

# DE L'HEPTADIVISION D'UN TRIANGLE AU THÉORÈME DE ROUTH

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY & PATRICE LASSÈRE.

## 1. INTRODUCTION

Le point de départ est l'exercice suivant qui est posé régulièrement (un exemple très récent est dans la rubrique "Au fil des problèmes" du bulletin "Au fil des math" problème 545-4, p.67, Automne 2022 ; voir aussi le problème 474-3 du bulletin de l'APMEP Vol. 474 (2008) p. 390-391) :

À partir de chaque sommet  $A, B, C$  d'un triangle non dégénéré on construit sur le côté opposé les points  $A', B', C'$  tels que

$$AB' = \frac{1}{3}AC, \quad BC' = \frac{1}{3}BA, \quad CA' = \frac{1}{3}CB.$$

Alors les points d'intersection des droites  $(AA'), (BB'), (CC')$  forment un nouveau triangle  $IJK$  dont l'aire vaut exactement  $1/7$  de l'aire du triangle initial.

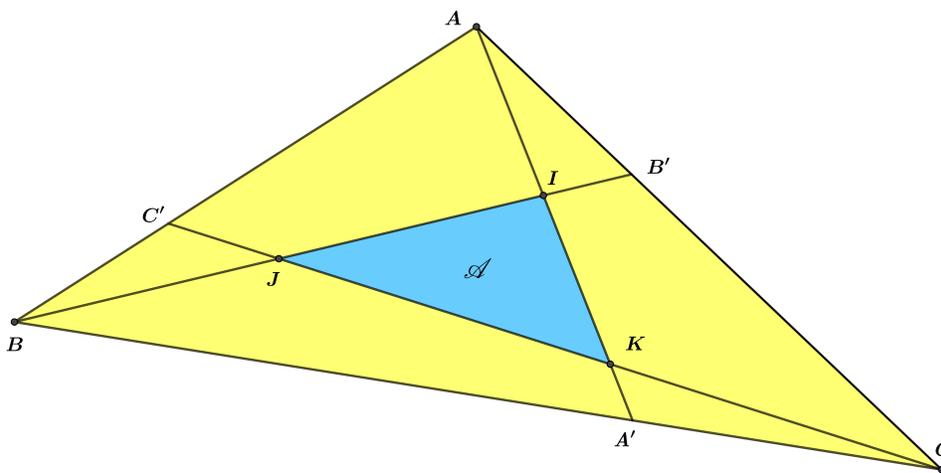


FIGURE 1. L'aire du triangle  $IJK$  vaut  $1/7$  de l'aire du triangle  $ABC$ .

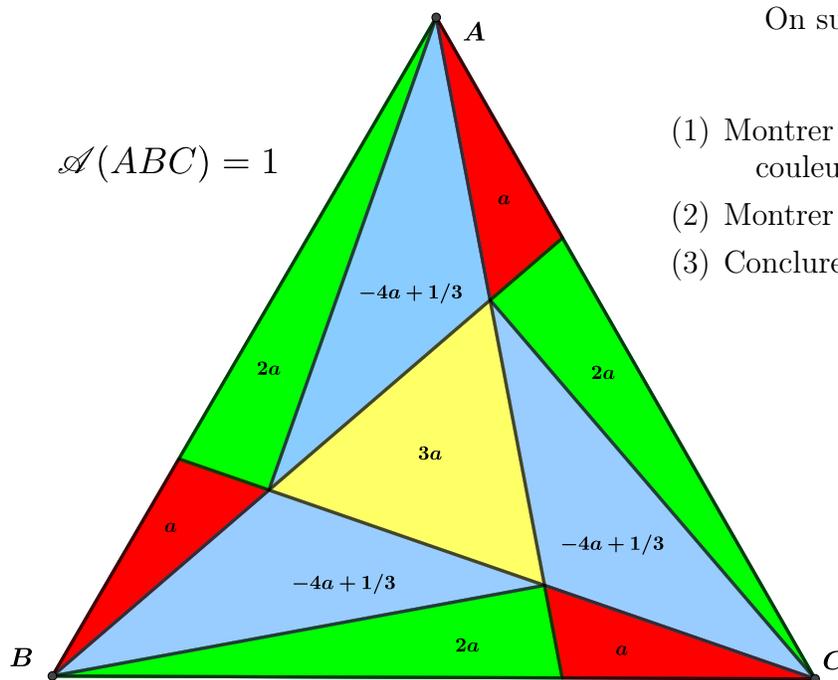
Cet exercice d'une apparence inoffensive remporte en général un franc succès. Il faut dire que la constante 7 arrive comme un cheveu dans la soupe et semble n'avoir aucun lien avec le 3 qui pilote la construction. Une recherche rapide conduit à de nombreuses solutions où l'on croise quelques noms fameux : Richard Feynman, Hugo Steinhaus, Ivan Niven...

On parle parfois de triangle de Feynman (Richard le célèbre physicien américain) à qui on avait soumis ce problème lors d'une soirée ; l'histoire dit (voir [3]) que Feynman n'en avait pas cru un mot et avait passé une partie de la nuit à essayer d'infirmer ce résultat... avant de finalement trouver une solution lorsque le triangle est équilatéral!

## 2. QUELQUES CAS PARTICULIERS

Comme Feynman, commençons par considérer le cas particulier où le triangle  $ABC$  est équilatéral (ou rectangle), dans la littérature on parle alors de Triangle de Feynman. Le cas où  $ABC$  est équilatéral ou rectangle n'est pas innocent car il fournit une solution à notre problème, vu que tout triangle est l'image par une transformation affine d'un triangle équilatéral (ou rectangle) et qu'une transformation affine conserve le rapport des longueurs (notre hypothèse) et donc des aires (notre conclusion).

**2.1. Le cas d'un triangle équilatéral.** Voici la preuve « presque » sans mots de Pierre-Jean Laurent (Grenoble).



On suppose que  $\mathcal{A}(ABC) = 1$ .

- (1) Montrer que les triangles de même couleur ont même aire.
- (2) Montrer que  $3a = -4a + 1/3$ .
- (3) Conclure.

FIGURE 2. Le carrelage de Pierre-Jean Laurent.

**2.2. Le cas d'un triangle rectangle.** Avec un peu d'algèbre linéaire on résout le problème sans peine pour le triangle rectangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  :

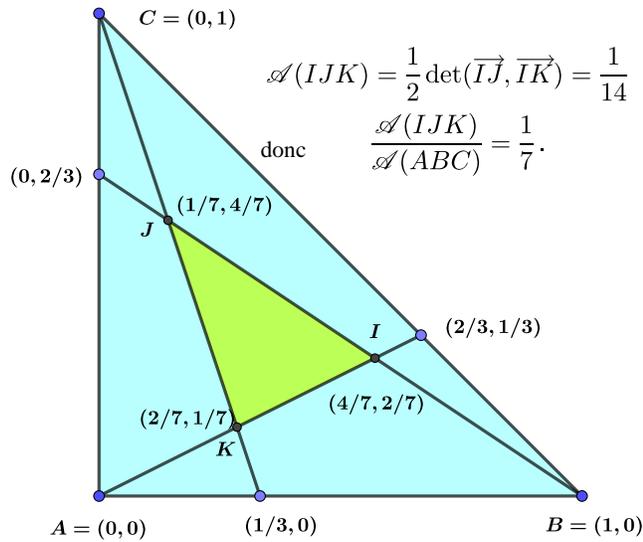


FIGURE 3. L'aire du triangle rectangle  $IJK$  vaut  $1/7$  de l'aire du triangle  $ABC$ .

De là, on en déduit le cas général vu que tout triangle est image par une application linéaire  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Plus précisément, si (en fixant un repère)  $A = (0,0)$ ,  $B = (a,b)$  et  $C = (c,0)$ , le triangle  $ABC$  est l'image du triangle rectangle de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$  par l'application linéaire

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} c & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx + ay \\ by \end{pmatrix}.$$

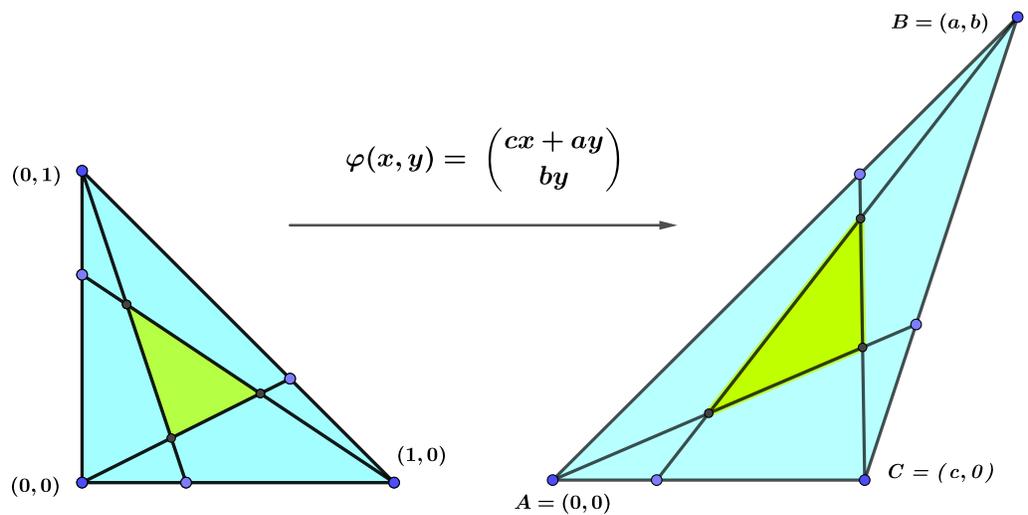
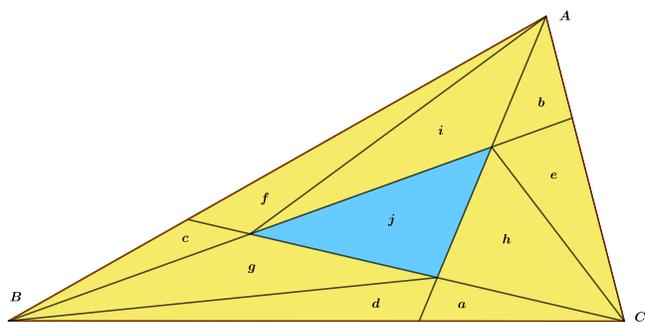


FIGURE 4.  $\varphi$  envoie notre premier triangle sur  $ABC$  en conservant les rapports des longueurs et des aires.

**Remarque :** Cette méthode se généralise aussitôt pour prouver le théorème de Routh (voir paragraphe 4), les calculs sont juste plus pénibles pour déterminer les coordonnées des sommets dans le triangle rectangle.

### 3. LE TRIANGLE EST QUELCONQUE : QUELQUES APPROCHES

3.1. **Une première Solution :** Une preuve presque sans mots dans le même esprit que celle de Pierre-Jean Laurent.



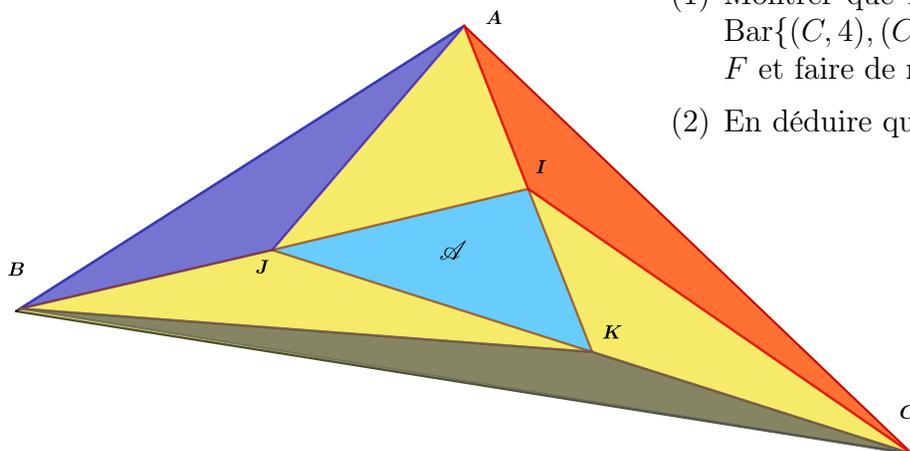
- (1) Montrer que  $2a = d$ ,  $2h = g + j$ ,  $2(e + b) = c + f + i$  puis donner deux autres séries de formule analogues.
- (2) En déduire que  $6j = a + b + c + d + e + f + g + h + i$ .
- (3) Conclure.

FIGURE 5. Un autre carrelage.

3.2. **Une seconde solution :** Celle de Beñat Mirabel (Biarritz). On utilise les coordonnées barycentriques pour montrer que  $I$  est le milieu de  $AK$ , et par symétrie  $J$  sera le milieu de  $BI$  et  $K$  le milieu de  $CJ$ . La médiane d'un triangle définissant deux triangles de même aire on en déduit alors sans peine que les sept triangles colorés ci dessous ont la même aire soit :

$$\mathcal{A}(IJK) = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{7}.$$

Plus précisément : considérons le point  $H$  de coordonnées barycentriques  $(1, 2, 4)$  dans le repère  $A, B, C$  i.e. :  $H = \text{Bar}\{(A, 1), (B, 2), (C, 4)\}$  ou encore  $\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + 4\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ .



- (1) Montrer que  $H = \text{Bar}\{(A, 1), (A', 6)\} = \text{Bar}\{(C, 4), (C', 3)\}$ , en déduire que  $H = F$  et faire de même pour  $J$  et  $K$ .
- (2) En déduire que  $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI}$  et conclure.

FIGURE 6. Le carrelage de Beñat Mirabel.

3.3. **Une troisième Solution :** (Mikuzinski, 1943). Une preuve pratiquement sans mots comme la première, connue semble-t-il comme le puzzle de Mikuzinski...

A partir de notre configuration on dédouble et prolonge les trois céviennes, Ce qui nous donne un nouveau triangle  $DEF$  pavé par 16 copies du triangle  $IJK$ .

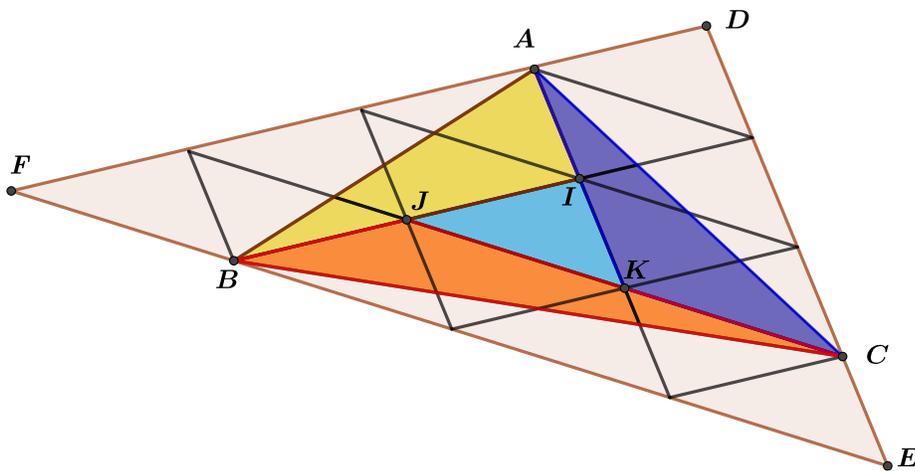


FIGURE 7. Le carrelage de Mikuzinski.

Alors, les trois cotés  $AB$ ,  $BC$  et  $CA$  étant les diagonales d'un parallélogramme d'aire  $4\mathcal{A}(BJC)$ , est maintenant clair que  $\mathcal{A}(AIB) = \mathcal{A}(BJC) = \mathcal{A}(CKA) = 2\mathcal{A}(IJK)$  soit  $\mathcal{A}(IJK) = \mathcal{A}(ABC)/7$ . CQFD. ■

3.4. **D'autres solutions :** Il n'en manque pas! Par exemple Hugo Steinhaus, ([9] page 20) dans le même esprit que le carrelage de Mikuzinski ou encore Kline et Velleman [5]. Nous nous sommes contentés de celles qui étaient originales (voire inédites) et s'appuyant sur différents aspects de la géométrie.

#### 4. CAS GÉNÉRAL : LE THÉORÈME DE ROUTH.

Comme on peut le soupçonner, cet exercice est le cas particulier d'une situation plus générale, c'est l'objet du théorème de Routh [8].

**Théorème 1.** (Routh, 1891).

Dans un triangle  $ABC$  trois points  $D, E, F$  sont choisis sur les cotés  $BC, CA, AB$  respectivement. Les droites  $AD, BE$  et  $CF$  forment un nouveau triangle  $PQR$  dans  $ABC$  comme sur la figure :

Alors si on pose

$$x = \frac{BD}{DC}, \quad y = \frac{CE}{EA}, \quad z = \frac{AF}{FB}$$

A TREATISE ON  
ANALYTICAL STATICS

WITH NUMEROUS EXAMPLES

BY

EDWARD JOHN ROUTH, Sc.D., LL.D., M.A., F.R.S., &c.,

HON. FELLOW OF PETERHOUSE, CAMBRIDGE;  
FELLOW OF THE UNIVERSITY OF LONDON.

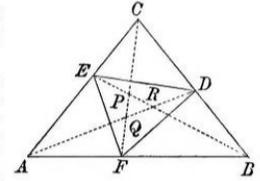
VOLUME I.

\* Let  $D, E, F$  be three arbitrary points taken on the sides of a triangle  $ABC$ . If  $\Delta, \Delta'$  be the areas of the triangles  $ABC, DEF$ , it may be shown that

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{AF \cdot BD \cdot CE + AE \cdot CD \cdot BF}{abc}$$

To form the two products  $AF \cdot BD \cdot CE$  and  $AE \cdot CD \cdot BF$ , we start from any corner, say  $A$ , and travel round the triangle, first one way and then the other, taking on each circuit one length from each side. The sum of the two products so formed, each with its proper sign, is the expression in the numerator.

The signs of these factors may be determined by the following rule. Each length, being drawn from one of the corners of the triangle  $ABC$ , along one of the sides, is to be regarded as positive or negative according as it is drawn towards or from the other corner in that side. Thus,  $AF$  being drawn from  $A$  towards  $B$  is therefore positive,  $BF$  being drawn from  $B$  towards  $A$  is also positive. If  $F$  were taken on  $AB$  produced beyond  $B$ ,  $AF$  would still be positive, but  $BF$  would be negative.



If  $F$  move along the side  $AB$ , in the direction  $AB$ , the area  $DEF$  vanishes when  $F$  reaches the transversal  $ED$ , and becomes negative when  $F$  passes to the other side of it.

In the same way, if we draw any three straight lines through the corners of the triangle, say  $AD, BE, CF$ , they will enclose an area  $PQR$ . If the area of the triangle  $PQR$  is  $\Delta''$ , it may be shown that

$$\frac{\Delta''}{\Delta} = \frac{(AF \cdot BD \cdot CE - AE \cdot CD \cdot BF)^2}{(ab - CE \cdot CD)(bc - AE \cdot AF)(ca - BF \cdot BD)}$$

The author has not met with these expressions for the area of two triangles which often occur. He has therefore placed them here in order that the argument in the text may be more easily understood.

FIGURE 8. La couverture du livre de Routh et la page 102 qui nous intéresse.

on a

$$\mathcal{A}(PQR) = \frac{(xyz - 1)^2}{(xy + x + 1)(yz + y + 1)(zx + z + 1)} \mathcal{A}(ABC).$$

**Démonstration :** Comme on l'a déjà observé au paragraphe 2, il suffit de traiter le cas où le triangle  $ABC$  est équilatéral ou rectangle, ce qui ne pose pas de réelles difficultés mais manque d'originalité. Il est plus intéressant de proposer une autre approche ; par exemple celle de Klamkin et Liu, [4].

- Oublions un instant la céviene  $CC'$  et traçons le segment  $CI$ .

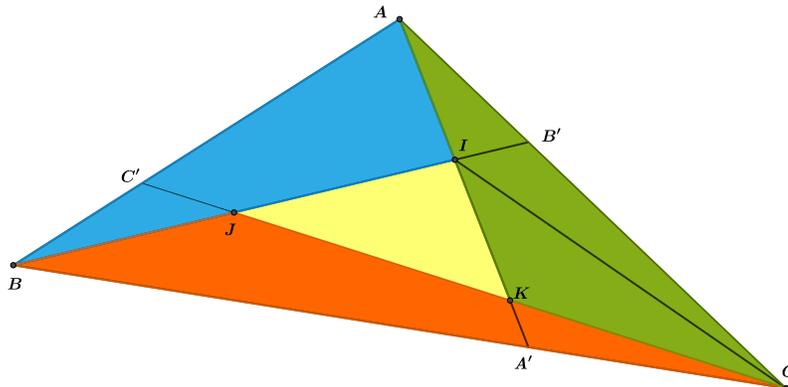


FIGURE 9.  $\mathcal{A}(ABI) = \frac{x}{1+x+xy} \mathcal{A}(ABC)$ .

Comme  $xA'C = BA'$ ,  $yB'A = CB'$  et  $zC'B = AC'$ , la formule classique « la base fois la hauteur sur 2 » pour l'aire d'un triangle appliquée à tour de bras nous donne

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABI) &= \mathcal{A}(ABA') - \mathcal{A}(BIA') = x(\mathcal{A}(AA'C) - \mathcal{A}(CIA')) \\ &= x\mathcal{A}(AIC) = x(\mathcal{A}(AIB') + \mathcal{A}(CB'I)) \\ &= x(\mathcal{A}(AIB') + y\mathcal{A}(AIB')) = x(1+y)\mathcal{A}(AIB').\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABC) &= (1+y)\mathcal{A}(BB'A) = (1+y)(\mathcal{A}(ABI) + \mathcal{A}(AIB')) \\ &= (1+y)\left(\mathcal{A}(ABI) + \frac{\mathcal{A}(ABI)}{x(1+y)}\right) \\ &= \frac{xy+y+1}{x}\mathcal{A}(ABI),\end{aligned}$$

et finalement

$$\mathcal{A}(ABI) = \frac{x}{1+x+xy}\mathcal{A}(ABC).$$

Par symétrie on a aussi

$$\mathcal{A}(BJC) = \frac{y}{1+z+yz}\mathcal{A}(ABC) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(CKA) = \frac{z}{1+x+xz}\mathcal{A}(ABC).$$

Si bien que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(IJK) &= \mathcal{A}(ABC) - \mathcal{A}(ABI) - \mathcal{A}(BJC) - \mathcal{A}(CKA) \\ &= \left(1 - \frac{x}{1+x+xy} - \frac{y}{1+z+yz} - \frac{z}{1+x+xz}\right)\mathcal{A}(ABC) \\ &= \frac{(xyz-1)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}\mathcal{A}(ABC).\end{aligned}$$

CQFD ■

### Remarques :

- On trouve déjà le théorème de Routh dans l'exercice 474-3 du bulletin de l'APMEP (Vol. 474 (2008) pages 390-391).
- On retrouve bien entendu le cas du triangle de Feynman lorsque  $x = y = z = 2$  car

$$\frac{(xyz-1)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)} = \frac{7^2}{7^3} = \frac{1}{7}.$$

- On a aussi l'aire du triangle  $efd$  :

$$\mathcal{A}(efd) = \frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\mathcal{A}(ABC).$$

- Plus intéressant : on en déduit les théorème de Ceva et Menelaus.

Supposons par exemple que trois céviennes issues des sommets  $A, B, C$  rencontrent les cotés opposés en  $D, E, F$ . En posant comme plus haut :  $x = \frac{BD}{DC}$ ,  $y = \frac{CE}{EA}$ ,  $z = \frac{AF}{FB}$ , les céviennes seront concourantes si et seulement si  $\mathcal{A}(PQR) = 0$  soit encore, vu le théorème de Routh, si et seulement si  $\frac{(xyz-1)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)} = 0$  qui équivaut à  $xyz = 1$ . Écrit autrement

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

• Lorsque  $x = y = z = n \in \mathbb{N}$  on a

$$\mathcal{A}(GHI) = \frac{(n^3 - 1)^2}{(n^2 + n + 1)^3} \mathcal{A}(ABC) = \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + n + 1} \mathcal{A}(ABC).$$

La suite  $(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n+1})_n$  est référencée sous OEIS A046162 et A046163 par la « On-line encyclopedia of integer sequences ».

## 5. GÉNÉRALISATIONS ET VARIANTES

5.1. **On rajoute des céviennes :** Dans [6], Morgan propose la construction géométrique suivante : on trace les trisectrices d'un triangle  $ABC$  et on considère l'hexagone  $\mathcal{H}_3$  dont les sommets sont les points d'intersection de chaque trisectrice avec celles issues des sommets opposés. Alors

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}_3) = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{10}.$$

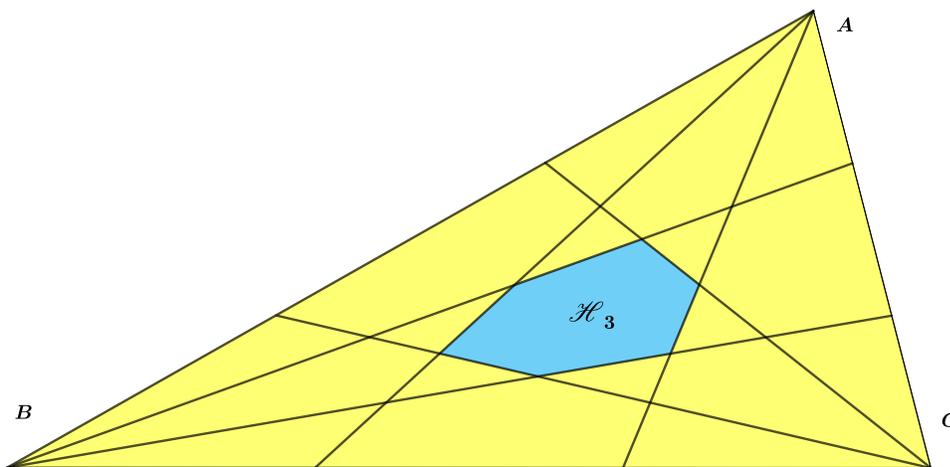


FIGURE 10. La construction pour  $n = 3$ , l'aire de de  $\mathcal{H}_3$  vaut  $\mathcal{A}(ABC)/10$ .

Plus généralement, si on découpe chaque face du triangle  $ABC$  en  $n$  intervalles de même longueur,  $n$  étant un **entier impair**, alors l'aire du hexagone  $\mathcal{H}_n$  déduit comme pour  $n = 3$  vérifie :

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}_n) = \frac{8\mathcal{A}(ABC)}{(3n - 1)(3n + 1)}.$$

L'idée de la démonstration est la suivante pour tout entier impair  $n \geq 3$ , on rajoute les trois médianes ce qui nous donne une partition de l'hexagone (défini par les  $n$ -ième et  $n + 1$ -èmes céviennes issues de chaque sommet)  $\mathcal{H}_n$  en six triangles qui ont en fait même aire, et bien entendu pour le vérifier on utilise le théorème de Routh. Ainsi, si on pose

$$x = \frac{BD}{DC} = 1, \quad y = \frac{CE}{EA} = 1, \quad z = \frac{AF}{FB} = \frac{n - 1}{n + 1}$$

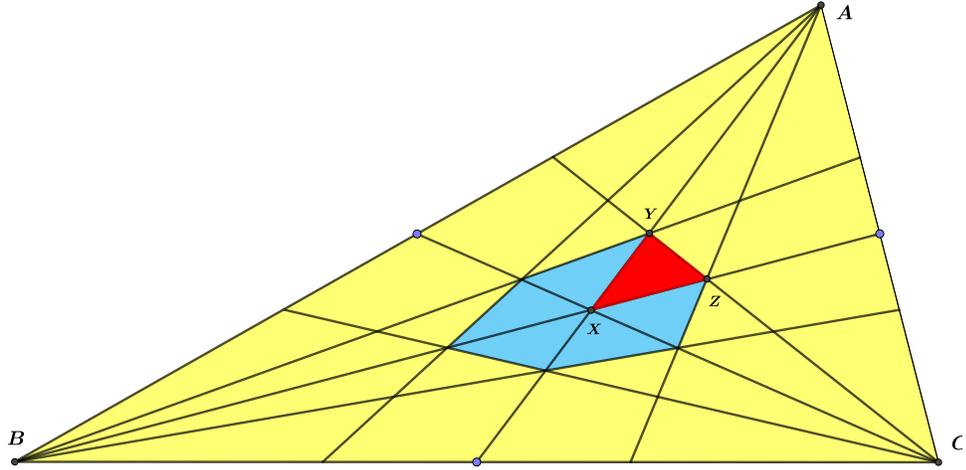


FIGURE 11. L'aire du triangle rouge vaut  $\frac{\mathcal{A}(ABC)}{60}$ .

si bien que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(XYZ) &= \frac{(xyz - 1)^2}{(xy + x + 1)(yz + y + 1)(zx + z + 1)} \mathcal{A}(ABC) \\ &= \frac{4}{3(3n + 1)(3n - 1)} \mathcal{A}(ABC).\end{aligned}$$

Cet argument donnera le même résultat pour chacun des six triangles : ils ont donc bien la même aire. Par conséquent :

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}_n) = 6\mathcal{A}(XYZ) = \frac{8\mathcal{A}(ABC)}{(3n - 1)(3n + 1)}.$$

CQFD. ■

**Remerciements :** Nous remercions Pierre-Jean Laurent (Grenoble) et Beñat Mirabel (Biarritz) pour les échanges fructueux sur le sujet, lesquels ont laissé des traces dans la présente note.

#### RÉFÉRENCES

- [1] Abboud E., « *Routh's Theorem, Morgan's Story, and New Patterns of Area Ratios* », Mathematics Magazine, Vol. 95-4, pp. 294-301,(2022).
- [2] Árpád Bényi & Branko Ćurgus, « *A Generalization of Routh's Triangle Theorem* », The American Mathematical Monthly, 120-9, 841-846,(2013).
- [3] Cook, R.J. & Wood, G.V., , « *Feynman's Triangle* », The Mathematical Gazette, Vol. 88, pp. 299-302, (2004).
- [4] Klamkin M.S. & Liu A., « *Three more proofs of Routh's theorem* », Crux Mathematicorum, Vol. 7-7, pp. 199-202 (1981).
- [5] Kline J.S. & Velleman, D., « *Yet another proof of Routh's theorem* », Crux Mathematicorum, Vol. 21-1, pp. 37-40 (1995).
- [6] Morgan R. « *No Restriction Needed* », The Mathematics Teacher, Vol. 21, pp. 37-40, (1994).
- [7] Niven, I., « *A new proof of Routh's theorem* », Mathematics Magazine, Vol. 49,-1, pp. 25-27, (1976).
- [8] Routh, E. J., « *A Treatise on Analytical Statics with numerous examples* », Volume 1, University Press, Cambridge, (1891).

---

[9] Steinhaus H. « *Mathematical Snapshots* », New York : Oxford University Press (1960).

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty (alias JBHU) est professeur émérite à l'Université Paul Sabatier de Toulouse. Son domaine de recherche est l'optimisation. Il a aussi publié de nombreux ouvrages mathématiques (de recherche ou pour l'enseignement). Il est également impliqué dans la diffusion des sciences et des mathématiques en particulier au travers de l'association Fermat Science.

jbhu@math.univ-toulouse.fr

Patrice Lassère est professeur agrégé (PRAG) à l'Université Paul Sabatier de Toulouse. Son domaine de recherche est l'analyse complexe.

patrice.lassere@math.univ-toulouse.fr