

Des fonctions... pas si particulières que ça : celles de

Lambert, Gudermann et Airy

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY
Institut de Mathématiques
Université PAUL SABATIER de Toulouse
E-mail : jbhu@math.univ-toulouse.fr

www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/

Résumé

Nous montrons comment l'Analyse de niveau Bac à Bac + 2 permet d'introduire et d'étudier en détail des fonctions que l'on pourrait ranger dans la boîte à outils des fonctions dites usuelles, au même titre que les fonctions trigonométriques ou hyperboliques réciproques.

1. Les tout débuts, en débarquant du lycée

Après avoir rempli sa musette au lycée de fonctions usuelles telles que les fonctions trigonométriques, polynomiales, fractions rationnelles, logarithmes et exponentielles, vient la première année post-Bac où il est habituel d'appréhender de nouvelles fonctions comme les fonctions trigonométriques réciproques (arcsinus, arccosinus, arctangente) ainsi que les fonctions hyperboliques et leurs réciproques (le sinus hyperbolique et sa réciproque l'arcsinus hyperbolique en sont les premiers exemples). L'idée de la construction est toujours la même : c'est de prendre la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone $f : I \rightarrow f(I) = J$ sur l'intervalle I , ce qui conduira à une nouvelle fonction $f^{-1} : J \rightarrow I = f^{-1}(J)$. La célébrité de la nouvelle fonction ainsi introduite dépend ensuite de son utilisation en mathématiques et dans les applications des mathématiques. Nous commençons notre présente étude à la section 2 avec une illustration supplémentaire de ce schéma de construction, celle conduisant à la fonction dite de LAMBERT. Son utilisation de plus en plus fréquente ces dernières années dans les domaines des applications pourrait lui permettre de candidater au club des fonctions dites usuelles, telles que celles rappelées plus haut.

Nous continuons dans la section 3 avec une autre fonction, que l'on peut qualifier aussi de particulière, celle de GUDERMANN. Elle fournit aussi l'occasion de manipuler tous les outils et résultats d'Analyse à Bac + 1, notamment le calcul différentiel sur les fonctions trigonométriques ou hyperboliques ainsi que sur leurs réciproques.

Enfin, dans la section 4, passant en deuxième année cette fois, au niveau Bac + 2, nous montrons comment la résolution d'équations différentielles d'aspect très simple peut conduire à l'introduction de nouvelles fonctions ; nous illustrons cette approche avec les fonctions d'AIRY.

L'intérêt pédagogique de l'étude de ces trois fonctions, au travers de devoirs par exemple, est attesté, nous avons eu l'occasion de l'éprouver plusieurs fois.

2. La fonction de LAMBERT

Commençons par rendre visite à ce cher mulhousien JOHN HEINRICH LAMBERT (1728-1777), contemporain et ami de L. EULER, son aîné d'une vingtaine d'années. La fonction qui va suivre pourrait être intitulée d'EULER car celui-ci a contribué à sa définition autant que LAMBERT, mais comme EULER a suffisamment d'objets mathématiques à son nom, convenons de ne retenir que celui de LAMBERT, c'est d'ailleurs l'usage à présent. Le point de départ est très simple, c'est l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) = xe^x$, l'une des plus simples construites avec les fonctions polynomiales et exponentielles. Il n'y a aucune difficulté à montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et sa dérivée en } x \in \mathbb{R} \text{ est } f'(x) &= (1+x)e^x; \\ f \text{ est strictement croissante et convexe sur } [-1, +\infty[; \\ f \text{ est une bijection de } [-1, +\infty[\text{ sur } [-\frac{1}{e}, +\infty[. \end{aligned}$$

Désignons par l^1 la bijection réciproque (ou inverse²) f^{-1} de f :

$$\begin{aligned} l &= f^{-1} : [-\frac{1}{e}, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[; \\ (x = l(y)) &\iff (xe^x = y) \text{ en s'en tenant à } (x, y) \in [-1, +\infty[\times [-\frac{1}{e}, +\infty[; \end{aligned} \quad (1)$$

c'est elle qu'on appelle la fonction (ou la fonction principale) de LAMBERT. Là, on se rend compte qu'on ne peut expliciter $l(y)$ à l'aide des fonctions usuelles telles que les puissances, logarithmes et exponentielles. Mais c'est toute la magie de l'Analyse que de pouvoir tout faire sur la fonction l sans avoir accès à une formule simple pour $l(y)$: représentation graphique, dérivée et primitives de l , approximation numérique de $l(y)$, etc. Notre expérience pédagogique nous pousse à garder la notation y pour la variable tant que le rôle de l comme fonction réciproque de f est important ; nous adopterons la notation usuelle d' x pour la variable de départ lorsque tout le dispositif sera mis en place.

- *Représentation graphique de l . Les graphes*

$$\{(y, l(y)); y \in [-\frac{1}{e}, +\infty[\} \text{ et } \{(x, f(x)); x \in [-1, +\infty[\}$$

sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Leurs représentations dans le plan ne posent aucune difficulté.

Par exemple, $l(1)$ est la solution x de l'équation $e^x = \frac{1}{x}$, sa valeur est approximativement 0,567143 ; ceci nous rapproche de l'inverse du nombre d'or φ , ce qui n'est pas

1. l pour LAMBERT. Dans la littérature sur cette fonction, c'est W qui est volontiers utilisée comme notation [1, 2, 6, 7]. Mais il y a déjà beaucoup de w dans notre environnement scientifique (en mathématiques, physique, ...), à commencer par www ...

2. Même si *inverse* est utilisé, et que l'Anglais l'a adopté, nous utiliserons autant que faire se peut le qualificatif de *réciproque*. Cela évitera quelques déboires aux étudiants qui pourraient penser à $1/f$ lorsqu'on évoque l'inverse de f .

étonnant puisque $1/\varphi \simeq 0,618034$ est solution de l'équation $1+x = \frac{1}{x}$ et que $1+x$ est une approximation au premier ordre de e^x au voisinage de 0.

- *Dérivée de l* . Puisque f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $l = f^{-1}$ est dérivable sur $] -\frac{1}{e}, +\infty[$ et

$$l'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ où } x \text{ est l'unique solution de } xe^x = y.$$

Par exemple, $l'(1)$ est approximativement 0,6381 et $l'(e) = \frac{1}{2e}$. De manière générale,

$$l'(y) = \frac{1}{(1+x)e^x} \text{ où } x = l(y) \text{ est l'unique solution de } xe^x = y;$$

$$l'(y) = \frac{e^{-l(y)}}{1+l(y)}; \tag{2-1}$$

$$l'(y) = \frac{l(y)}{[1+l(y)]y} \text{ si } y \neq 0. \tag{2-2}$$

De fait, l est strictement croissante et indéfiniment dérivable sur $] -\frac{1}{e}, +\infty[$ (comme l'était f sur $] -1, +\infty[$). Un simple calcul supplémentaire conduit à

$$l''(y) = -\frac{e^{-2l(y)} [l(y) + 2]}{[l(y) + 1]^3} \tag{3-1}$$

$$= -\frac{l^2(y) [l(y) + 2]}{y^2 [l(y) + 1]^3} \text{ si } y \neq 0. \tag{3-2}$$

et donc à la stricte concavité de l .

Désormais nous reprenons la notation traditionnelle avec x pour la variable de départ.

- *Développement en série entière de l*

Nous avons le développement en série entière de l comme suit :

$$l(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n \tag{4}$$

sur l'intervalle $] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$. Pour y arriver, une des méthodes consiste à utiliser la technique, dite de réversion de LAGRANGE, pas folichonne à appliquer en général, consistant à obtenir les coefficients a_n du développement en série entière de f^{-1} à partir de celle de f ([3, pages 67-72]); ici, il se trouve que les coefficients du développement de f sont simples et que le calcul qui s'ensuit se déroule bien. Ensuite, avoir le rayon de convergence de la série (3) résulte de l'application de la règle de D'ALEMBERT ([3, Proposition II.1.2]) :

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{e}.$$

La relation de récurrence entre coefficients a_n

$$a_1 = 1, a_{n+1} = - \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n-1} a_n \text{ pour tout } n \geq 1 \quad (5)$$

permet de calculer facilement la première dizaine de coefficients; au-delà, la croissance rapide (avec n) des valeurs de a_n rend vite ces calculs problématiques.

- *Primitives de l*

Les primitives de l sur $] -\frac{1}{e}, +\infty[$, en fait une primitive, se trouvent être faciles à calculer. Pour cela, nous allons utiliser une manière de faire plus originale que les techniques de primitivation usuelles, celle qui consiste à passer par la transformation de LEGENDRE; c'est comme cela que nous avons opéré pour primitiver la fonction $\operatorname{argsinh}$ sur \mathbb{R} dans [4, Exercice 7.6]. Voici la procédure. Soit f une fonction strictement croissante, de primitive la fonction strictement convexe F ; alors, si l est la fonction réciproque de f , une primitive L de l est fournie par ladite transformée de LEGENDRE-FENCHEL de F , qui est

$$p \mapsto F^*(p) = \sup_x [px - F(x)]. \quad (6)$$

Ici, p joue le rôle d'une pente (construction géométrique de $F^*(p)$) ou d'un prix (interprétation économique de $F^*(p)$); voir [5, Chapter E] pour plus de détails sur cette construction. En x maximiseur dans (6) pour p donné, grosso modo en négligeant les effets de bord,

$$p = F'(x), \text{ d'où } x = (F')^{-1}(p) = f^{-1}(p) = l(p), \quad (7)$$

et

$$F^*(p) = pl(p) - F[l(p)]. \quad (8)$$

C'est notre fonction primitive L recherchée.

Appliquons la technique à l'exemple qui nous occupe. Une primitive F de $f : x \mapsto f(x) = xe^x$ sur $] -1, +\infty[$ est facile à déterminer, c'est par exemple $F : x \mapsto F(x) = (x-1)e^x$. Ensuite, pour $p > -\frac{1}{e}$,

$$L(p) = F^*(p) = pl(p) - [l(p) - 1] e^{l(p)}. \quad (9)$$

En raison de la relation $l(p)e^{l(p)} = p$, d'autres formulations de $L(p)$ sont possibles :

$$L(p) = [l(p)^2 - l(p) + 1] e^{l(p)}, \quad (10-1)$$

$$= p \left[l(p) - 1 + \frac{1}{l(p)} \right] \text{ si } p \neq 0. \quad (10-2)$$

Une fois qu'on a l , on a donc accès facilement à une primitive L de l .

- *Calcul numérique de l* . Étant donné $r > 1/e$, le calcul numérique de $l(r)$ passe par la résolution de l'équation non linéaire (en x)

$$xe^x - r = 0. \quad (11)$$

La méthode de NEWTON ainsi qu'une variante comme celle de HALLEY sont bien adaptées pour approcher itérativement la solution $x^* = l(r)$ de (11) ; c'est ce que proposent les principaux logiciels de calcul comme Maple, Mathematica (où la fonction de LAMBERT est appelée ProductLog), Matlab, Python (fonction lambertw).

- *Observations finales.* La remise au goût du jour de la fonction de LAMBERT doit beaucoup au travail [1], lequel fut d'ailleurs notre point de départ. Son étude dans le cadre des fonctions de la variable complexe est plus instructive, mais cela dépasse notre objectif ici. Son utilisation en Physique est illustrée dans [6] (trajectoire d'un objet lancé en l'air en présence de frottement) ou [7] (modèles plus avancés de Physique).

- *Intérêts pédagogiques.* C'est clairement au niveau Bac + 1 qu'ils se situent lorsqu'il s'agit d'étudier la construction et les propriétés des fonctions réciproques. Nous l'avons expérimenté à plusieurs reprises, tant au niveau d'exercices en Travaux Dirigés qu'en sujets d'examens. Un exemple additionnel est celui de la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \ln(x) + x;$$

sa bijection réciproque n'est autre que

$$]0, +\infty[\leftarrow \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = l(e^y).$$

À un niveau plus avancé, à Bac + 2, c'est l'occasion d'illustrer un développement en série entière (formule (4)) ou la résolution d'un problème de CAUCHY non linéaire (formules (2-1) et (2-2)).

3. La fonction de GUDERMANN

Non, non GUDERMANN n'est pas le nom d'un joueur de football de l'équipe nationale allemande³... , c'est le nom d'un mathématicien allemand, CHRISTOPH GUDERMANN (1798-1851) qui fut élève de GAUSS et le professeur favori de WEIERSTRASS. Son nom est associé à une fonction particulière bien intéressante, dont la construction repose, comme au paragraphe précédent, sur l'inversion d'une bijection. Le point de départ est le suivant. Soit $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ les six fonctions de $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $J = \mathbb{R}$ définies comme suit :

$$f_1(x) = \operatorname{argsinh}(\tan x); f_2(x) = \operatorname{argtanh}(\sin x); \quad (12-1)$$

$$f_3(x) = 2\operatorname{argtanh}\left(\tan \frac{x}{2}\right); f_4(x) = \ln \left[\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]; \quad (12-2)$$

$$f_5(x) = \ln \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x} \right); f_6(x) = \ln \left[\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} \right]. \quad (12-3)$$

Le calcul des dérivées de ces fonctions est un excellent exercice de calcul différentiel, et ô surprise, on constate que toutes ces dérivées sont égales et valent $\frac{1}{\cos(x)}$. Comme

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = f_4(0) = f_5(0) = f_6(0) = 0,$$

3. À ne pas confondre non plus avec GAUDERMEN qui est le nom d'une compétition de rugby, réservée aux cadets.

on en déduit que ces six fonctions, aux expressions si différentes, sont égales :

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6.$$

Appelons f cette fonction commune. En bref,

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos(t)}. \quad (13)$$

L'étape suivante est d'observer que f est une bijection (strictement croissante) de $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $J = \mathbb{R}$. Appelons g cette fonction réciproque f^{-1} (g comme GUDERMANN).

On obtient à partir des formules (12) différentes expressions de $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$; en voici quatre :

$$g(x) = \arctan(\sinh x); \quad g(x) = \arcsin(\tanh x); \quad (14-1)$$

$$g(x) = 2\operatorname{arctanh}\left(\tanh \frac{x}{2}\right); \quad g(x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}. \quad (14-2)$$

Quid de la dérivée de g ? Un nouvel excellent exercice de calcul différentiel conduit à constater que toutes ces dérivées sont égales (et pour cause) mais qu'elles prennent une forme très simple : $g'(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$. Après le cosinus (des fonctions trigonométriques circulaires) apparaissant plus haut, voici donc surgir le cosinus hyperbolique! Puisque $g(0) = 0$, nous avons

$$g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh(t)}. \quad (15)$$

Mettant côte à côte les formules (13) et (15), nous avons la belle relation "de bascule" entre les cosinus suivante :

$$\left(x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } y = \int_0^x \frac{dt}{\cos(t)}\right) \Leftrightarrow \left(y \in \mathbb{R} \text{ et } x = \int_0^y \frac{dt}{\cosh(t)}\right). \quad (16)$$

- *Observations finales.* La relation (16) permet de passer du cosinus usuel au cosinus hyperbolique sans passer par la variable complexe, ce qui est remarquable.

- *Intérêts pédagogiques.* Comme cela a déjà été dit, ce qui a été proposé au-dessus constitue d'excellents exercices de calcul différentiel, à propos de fonctions composées et des fonctions de la trigonométrie (circulaire comme hyperbolique).

Un piège, que nous avons tendu plusieurs fois aux étudiants est de faire dériver la fonction $2\arctan(e^x)$, de constater que la dérivée est égale à $1/\cosh(x)$ comme pour les trois autres fonctions de (14-1) et (14-2), ... , d'où égalité de ces fonctions, disent les étudiants; non, elles diffèrent d'une constante, et cette constante est précisément $-\pi/2$ ici.

4. Les deux fonctions d'AIRY

La résolution des équations différentielles, au niveau Bac + 2, est une autre occasion de montrer comment l'Analyse conduit à l'introduction de nouvelles fonctions particulières,

qui ne peuvent être obtenues à partir des fonctions usuelles par des opérations standard, y compris la primitivation, la prise de racine carrée, etc. Essayez donc de résoudre l'équation différentielle suivante, appelée d'AIRY :

$$y'' - xy = 0. \quad (17)$$

Vous n'y arriverez pas... Elle paraît pourtant bien sympathique cette équation différentielle : linéaire, homogène, à coefficients continus très simples... , proche dans sa formulation des équations différentielles (encore plus simples)

$$y'' - y = 0 \text{ et } y'' + y = 0. \quad (18)$$

L'astronome et mathématicien anglais GEORGE BIDDELL AIRY (1801-1892) l'étudia et introduisit les fonctions qui portent son nom pour ses calculs d'optique. L'idée est de rechercher des solutions de (17) sous forme de séries entières. Ce n'est pas seulement une technique, il y a derrière des résultats mathématiques de portée générale (c'est-à-dire des théorèmes). Nous suivons ici [8, pages 73-78]. En pratique, comment procède-t-on ? Voici la méthode à suivre, illustrée ensuite par l'exemple de l'équation différentielle d'AIRY :

- On part d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ candidate à être solution de l'équation différentielle considérée (appelée (ed)).

- Connaissant $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, on "injecte" les données $y(x), y'(x), y''(x)$ dans (ed). Par identification, on obtient ainsi une relation de récurrence entre les coefficients a_n , lesquels sont ensuite complètement déterminés à l'aide des deux premiers a_0 et a_1 .

- On s'assure ensuite que la série entière mise en évidence a un rayon de convergence $R > 0$.

Cela permet d'obtenir une solution, voire deux solutions linéairement indépendantes, de (ed) sur $] -R, R[$. Parfois, on reconnaît des fonctions usuelles développées en séries entières, parfois pas. Il s'agit alors de nouvelles fonctions (autres que celles connues jusque-là) qui sont introduites.

Appliquons la méthode à (17). Les calculs se déroulent sans peine (cf. [8, page 76]) :

- Avec le choix de $a_0 = 1, a_1 = 0$, on arrive à

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.4.7... (3n-2)}{(3n)!} x^{3n}. \quad (19)$$

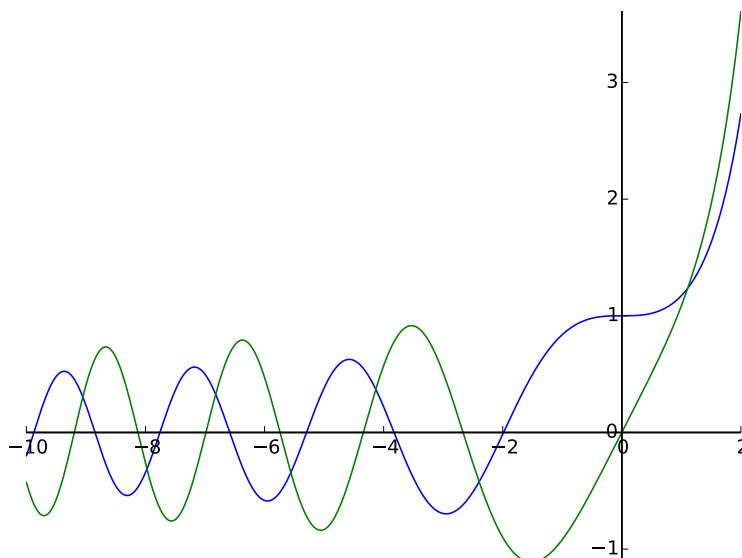
- Avec le choix de $a_0 = 0, a_1 = 1$, on arrive à

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.5.8... (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}. \quad (20)$$

On vérifie sans trop de peine que les séries entières définissant y_1 et y_2 (en (19) et (20) respectivement) sont convergentes pour tout $x \in \mathbb{R}$ (le rayon de convergence est donc $R = +\infty$). On a ainsi mis en évidence deux solutions linéairement indépendantes

de l'équation différentielle d'AIRY (l'une est solution de problème de Cauchy avec les conditions $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$, l'autre avec les conditions $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$).

Les fonctions y_1 et y_2 sont appelées fonctions spéciales d'AIRY. En voici une représentation graphique.



On notera le comportement de ces fonctions : oscillantes lorsque $x < 0$, comme les solutions de base de $y'' + y = 0$ (c'est-à-dire $\cos(x)$ et $\sin(x)$) ; en solutions exponentielles lorsque $x > 0$, comme les solutions de $y'' - y = 0$ (c'est-à-dire $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$).

A vrai dire, les fonctions d'AIRY qu'utilisent les physiciens sont définies avec des conditions initiales de celles choisies ici ; elles sont en fait combinaisons linéaires des fonctions y_1 et y_2 .

- *Intérêt pédagogique.* C'est celui de manipuler des calculs sur les séries entières, et aussi de montrer que des équations différentielles aussi simples en apparence que (17) n'ont pas de solutions exprimables à l'aide des fonctions connues au moment où précisément on étudie ces équations différentielles.

Conclusion

À l'aide de trois exemples, nous avons montré comment les constructions de l'Analyse permettent d'introduire de nouvelles fonctions, que l'on qualifie de particulières mais qui ne le sont pas tant que ça, et qui rejoignent au fur et à mesure de leur utilisation le club grandissant des "fonctions usuelles".

Références

- [1] R.M. CORLESS, G.H. GONNET, D.E. HARE, D.J. JEFFREY & D.E. KNUTH, *On the LAMBERT function*. Advances in Computational Mathematics, Vol. 5, N° 1 (1996), 329-359.

- [2] T.P. DENCE, *A brief look into the LAMBERT W function*. Applied Mathematics 4 (2013), 887-892.
- [3] J.-M. ARNAUDIÈS, H. FRAYSSE, *Cours de mathématiques 3 - Compléments d'Analyse*. Editions Dunod (1989).
- [4] J.-B. HIRIART-URRUTY, *Optimisation et Analyse convexe - Exercices et problèmes corrigés, avec rappels de cours*. Collection Enseignement Sup - Mathématiques, EDP Sciences (2009).
- [5] J.-B. HIRIART-URRUTY, C. LEMARÉCHAL, *Fundamentals of convex analysis*. Grundlehren Text Editions, Springer (2001).
- [6] E.W. PACKEL, D.S. YUEN, *Projectile motion with resistance and the LAMBERT W function*. The College Mathematics Journal, Vol. 35, N° 5 (2004), 337-350.
- [7] S.R. VALLURI, D.J. JEFFREY, R.H. CORLESS, *Some applications of the LAMBERT W function to Physics*. Canadian Journal of Physics, Vol. 78, N° 9 (2000), 823-831.
- [8] J.-B. HIRIART-URRUTY, *Les équations différentielles pour les débutants*. Editions H&K (2013).