AB$ , et cherchons s'il y a une disposition des points minimisant  $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| + \|\overrightarrow{M_2M_3}\| + \|\overrightarrow{M_3M_1}\|$ . Voir la Figure 8. Ce problème est un classique de la géométrie du triangle, il est historiquement connu sous l'appellation de *problème de FAGNANO* (1775). Voyons, sans entrer trop dans les détails, comment les résultats et techniques d'optimisation permettent de caractériser la solution, c'est-à-dire le parcours de visite en distance minimale des trois côtés du triangle. Pour éviter des dérives, nous supposons que le triangle  $ABC$  est acutangle.

Paramétrons les points  $M_1$  de la droite  $BC$  sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OB} + t_1 \overrightarrow{BC}, t_1 \text{ réel.}$$

On opère de même pour les points  $M_2$  de la droite  $CA$  et les points  $M_3$  de la droite  $AB$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_2} &= \overrightarrow{OC} + t_2 \overrightarrow{CA}, t_2 \text{ réel.} \\ \overrightarrow{OM_3} &= \overrightarrow{OA} + t_3 \overrightarrow{AB}, t_3 \text{ réel.} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction objectif  $f$  à minimiser est

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2, t_3) &= \|\overrightarrow{M_1M_2}\| + \|\overrightarrow{M_2M_3}\| + \|\overrightarrow{M_3M_1}\| \\ &= \|\overrightarrow{BC} + t_2 \overrightarrow{CA} - t_1 \overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{CA} + t_3 \overrightarrow{AB} - t_2 \overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{AB} + t_1 \overrightarrow{BC} - t_3 \overrightarrow{AB}\|. \end{aligned} \tag{22}$$

Comme dans les exemples plus haut,  $f$  est continue et "coercive à l'infini", ce qui assure l'existence de solutions dans notre problème de minimisation. La fonction  $f$  est clairement

convexe, elle l'est aussi strictement (cela est dû au fait que les trois vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CA}$  ne sont pas colinéaires). En somme, notre problème de minimisation a une et une seule solution, qu'il s'agit de caractériser à présent. Le triplet  $(t_1^*, t_2^*, t_3^*)$  minimisant  $f(t_1, t_2, t_3)$  parmi tous les triplets de réels  $(t_1, t_2, t_3)$  possibles est caractérisé par l'équation d'optimalité

$$\nabla f(t_1^*, t_2^*, t_3^*) = \vec{0}. \quad (23)$$

Nous allons exploiter cette condition en la détaillant, en faisant apparaître les trois dérivées partielles. Pour alléger l'écriture, posons

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1^* M_2^*}}{\|\overrightarrow{M_1^* M_2^*}\|}, \quad \vec{v} = \frac{\overrightarrow{M_2^* M_3^*}}{\|\overrightarrow{M_2^* M_3^*}\|}, \quad \vec{w} = \frac{\overrightarrow{M_3^* M_1^*}}{\|\overrightarrow{M_3^* M_1^*}\|},$$

où les points  $M_i^*$  sont les points-solutions sur les côtés du triangle (c'est-à-dire  $\overrightarrow{OM_1^*} = \overrightarrow{OB} + t_1^* \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{OM_2^*} = \overrightarrow{OC} + t_2^* \overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{OM_3^*} = \overrightarrow{OA} + t_3^* \overrightarrow{AB}$ ). Il y avait un petit travail préliminaire qui consistait à montrer que, comme le triangle  $ABC$  a été choisi acutangle, les points  $M_i^*$  ne peuvent se confondre ( $M_1^* = M_2^* = C$  par exemple), et que les  $t_i^*$  optimaux sont effectivement entre 0 et 1 ; nous l'occultons. La relation (23) se détaille en :

$$\begin{aligned} -\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} + \vec{w} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0, \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{CA} - \vec{v} \cdot \overrightarrow{CA} &= 0, \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} - \vec{w} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Cela se traduit géométriquement par les égalités suivantes d'angles (suivre sur la Figure 8) :

$$\theta_1 = \theta_2, \quad \theta_3 = \theta_4, \quad \theta_5 = \theta_6. \quad (25)$$

Ces relations "à l'extremum" ne sont pas surprenantes : le trajet optimal  $M_1^* M_2^* M_3^*$ , qu'on peut imaginer celui d'un rayon lumineux, se réfléchit sur chacun des côtés du triangle. Le trajet optimal d'un point de  $M_1^*$  à  $M_3^*$  (par exemple) est celui d'un rayon lumineux se réfléchissant sur le côté  $AC$  en  $M_2^*$  (c'est encore un coup de FERMAT !). Le triangle optimal  $M_1^* M_2^* M_3^*$  est ce qu'on appelle le triangle *orthique*, c'est-à-dire celui reliant les pieds des trois hauteurs du triangle  $ABC$  ; le point de concours  $P$  des bissectrices de  $M_1^* M_2^* M_3^*$  est, bien sûr, l'orthocentre de  $ABC$  et le centre du cercle inscrit à  $M_1^* M_2^* M_3^*$  ; il se projette orthogonalement sur le côté  $BC$  en  $M_1^*$ , sur le côté  $CA$  en  $M_2^*$ , sur le côté  $AB$  en  $M_3^*$ . Voir la Figure 8.

## 6. Changeons... Maximisation de l'aire d'une ellipse inscrite

Après celle de distance, la notion géométrique qui est la plus naturelle dans le plan est celle d'*aire* (les non mathématiciens diraient plutôt *surface*). Les problèmes d'optimisation dans le plan où l'on a à maximiser (ou minimiser) une aire ne manquent pas. Nous en présentons une ici, fort intéressante, qui est liée au triangle.

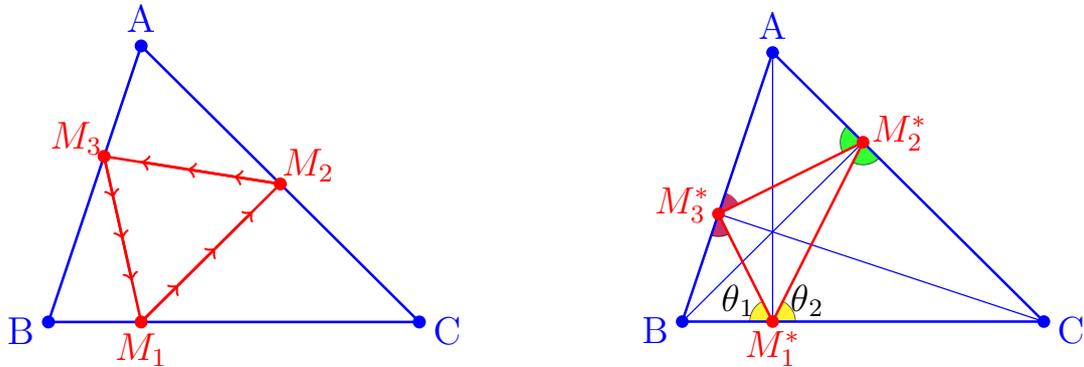


FIGURE 8 –

Nous savons ce qu'est le cercle inscrit au triangle, c'est le plus grand cercle (ou disque) contenu dans le triangle. Qu'un tel cercle existe, et surtout qu'il soit unique, est un coup de chance... Imaginez un rectangle : il y aurait plusieurs cercles "maximaux" ... Il y a pourtant un objet géométrique qui s'inscrit "maximalement" dans n'importe quel polygone convexe, défini de manière unique : c'est *l'ellipse d'aire maximale*. Ainsi, même dans un triangle, ce qui est notre contexte de travail, on peut faire mieux -et même beaucoup mieux- que le cercle inscrit, c'est inscrire une ellipse d'aire maximale. Cette ellipse est appelée *ellipse de STEINER*. Elle a la particularité d'avoir son centre en l'isobarycentre et d'être tangente aux côtés du triangle en leurs milieux. Sans la démontrer, essayons d'expliquer cette dernière propriété. Dans un triangle équilatéral, pour des raisons de symétrie, on comprend que cette ellipse optimale soit aussi le cercle inscrit, lequel est tangent aux côtés du triangle en leurs milieux. On passe à un triangle quelconque par une "déformation affine", laquelle conserve les contacts et les proportions ; d'où la propriété annoncée de l'ellipse de STEINER. Que dire de plus de cette ellipse de STEINER ? Ses foyers constituent un *bipoint* remarquable du triangle, au même titre que les points dits remarquables. Nous ne connaissons pas d'expression explicite de leurs coordonnées barycentriques en fonction des côtés du triangle par exemple. Toutefois il est possible de les localiser à l'aide du théorème de SIEBECK (1864) & MARDEN (1965), dont voici l'énoncé. Imaginons que le plan soit identifié au champ complexe, que  $z_A, z_B, z_C$  soient les affixes des sommets  $A, B, C$  du triangle. Alors, les deux racines du polynôme dérivé  $P'$  de  $P(z) = (z - z_A)(z - z_B)(z - z_C)$  sont les affixes des points-foyers de l'ellipse de STEINER, l'ellipse inscrite d'aire maximale donc. Avouons que c'est un joli résultat. Enfin, une dernière propriété qui plaira aux statisticiens : la droite passant par les deux foyers de l'ellipse de STEINER est la droite telle que la somme des carrés des distances des sommets du triangle à la droite est minimale (en termes plus savants, c'est la "droite de régression orthogonale des trois sommets du triangle"). Voir la Figure 9.

### Conclusion et prolongements possibles

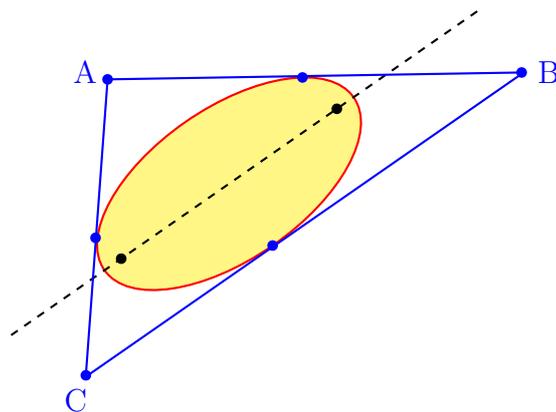


FIGURE 9 –

En utilisant les techniques et résultats basiques de l’optimisation convexe, il a été possible de parcourir à nouveau une partie de la géométrie du triangle, celle concernant ses points particuliers plus spécialement. Pour garder de la souplesse et ne pas perdre en généralité, il faut accepter de travailler avec des fonctions convexes non différentiables, c’est la seule extension à faire par rapport au monde traditionnel de l’optimisation dite convexe différentiable. La caractérisation par l’optimisation du centre du cercle inscrit et du centre du cercle circonscrit (sous-paragraphes 2.3 et 3.3) sont à ce prix ; elles sont d’ailleurs faciles. La caractérisation, également “variationnelle”, de l’orthocentre (au sous-paragraphes 3.4) ainsi que la variante qui s’en est suivie sont nouvelles, à notre connaissance.

Pour terminer, voici deux directions de prolongements possibles.

Tout d’abord, sans chercher à “optimiser” à tout prix, on peut se satisfaire de situations “équitables” ou “à l’équilibre”. Par exemple, comment placer les points  $M_1$  sur  $BC$ ,  $M_2$  sur  $CA$ ,  $M_3$  sur  $AB$  (voir Figure 8) de sorte que les quatre sous-triangles de  $ABC$  qui en résultent soient de même aire ? La réponse est fournie par :  $M_1$  milieu de  $BC$ ,  $M_2$  milieu de  $CA$ ,  $M_3$  milieu de  $AB$ . Le triangle  $M_1M_2M_3$  ainsi obtenu, appelé parfois triangle complémentaire de  $ABC$ , est semblable à celui-ci. Plus subtile est la question de partage équitable suivant : comment placer  $P$  dans le triangle  $ABC$  de manière que les aires des trois quadrilatères  $PH_2AH_3$ ,  $PH_3BH_1$  et  $PH_1CH_2$  soient de même aire (voir la Figure 4) ? La réponse à cette question, très récente, est : dans un triangle acutangle, oui il existe un et un seul point  $P$  qui permet cela (cf. [3, Theorem 3]).

Une autre piste de prolongement est de se poser *pour un tétraèdre* les mêmes questions que celles posées dans ce texte pour un triangle. Bien des résultats s’étendent, malgré une complication due au fait qu’il y a des sommets, des faces et des arêtes à gérer (d’où l’existence de *deux* points de LEMOINE par exemple, minimisant pour l’une la somme des carrés des distances aux faces du tétraèdre et, pour l’autre, la somme des carrés des distances aux arêtes du même tétraèdre). Mais la pierre d’achoppement se situe au niveau de l’orthocentre : il n’y pas d’orthocentre pour un tétraèdre quelconque (c’est-à-dire, les quatre hauteurs ne sont pas concourantes en un point)... Un point d’intérêt comme substitut est celui, fascinant, dit de MONGE, mais là c’est une autre histoire qui commence...

## Annexe

Influencé sans doute par le calcul vectoriel que nous enseignons en deuxième année d'université, voici une démonstration rapide du fait que les coefficients barycentriques  $(\alpha, \beta, \gamma)$  du point  $P$  intérieur au triangle  $ABC$  sont, à un coefficient de proportionnalité (strictement positif) près, les aires des triangles  $PBC, PAC, PAB$ . On part de la relation vectorielle de caractérisation du barycentre  $P$  (formule (21)) :

$$\alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} = \vec{0}.$$

En faisant le produit vectoriel de cette relation avec  $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$  successivement, et se souvenant que l'aire du triangle de côtés  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  est  $\frac{1}{2} \|\vec{U} \wedge \vec{V}\|$ , on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \beta \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{PA} + \gamma \overrightarrow{PC} \wedge \overrightarrow{PA} &= 0, \text{ d'où } \beta \text{ Aire}(PAB) = \gamma \text{ Aire}(PAC), \\ \alpha \text{ Aire}(PAB) &= \gamma \text{ Aire}(PBC), \\ \alpha \text{ Aire}(PAC) &= \beta \text{ Aire}(PBC). \end{aligned}$$

Ce système linéaire a une droite vectorielle de solutions,  $(\alpha, \beta, \gamma) = \text{multiples de } (\text{Aire}(PBC), \text{Aire}(PAC), \text{Aire}(PAB))$ .

## Remerciements

Je remercie Dr HAI YEN LE, Ph.D., pour l'aide apportée à la confection des figures.

## Références

1. D.AZÉ et J.-B.HIRIART-URRUTY, *Analyse variationnelle et Optimisation. Eléments de cours, exercices et problèmes corrigés*. Editions Cepadue Toulouse (2010).
2. J.-D.EIDEN, *Géométrie analytique classique*. Editions Calvage & Mounet (2009).
3. M.HAJJA et P.KRASOPOULOS, *Two more triangle centers*. Elemente der Mathematik 66 (2011), pp. 164-174.
4. J.-B.HIRIART-URRUTY et C.LEMARÉCHAL, *Fundamentals of convex analysis*. Grundlehren Text Editions. Springer (2001).
5. J.-B.HIRIART-URRUTY, *Du calcul différentiel au calcul variationnel : un aperçu de l'évolution de P.FERMAT à nos jours*. Quadrature N°70 (Octobre-Décembre 2008), pp. 8-18.
6. Y.LADEGAILLERIE. *Géométrie pour le CAPES de mathématiques*. Editions Ellipses (2002).
7. Y. et R.SORTAIS, *La géométrie du triangle. Exercices résolus*. Editions Hermann (nouveau tirage de 1994).
8. *Le triangle. Trois points c'est tout!* Tangente, Hors série n° 24 (2005).