

à paraître
décembre 2007

Les mathématiques du mieux faire

Volume I Premiers pas en optimisation

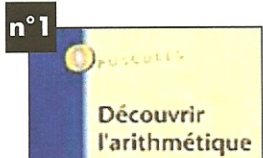
Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

Ces « Premiers pas en optimisation » sont destinés à un large public, dans un souci de popularisation des bases mathématiques de l'optimisation vers des domaines utilisateurs partiels, intéressés, ou potentiels : automatique, économie mathématique, analyse numérique, statistique, etc. Dans ce livre, l'accent a été mis sur les idées davantage que sur les techniques ou généralisations que le lecteur plus intéressé aura tout loisir de développer.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, professeur à l'Université Paul Sabatier à Toulouse, dirige le département de mathématiques. Mathématicien reconnu, il est l'auteur

d'ouvrages publiés aux éditions Dunod, EDP Sciences, PUF, Springer Verlag. Il écrit aussi très régulièrement dans le bulletin de l'APMEP (association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public).

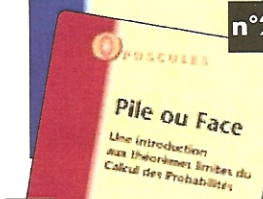
144 pages • ISBN 978-2-7298-3667-2



n°1

Découvrir
l'arithmétique

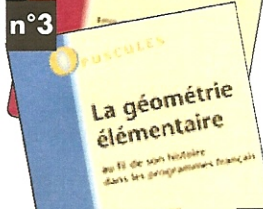
Découvrir l'arithmétique
Pierre Damphousse
128 pages
ISBN 2-7298-7995-1
9,5 €



n°2

Pile ou Face

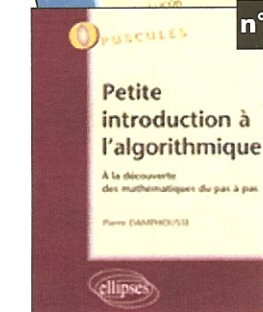
Pile ou Face - Une
introduction aux théorèmes
limites du Calcul des
Probabilités
Emmanuel Lesigne
128 pages
ISBN 2-7298-0679-2
9,5 €



n°3

La géométrie
élémentaire

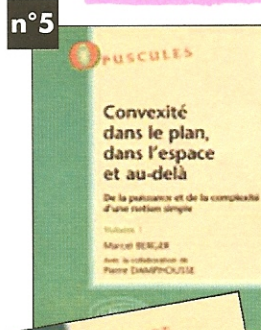
La géométrie élémentaire
Jean Licois
144 pages
ISBN 2-7298-2269-0
13 €



n°4

Petite
introduction à
l'algorithmique

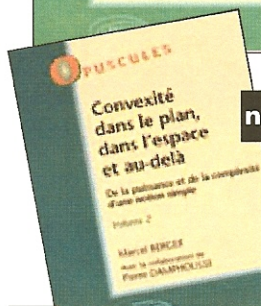
Petite introduction à
l'algorithmique
Pierre Damphousse
144 pages
ISBN 2-7298-2300-X
10,5 €



n°5

Convexité
dans le plan,
dans l'espace
et au-delà

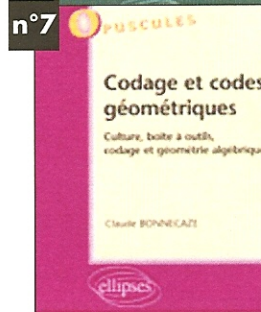
Convexité dans le plan, dans
l'espace et au-delà ? De la
puissance à la complexité d'une
notion simple ? Volume 1
Marcel Berger, avec la collaboration
de Pierre Damphousse
176 pages
ISBN 2-7298-2776-5
15 €



n°6

Convexité
dans le plan,
dans l'espace
et au-delà

Convexité dans le plan, dans
l'espace et au-delà ? De la
puissance à la complexité d'une
notion simple ? Volume 2
Marcel Berger, avec la collaboration
de Pierre Damphousse
144 pages
ISBN 2-7298-2777-3
14 €



n°7

Codage et codes
géométriques

Codage et codes géométriques,
Culture, boîte à outils,
codage et géométrie algébrique
Claude Bonnetaze
144 pages
ISBN 978-2-7298-3214-8
14,00 €

Université Paul Sabatier (Toulouse III)
Institut de mathématiques, Bât. 1R3
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 09
France
jbhu@mail.cict.fr

DU MÊME AUTEUR

Exercices d'algèbre linéaire et bilinéaire (avec Y. Plusquellec), Cepadues-Editions, Toulouse (1988).

Convex analysis and minimization algorithms (avec C. Lemaréchal), Vol. I *Fundamentals*, Vol. II *Advanced theory and bundle methods*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 305&306, Springer-Verlag (1993). Nouveau tirage en 1996.

L'optimisation, Collection «Que sais-je ?», Presses Universitaires de France (1996).

Optimisation et analyse convexe : exercices et problèmes corrigés. Presses Universitaires de France (1998).

Fundamentals of convex analysis (avec C. Lemaréchal), Grundlehren Text editions, Springer-Verlag (2001).

Calcul différentiel et équations différentielles : exercices et problèmes corrigés (avec D. Azé et G. Constans), Éditions Dunod (2002).

Classification AMS : 90,49

AVANT-PROPOS

D'après certains dictionnaires, l'usage français du verbe optimiser nous est arrivé vers 1844 d'Angleterre, où « *to optimise* » signifiait « *se comporter en optimiste* » ; on peut donc dire que l'optimiseur est comme l'optimiste qui pense *pouvoir toujours mieux faire*. . . : « minimiser un coût », « maximiser un profit », « optimiser un procédé », « gagner en optimisant », etc. Autant d'expressions qui font référence à un domaine encore relativement jeune des mathématiques et de leurs applications : l'*optimisation*.

Comme l'indique son titre, « *Les mathématiques du mieux faire* », l'opuscule que nous présentons ici a une ambition modeste, celui de guider les premiers pas dans le domaine de l'optimisation. Nous nous concentrons sur les aspects essentiels qu'en sont les dites *conditions d'optimalité et la dualité*. Le cadre de travail choisi est volontairement simple, les hypothèses des théorèmes ne sont pas toujours les plus faibles possibles, et nous avons voulu mettre l'accent sur les *idées* davantage que sur les techniques ou généralisations que le lecteur plus expert aura tout loisir de développer ou de retrouver. Les démonstrations des résultats mathématiques sont d'un caractère varié (parfois il y en a plusieurs pour un même théorème), certaines sont originales et inédites.

Les connaissances mathématiques pour aborder la lecture de cet opuscule sont maintenues minimales (tiens ?, voilà déjà un problème d'optimisation), celles normalement acquises après une formation scientifique à Bac +2. Le physicien et philosophe autrichien Ernst MACH ne disait-il pas que la Science pouvait être considérée comme un problème de minimum ? Selon lui : « *Elle consiste à exposer des faits, avec la moindre dépense intellectuelle* ». Est aussi présent dans notre démarche le souci de popularisation des bases de l'optimisation vers des domaines utilisateurs partiels, intéressés, ou potentiels : automatique, économie mathématique, analyse numérique, statistique.

Pour ce qui concerne l'enseignement, les aspects de l'optimisation présentés ici trouvent leur place dans les formations de fin de Licence ou de tout début de Master (modules généralistes ou professionnalisés) et dans la formation scientifique des ingénieurs.

Il y a dix ans, en 1996, nous avons publié un petit ouvrage intitulé «*L'optimisation*» dans la collection «*Que sais-je ?*» des Presses Universitaires de France. Depuis, bien des choses ont évolué dans le domaine ; ceci peut être vu comme une version révisée et augmentée de cette première publication.

Je remercie les étudiants, collègues, utilisateurs de mathématiques, qui ont bien voulu donner leur avis sur les différentes versions de cet ouvrage. Enfin, des remerciements particuliers vont à Milagros Garcia et Elie Chahine pour leur contribution à la saisie du manuscrit, ainsi qu'à Pierre Damphousse (directeur de la collection Opuscles) pour son aide à la finalisation du projet.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty
Toulouse et Pays basque, printemps-été 2006

Table des matières

1	Introduction à ce qu'est un problème d'optimisation . . .	1
	1.1. L'optimisation : enjeux et problèmes	1
	1.1.1. Fixons le paysage	1
	1.1.2. Les objectifs. Que cherche-t'on ?	2
	1.1.3. Les divers aspects. Analogie entre un problème d'optimisation et un problème policier	4
	1.1.4. Aspect existence et unicité des solutions	4
	1.1.5. Aspects conditions nécessaires d'optimalité	7
	1.1.6. Aspects conditions suffisantes d'optimalité	7
	1.1.7. Aspects algorithmes	9
	1.1.8. D'autres aspects qualitatifs	10
	1.2. Une classification des problèmes d'optimisation .	11
	1.2.1. Programmation linéaire	11
	1.2.2. Optimisation (minimisation) convexe . .	12
	1.2.3. Optimisation différentiable (ou lisse) . .	12
	1.2.4. Optimisation SDP	12
	1.2.5. Optimisation non-différentiable (ou optimisation non lisse)	14
	1.2.6. Optimisation multicritère (ou multiobjectif)	15
	1.2.7. Optimisation en dimension infinie . . .	19
2	Minimisation sans contraintes : conditions de minimalité	22
	2.1. Existence d'un minimum, unicité	22

	2.1.1.	Un résultat d'existence	22
	2.1.2.	Une condition suffisante d'unicité	24
	2.2.	Conditions de minimalité du premier ordre	25
	2.2.1.	Conditions nécessaires de minimalité locale	25
	2.2.2.	Conditions de minimalité globale	31
	2.2.3.	Conditions nécessaires de minimalité à ϵ près	34
	2.2.4.	Conditions nécessaires de minimalité locale pour une classe de fonctions-objectifs non- différentiables	38
	2.3.	Conditions de minimalité du second ordre	44
	2.4.	Un mot des conditions de minimalité d'ordre supé- rieur	49
3		Minimisation avec contraintes : conditions de minimalité	54
	3.1.	Conditions nécessaires du premier ordre : contrain- tes sous forme d'égalités	54
	3.2.	Conditions nécessaires du premier ordre : contrain- tes sous forme d'inégalités	62
	3.3.	Conditions nécessaires du premier ordre : contrain- tes sous formes d'égalités et d'inégalités	68
	3.4.	Conditions nécessaires du premier ordre : cas d'un ensemble-contrainte non représenté sous forme d'éga- lités ou d'inégalités	77
	3.4.1.	Les privilèges du monde linéaire (ou affine)	79
	3.4.2.	Le confort du monde convexe	80
	3.4.3.	Retour au monde différentiable	82
	3.5.	Conditions de minimalité du second ordre	86
	3.5.1.	Conditions nécessaires	86
	3.5.2.	Conditions suffisantes	89
	3.6.	Analyse de la sensibilité aux perturbations des con- traintes	92

4	Minimisation avec contraintes : points-selles de lagrangiens ; premiers pas dans la théorie de la dualité	98
4.1.	Les points-selles dans leur généralité	98
4.1.1.	Ce qu'est un point-selle	98
4.1.2.	Problèmes de mini-maximisation	99
4.1.3.	Sur l'existence de points-selles	101
4.2.	Points-selles de lagrangiens	101
4.3.	Premiers pas dans la théorie de la dualité	104
4.3.1.	Dualisons, dualisons...	104
4.3.2.	Exemples de dualisation	106
4.4.	Les multiplicateurs comme paramètres de sensibilité aux perturbations des contraintes	113
5	Annexe A. Notations et rappels	116
5.1.	Algèbre linéaire	116
5.2.	Calcul différentiel	116
5.3.	Convexité	118
	<hr/>	
	<i>Notices biographiques</i>	119
	<i>Éléments de bibliographie</i>	123
	<i>Index</i>	127
	<i>Liste des noms cités</i>	131