UNIVERSITÉ PARIS 6 — PIERRE et MARIE CURIE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité Mathématiques

Présentée par **Mlle Charlotte Hardouin**

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 6

Structure galoisienne des extensions itérées de modules différentiels

Soutenue le 13 décembre 2005

Jury :

M. Daniel Bertrand (Université Paris VI)	Directeur
M. Gilles Christol (Université Paris VI)	
Mme Anne Duval (Université Lille I)	
Mme Claude Mitschi (Université Strasbourg I)	
M. Jean-Pierre Ramis (Université Toulouse III)	Rapporteur
M. Michael F. Singer (NCSU Raleigh)	Rapporteur

UNIVERSITÉ PARIS 6 — PIERRE et MARIE CURIE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité Mathématiques

Présentée par **Mlle Charlotte Hardouin**

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 6

Structure galoisienne des extensions itérées de modules différentiels

Soutenue le 13 décembre 2005

Jury :

M. Daniel Bertrand (Université Paris VI)	Directeur
M. Gilles Christol (Université Paris VI)	
Mme Anne Duval (Université Lille I)	
Mme Claude Mitschi (Université Strasbourg I)	
M. Jean-Pierre Ramis (Université Toulouse III)	Rapporteur
M. Michael F. Singer (NCSU Raleigh)	Rapporteur

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce travail a pour objet l'étude de certains types d'extensions dans des catégories tannakiennes, leurs applications aux modules différentiels et aux différences, et plus particulièrement le calcul de leurs groupes de Galois.

Une description complète du groupe de Galois a été obtenue par E. Compoint et M. Singer dans le cas d'un opérateur complètement réductible([**14**]). On peut par conséquent décrire le quotient réductif maximal de tout groupe de Galois différentiel. Il reste à en calculer le radical unipotent.
E. Hrushovski donne dans [**22**] un algorithme de calcul du groupe de Galois d'une équation différentielle linéaire $Ly = 0$ dans le cas général. Cependant, cette description ne fournit pas de lien direct entre le groupe de Galois et la structure du module différentiel de L.
Dans le cas où L est le produit de deux opérateurs complètement réductibles, une réponse complète à cette question est fournie par le théorème de P. H. Berman et M. Singer [**4**], qui décrit le radical unipotent du groupe de Galois de L sous la forme d'un groupe vectoriel, espace des solutions d'un sous-opérateur différentiel explicite de l'opérateur homomorphisme entre les deux facteurs.
Le cas d'un produit de *trois* opérateurs complètement réductibles ne connaît jusqu'à présent que des réponses partielles (K. Boussel [**13**] dans le cas hypergéométrique, et D. Bertrand [**8**] pour certains opérateurs irréductibles). C'est cette étude que nous poursuivons ici.
Nous montrons en particulier :

1. Comment, de manière effective, ramener le problème au cas d'un radical unipotent abélien.
2. Comment, une fois ce cas atteint, ramener le calcul à celui du produit de deux opérateurs complètementréductibles.
   Les résultats précédents s'étendent au cadre des équations aux différences. A titre d'illustration, nous montrons enfin

3. Comment réaliser la seconde étape de façon effective dans une situation élémentaire liée à l'étude des corps aux différences différentiels.

Nous décrivons maintenant plus en détail le contenu de la thèse.

Première partie

La première partie est consacrée au 1-extensions (qu'on appellera aussi extensions *simples*) d'objets tannakiens.

Soit ainsi $\mathbf{T}$ une catégorie tannakienne neutre sur un corps C algébriquement clos, de caractéristique nulle, dont on note $\mathbf{1}$ l'objet unité et ω un foncteur fibre à valeurs dans $Vect_C$. On donne ici une description concrète de l' isomorphisme naturel $\mathfrak{R}$ qui relie les groupes $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ et $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$. Cet isomorphisme permet de simplifier la présentation (et les démonstrations) de nombreux énoncés.

On obtient ainsi la version tannakienne suivante du théorème de Berman-Singer ([**4**]), où l'on appelle *groupe de Galois* d'un objet $\mathcal{M}$ de $\mathbf{T}$, noté $G_{\mathcal{M}}$, le groupe algébrique $Aut^{\otimes}_{\omega}(<\mathcal{M}>)$ (où $<\mathcal{M}>$ désigne la catégorie tannakienne engendrée par $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{T}$). :

Théorème 1 [Théorème 2.2.5] Soient $(\mathbf{T},\omega)$ une catégorie tannakienne, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux objets semi-simples de $\mathbf{T}$ et $\mathcal{U}$ une extension dans $\mathbf{T}$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$. Alors $G_{\mathcal{U}}$ est égal au produit semi-direct du groupe réductif $G_{\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}}$ par un groupe vectoriel $\omega(\mathcal{V})$, où $\mathcal{V}$ est le plus petit sous-objet de $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ tel que le quotient par $\mathcal{V}$ de l'élément $\mathfrak{R}(U)$ de $Ext^1(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$ soit une extension scindée.

On en déduit le corollaire suivant, dont le principe sera repris à la partie IV :

Théorème 2 [Theorème 2.2.14] Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux objets semi-simples de $\mathbf{T}$, Δ l'anneau $End(\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$, $\mathcal{E}_1,..,\mathcal{E}_n$, des extensions de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ et telles que $\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1),..,\mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)$ soient Δ-linéairement indépendantes dans $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$. Alors le radical unipotent de $G_{\mathcal{E}_1 \oplus .. \oplus \mathcal{E}_n}$ est isomorphe à $(Hom(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y})))^n$.

Deuxième partie

La seconde partie est consacrée aux extensions panachées.
Cette notion, introduite par Grothendieck [**20**] est bien adaptée à l'étude des produits de trois opérateurs différentiels. La structure de torseur qu'elle sous-tend permet en effet d'isoler la partie *nouvelle* du radical unipotent, qui n'est ici, en général, plus abélien.

Pour tout élément $\mathcal{M}$ de l'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$ des extensions panachées construites sur trois objets initiaux $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{Y}$ et pour toute extension simple $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$, on note $\mathcal{M} * \mathcal{U}$ l'élément de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$, que cette structure de torseur permet de définir.
On définit par ailleurs un ensemble d'opérations élémentaires sur les extensions panachées, qui interviennent dans la preuve du théorème 6.0.1.
Enfin, en préparatif aux applications de la troisième partie, on traduit ces opérations en termes de *représentations matricielles* de modules différentiels.

Troisième partie

Soient (K, ∂) un corps différentiel de corps des constantes algébriquement clos, de caractéristique nulle, $\tilde{K}$ une extension de Picard-vessiot universelle de K, et $\mathcal{D}_K := K[\partial]$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans K.
Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_K$-module. On note M son espace vectoriel de solutions dans $\tilde{K}$, $K_M = K_{\mathcal{M}}$ l'extension de Picard-Vessiot de $\mathcal{M}$ dans $\tilde{K}$ et $G_M = \mathrm{Gal(K_M|K)}$ le groupe de Galois différentiel de l'extension K_M/K, qu'on appellera de nouveau groupe de Galois de $\mathcal{M}$.
La troisième partie est consacrée au calcul du radical unipotent $R_u(G_M)$ de G_M lorsque $\mathcal{M}$ correspond au produit de trois opérateurs complètement réductibles.
Dans ce cas le groupe dérivé $D(R_u(G_M))$ de $R_u(G_M)$ est entièrement cerné par l'étude des 1-extensions. Reste à décrire l'abélianisé de $R_u(G_M)$.

On obtient ainsi :

Théorème 3 [**Théorème** 6.0.1] Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$, et $\mathcal{Y}$ des $\mathcal{D}_K$-modules semi-simples, $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{M}_2$) une extension simple de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{X}$) par $\mathcal{Y}$ (resp. $\mathcal{A}$) et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_K$-module dans $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$, extension panachée de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{M}_1$.

i) Il existe une extension panachée $\overline{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{1} \oplus \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{A}), \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{A}), \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$, telle que $\overline{\mathcal{M}} \in < \mathcal{M} >$, $\mathrm{Gal(K_M|K_{\overline{M}}) = D(R_u(G_M))}$ et $R_u(G_M)^{ab} = R_u(G_{\overline{M}})$ (en particulier $R_u(G_{\overline{M}})$ est abélien).

ii) Si le radical unipotent du groupe de Galois G_M est abélien, il existe un $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{Z}$, extension simple de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$, tel que $\mathrm{Gal(K_M|K_{M_1}.K_{M_2}) = R_u(G_Z)}$ et $K_{\mathcal{M} * \mathcal{Z}} = K_{M_1} K_{M_2}$.

La preuve de *ii*) fait appel à la fois aux méthodes directes de calcul d'un groupe mais aussi à des techniques utilisées lors de la résolution du problème inverse principalement la descente galoisienne d'opérateurs. Elle n'est malheureusement pas totalement effective. En revanche la construction de $\overline{\mathcal{M}}$ au *i*) est entièrement effective.

Quatrième partie

Dans la dernière partie de la thèse, on applique ces différentes méthodes au cadre des modules aux différences. La remarque de base qui sous-tend cette application est la suivante .

Soit (K, σ, ∂) un corps aux différences et différentiel, c'est à dire un corps K (ici encore de caractéristique nulle), muni d'une dérivation ∂ et d'un automorphisme σ tels que $\sigma \circ \partial = \partial \circ \sigma$. On note C_σ le corps des constantes (c'est à dire des invariants de σ) et C_∂ le corps des constantes de ∂ que l'on suppose algébriquement clos et inclus dans C_σ, lui-même algébriquement clos.

Soit par ailleurs $\mathcal{A}$ un module aux différences (dont une représentation matricielle est donnée par $A \in Gl_n(K)$) et Y une solution du système aux différences $\sigma Y = AY$ dans une extension différentielle aux différences de K. Alors $\begin{pmatrix} \partial Y \\ Y \end{pmatrix}$ est une solution du système $\sigma \begin{pmatrix} \partial Y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \partial A \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial Y \\ Y \end{pmatrix}$, que l'on peut interpréter comme une extension de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}$. Il est donc justifiable des résultats de la première partie de la thèse appliquée

au cas des catégories de modules aux différences. On peut ainsi fournir une description explicite du groupe de Galois aux différences (pris au sens de [**38**]) de ce système.
De même, la considération des dérivées secondes conduit au système aux différences

$$\sigma \begin{pmatrix} \partial^2 Y \\ \partial Y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 2\partial A & \partial^2 A \\ 0 & A & \partial A \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^2 Y \\ \partial Y \\ Y \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire à la représentation matricielle d'une extension panachée $\mathcal{M}$ dans la catégorie des modules aux différences sur les objets initiaux $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$.
En particulier, dans le cas où $\mathcal{A}$ est de rang 1, le radical unipotent $R_u(G_M)$ du groupe de Galois aux σ-différences G_M de $\mathcal{M}$, est abélien. Nous montrons que l'analyse de la partie III peut ici être rendu totalement effective.
On obtient ainsi pour ce type d'extensions panachées :

Théorème 4 [Théorème 11.4.1] Soit (K, σ) un corps aux différences, de corps des constantes C_σ algébriquement clos de caractéristique nulle.

Soient $a \in K^*$, $b,\ c \in K$, $\lambda \in C_\sigma$ et $\mathcal{M}$ une extension panachée de σ-différences dont une représentation matricielle est donnée par la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} a & \lambda b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

On suppose qu'il n'existe pas d'élément $g \in K$ tel que : $b = \sigma(g)a - ag$. Alors

1. Le radical unipotent du groupe de Galois aux σ-différences $G_{\mathcal{M}}$ est isomorphe à ${\mathbb{G}_a}^2$ si $\lambda(b/a)^2 - 2c/a$ et b/a sont linéairement indépendants sur C_σ modulo $(\sigma - 1)(K)$.
2. Dans le cas contraire, ce radical unipotent est isomorphe à $\mathbb{G}_a$.

Concluons par une application des théorèmes précédents.

Soient q un nombre complexe de module différent de 1, $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$, $\partial := zd/dz$ la dérivation dans $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$, σ_q l'automorphisme de $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ qui à $f(z)$ associe $f(qz)$, C_E (corps des fonctions q-elliptiques) le corps des constantes de $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ pour σ_q, et $K_E = C_E(z)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans C_E.

On propose ici une méthode purement algébrique pour étudier la transcendance ou l'hypertranscendance des solutions dans $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ d'une équation aux q-différences de rang 1. En ce sens nos résultats diffèrent de ceux énoncés dans [**23**] par Ishizaki, qui

d'une part utilise essentiellement des méthodes analytiques et d'autre part considère seulement des solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ (voir aussi [**30**]).
On attache au module différentiel $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{C}(z)$, une matrice fondamentale de solutions dans $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ dont les composantes engendrent sur K_E une extension aux q-différences F_E.

L'ensemble des σ-automorphismes de F_E/K_E est un groupe algébrique linéaire sur C_E, noté $G_{\mathcal{M}}^E$. Nous aurons à le comparer au groupe de Galois $G_{\mathcal{M}}$ (pris au sens de [**38**]), et ferons pour cela l'hypothèse suivante :
Hypothèse $(H)^{(1)}$ *: les composantes neutres des groupes* $G_{\mathcal{M}}^E$ *et* $G_{\mathcal{M}} \otimes C_E$ *sont isomorphes sur* $\overline{C_E}$

Théorème 5[Théorèmes 11.6.1 et 11.6.2] Sous l'hypothèse (H)

Soient a dans $\mathbb{C}(z)^*$ et f une solution méromorphe sur $\mathbb{C}^*$ de l'équation aux q-différences $\sigma_q(f) = af$. Alors :
1. f est algébrique sur $C_E(z)$ si et seulement si a est de la forme $\mu\sigma_q(g)/g$ avec $g \in \mathbb{C}(z)$ où $\mu \in \mathbb{C}$ et q sont multiplicativement dépendants.
2. f et ∂f sont algébriquement dépendantes sur $C_E(z)$ si et seulement si a est de la forme $\mu\sigma_q(g)/g$, $\mu \in \mathbb{C}$ et $g \in \mathbb{C}(z)$.
3. f, ∂f et $\partial^2 f$ sont algébriquement dépendantes sur $C_E(z)$ si et seulement si a est de la forme $\mu z^r \sigma_q(g)/g$, $\mu \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{Z}$ et $g \in \mathbb{C}(z)$.
4. Dans les autres cas, f est hypertranscendante sur $C_E(z)$.

Combiné avec l'équation différentielle de la fonction $\wp$, cet énoncé, qu'on peut d'ailleurs retrouver à partir du théorème d'Ishizaki, recouvre en les étendant des résultats d'indépendance algébrique classiques sur les fonctions de Weierstrass.

(1) Cette hypothèse est en fait toujours vérifiée voir M.F.Singer lettre à l'auteur 23 Decembre 2005

PARTIE I

EXTENSIONS SIMPLES DANS UNE CATÉGORIE TANNAKIENNE

CHAPITRE 1

EXTENSIONS ET COCYCLES

1.1. DEFINITIONS ET ENONCES

Soient C un corps commutatif de caractéristique nulle, algébriquement clos, une catégorie tannakienne neutre sur C, $\mathbf{1}$ l'objet neutre , un foncteur fibre de $\mathbf{T}$ dans la catégorie $Vect_C$ des espaces vectoriels de dimension finie.
On note $\mathcal{G}$ le groupe proalgébrique sur C, représentant le foncteur ainsi que la catégorie des représentations de $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\omega)$ portées par des C-espaces vectoriels de dimension finie sur C.

Théorème 1.1.1. **[17]** *Le foncteur fibre ω induit une équivalence de catégorie entre $\mathbf{T}$ et $Rep_{\mathcal{G}}$.*

Pour tout couple $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (resp.(X, Y)) d'objets de $\mathbf{T}$ (resp. de $Rep_{\mathcal{G}}$), notons (resp.) le groupe des classes d'isomorphismes d'extensions de $\mathcal{X}$ (resp. X) par $\mathcal{Y}$ (resp. Y). Ces groupes sont naturellement munis d'une action de C, qui en fait des C-espaces vectoriels. Plus généralement, ces groupes sont naturellement munis d'une structure de module sur $End(\mathcal{X})\otimes_C End(\mathcal{Y})$ (respectivement sur $(End(X))^{\mathcal{G}}\otimes_C(End(Y))^{\mathcal{G}}$).

On déduit du théorème 1.1.1 :

Corollaire 1.1.2. *Pour tout couple $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ d'objets de $\mathbf{T}$, il existe un isomorphisme canonique entre $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ et $Ext^1_{Rep_{\mathcal{G}}}(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y}))$.*

Définition Si $\mathcal{G}$ est un groupe proalgébrique sur C, V un élément de $Rep_{\mathcal{G}}$, et f un C-morphisme de $\mathcal{G}$ dans V : on dit que f est un *cocycle* s'il vérifie la relation de suivante $f(g_1g_2) = g_1f(g_2) + f(g_1)$ pour tout (g_1, g_2) dans $\mathcal{G}$, et que f est un *cobord* s'il est de la forme $f(g) = gv - v$ pour un certain élément v de V. On note $H^1(\mathcal{G}, V)$ l'ensemble des cocycles quotienté par celui des cobords. Cet ensemble est muni d'une structure de groupe et même de C-espace vectoriel et plus généralement de module sur $End(V)^{\mathcal{G}}$.

Théorème 1.1.3. *Pour tout couple* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *d'objets de* $\mathbf{T}$, *les* C*-espaces vectoriels* $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *et* $H^1(\mathcal{G}, Hom(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y})))$ *sont canoniquement isomorphes.*

1.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1.3

On démontre d'abord qu'il existe pour A et B objets de $Rep_{\mathcal{G}}$, un isomorphisme entre $Ext^1_{Rep_{\mathcal{G}}}(A, B)$ et $H^1(\mathcal{G}, Hom(A, B))$ et on déduit de ce fait et du corollaire 1.1.2 la preuve du théorème 1.1.3

Considérons une extension de $\mathcal{G}$-modules de A par B

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & U \arrow[r, shift left] & A \arrow[l, dashed, shift left, "s"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Choisissons une section s, C-linéaire de A dans U. Le caractère trivial des extensions dans $Vect_C$ assure l'existence de telles sections.

Considérons le C-morphisme ζ_U de $\mathcal{G}$ dans $Hom(A, B)$ défini par $\sigma \to \sigma \circ s\sigma^{-1} - s$. On vérifie aisément que cette application est un *cocycle* et qu'un changement de section la modifie par un *cobord* (ce qui démontre aussi qu'elle ne dépend pas de la classe de U dans $Ext^1_{Rep_{\mathcal{G}}}(A, B)$)

On construit une application :

$$\Sigma : \qquad Ext^1_{Rep_{\mathcal{G}}}(A, B) \longrightarrow H^1(\mathcal{G}, Hom(A, B))$$

$$U \longmapsto \zeta_U.$$

Réciproquement, étant donné un cocycle ζ, à valeurs dans $Hom(A, B)$, on construit une extension de $\mathcal{G}$-modules correspondant à ce cocycle via ζ.

On munit le produit direct de B et de A de la structure de $\mathcal{G}$-module suivante :

$$\forall \sigma \in \mathcal{G}, \sigma(b, a) := (\sigma b + \zeta(\sigma)(\sigma a), \sigma a)).$$

On note : $U(\zeta) = B \times A$, le produit direct muni de la structure de $\mathcal{G}$-module précédente.

Alors

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow U(\zeta) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$x \longmapsto (b,0)$$

$$(b,a) \longmapsto a$$

fait de $U(\zeta)$ une extension de $\mathcal{G}$-modules pour laquelle on vérifie que $\zeta_U = \zeta$.

Lemme 1.2.1. *La classe de l'extension $U(\zeta)$ dans $Ext^1(A,B)$ ne dépend pas de celle de ζ dans $H^1(\mathcal{G}, Hom(A,B))$.*

Démonstration. — Si ζ_1 est un cocyle équivalent à ζ, il existe $\phi \in Hom(A,B)$ tel que pour tout $\sigma \in \mathcal{G}$, on ait $\zeta_1(\sigma) = \zeta(\sigma) + \sigma\phi\sigma^{-1} - \phi$.
Considérons l'application ψ de $U(\zeta)$ dans $U(\zeta_1)$, tel que $\psi(b,a) = (b - \phi(a), a)$ pour tout $(b,a) \in U(\zeta)$. Montrons que ψ est un $\mathcal{G}$-isomorphisme

1. L'application ψ est un $\mathcal{G}$-morphisme. En effet :

$$\psi(\sigma(b,a)) = (\psi(\sigma(b)) + \zeta(\sigma)(\sigma a), \sigma(a)) = (\sigma(b) - \phi(\sigma(a)) + \zeta(\sigma)(\sigma a), \sigma(a))$$

et

$$\sigma(\psi(b,a)) = \sigma(b-\phi(a),a) = (\sigma(b)-\sigma\phi(a)+\zeta_1(\sigma)(\sigma a), \sigma a) = (\sigma(b)-\phi(\sigma(a))+\zeta(\sigma)(\sigma a), \sigma(a))$$

en effet $-\sigma\phi(a) + \zeta_1(\sigma)(\sigma a) = \zeta(\sigma)(\sigma a) - \phi(\sigma a)$.
2. L'application ψ est injective. En effet si $(b - \phi(a), a) = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$.

3. L'application ψ est surjective. En effet $(b + \phi(a), a)$ est un antécédent de (b,a).

On a donc construit une application :

$$E: \qquad H^1(\mathcal{G}, Hom(A,B)) \longrightarrow Ext^1_{Rep\mathcal{G}}(A,B)$$

$$\zeta \longmapsto U(\zeta).$$

□

Proposition 1.2.2. *Les applications Σ et E sont inverses l'une de l'autre.*

Soient $U \in Ext(A,B)$ et $\zeta \in H^1(\mathcal{G}, Hom(A,B))$.
Montrons que $E \circ \Sigma(U) = U$.

Soit s une section continue de U.

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} U \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} A \longrightarrow 0$$

Le cocycle $\zeta_U(\sigma)$ est égal à $\sigma \to \sigma \circ s\sigma^{-1} - s$, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}$.
Donc $E \circ \Sigma(U) := B \times A$ muni de la structure de $\mathcal{G}$-module suivante :

$$\forall \sigma \in \mathcal{G}, \sigma(b,a) := (\sigma b + \zeta_U(\sigma)(\sigma a), \sigma a)).$$

Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \phi : \quad E \circ \Sigma(U) &\longrightarrow U \\ (b,a) &\longmapsto i(b) + s(a). \end{aligned}$$

Lemme 1.2.3. *L'application ϕ est un isomorphisme d'extensions de $\mathcal{G}$-modules de A par B.*

DÉMONSTRATION. — 1. ϕ est un $\mathcal{G}$-morphisme.
En effet, pour tout (b,a) dans $E \circ \Sigma(U)$, on a :

$$\sigma(\phi(b,a)) = i(\sigma b) + \sigma s(a)$$

et

$$\phi(\sigma(a,b)) = \phi(\sigma b + \zeta_U(\sigma)(\sigma a), \sigma a) = i(\sigma b) + \zeta_U(\sigma)(\sigma a) + s(\sigma a) = i(\sigma b) + \sigma s(a).$$

2. L'application ϕ est injective. En effet, $\phi(b,a) = 0$ signifie $i(b) = -s(a)$, soit $0 = -\pi \circ s(a) = a$ et donc $b = 0$.
3. ϕ est surjective. Soit u dans U, un antécédent de u par ϕ est donné par $(u - s \circ \pi(u), \pi(u))$.
4. ϕ est un isomorphisme d'extensions. En effet :

$$\phi(b,0) = i(b) \text{ et } \pi \circ \phi(b,a) = \pi(i(b) + s(a)) = a.$$

Ainsi U et $E \circ \Sigma(U)$ définissent le même élément dans $Ext^1(A,B)$.

Montrons que $\Sigma \circ E(\zeta) = \zeta$ dans $H^1(\mathcal{G}, Hom(B,A))$
$E(\zeta)$ est par définition le produit $B \times A$ de la structure de $\mathcal{G}$-module suivante :

$$\forall \sigma \in \mathcal{G}, \sigma(b,a) := (\sigma b + \zeta(\sigma)(\sigma a), \sigma a).$$

Réalisée comme extension de A par B de la manière suivante :

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E(\zeta) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$b \longmapsto (b,0)$$

$$(b,a) \longmapsto a.$$

Une section de A vers $E(\zeta)$ est donnée pour tout a dans A par $s'(a) = (0,a)$. Calculons alors $\Sigma \circ E(\zeta)$. Par définition $\Sigma \circ E(\zeta)(\sigma) = \sigma s'(\sigma^{-1}a) - s'(a) = \zeta(\sigma)(a), a) - (0,a) = (\zeta(\sigma)(a), 0)$ pour tout σ dans $\mathcal{G}$.
On vient donc de démontrer que $\Sigma \circ E(\zeta) = (\zeta)$.

□

Remarque
On fera souvent appel, implicitement, au lemme suivant :

Lemme 1.2.4. *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux objets de $\mathbf{T}$, $\mathcal{H}$ un sous-schéma en groupe ouvert de $\mathcal{G}$, tel que $\mathcal{H} \subset Stab(\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$. Alors*
$G = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ est un groupe algébrique, pour lequel on a la suite de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^1(G, \underline{Hom}(.,.)^{\mathcal{H}}) \longrightarrow H^1(\mathcal{G}, \underline{Hom}(.,.)) \longrightarrow H^1(\mathcal{H}, \underline{Hom}(.,.))^G .$$

En particulier si $\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y}))$ est stable sous $\mathcal{H}$ alors tout élément de $H^1(G, \underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y})))$ définit canoniquement une extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ dans $\mathbf{T}$.

Démonstration. — d'après [**35**] on a la suite de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^1(G, \underline{Hom}(.,.)^{\mathcal{H}}) \longrightarrow H^1(\mathcal{G}, \underline{Hom}(.,.)) \longrightarrow H^1(\mathcal{H}, \underline{Hom}(.,.))^G .$$

Ainsi $H^1(G, \underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y})))$ s'injecte dans $H^1(\mathcal{G}, \underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y})))$ et définit d'après le théorème 1.1.3 une extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ dans $\mathbf{T}$. □

CHAPITRE 2

GROUPE DE GALOIS D'EXTENSIONS SIMPLES

2.1. DE $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ A $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1}, Hom(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$

2.1.1. Les applications $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{I}$. — Dans ce paragraphe $\mathbf{T}$ désigne une catégorie tannakienne neutre sur un corps C algébriquement clos, dont on note $\mathbf{1}$ l'élément unité (voir [**17**]) ou une catégorie de modules de rang fini sur un anneau intégre de caractéristique nulle (voir [**12**]).

Pour alléger les notations, on écrira souvent $Ext(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ au lieu de $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. On note $F_{\mathcal{Z}}$ le foncteur $Hom(\mathcal{Z},.)$ pour un objet $\mathcal{Z}$ de $\mathbf{T}$. Le foncteur dérivé de $F_{\mathcal{Z}}$ est par définition le foncteur $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{Z},.)$. On note $\underline{Hom}(\mathcal{Z},\mathcal{A})$ le Hom interne à la catégorie $\mathbf{T}$. On rappelle (cf [**31**]) que le foncteur $\underline{F_{\mathcal{Z}}} := \underline{Hom}(\mathcal{Z},.)$ est exact, et que pour $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ objets de la catégorie $\mathbf{T}$, il existe un unique morphisme, $ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} : \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\otimes\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tel que pour tout $\mathcal{Z}$ objet de $\mathbf{T}$, l'application de $Hom(\mathcal{Z},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$ dans $Hom(\mathcal{Z}\otimes\mathcal{X},\mathcal{Y})$, qui à f associe $ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(f\otimes id_{\mathcal{X}})$ soit un isomorphisme. Par conséquent, il existe un unique isomorphisme0 de groupes $\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} : Hom(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})) \to Hom(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, qui à f associe $ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(f\otimes id_{\mathcal{X}})$.

Définition de l'application de réduction $\mathfrak{R}$
Considérons un élément de $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ rprésenté par l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{j} \mathcal{U} \xrightarrow{\pi} \mathcal{X} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{U}$ est un objet de $\mathbf{T}$.
Comme le foncteur $\underline{Hom}(\mathcal{X},.)$ est exact, on peut construire la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \longrightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{U}) \longrightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{X}) \longrightarrow 0\ .$$

En considèrant le *pullback* de cette suite exacte par le morphisme $\theta^{-1}_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}(id_{\mathcal{X}})$ de $\mathbf{1}$ dans $Hom(\mathcal{X},\mathcal{X})$, on obtient une extension $\mathfrak{R}(\mathcal{U})$ de $\mathbf{1}$ par $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, que l'on appelle *réduction* de $\mathcal{U}$.

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathcal{U}) = \theta^{-1}_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}(id_{\mathcal{X}})^{*}(\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{U})) \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow 0$$

On montre dans les paragraphes suivants que cette définition ne dépend pas du choix du représentant $\mathcal{U}$.

Définition de l'application d'induction $\mathfrak{I}$

Soit $\mathcal{W}$ un élément de $Ext^1(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$, représenté par :

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \xrightarrow{j} \mathcal{W} \xrightarrow{\pi} \mathbf{1} \longrightarrow 0\ .$$

En appliquant le foncteur exact de tensorisation par $\mathcal{X}$ (cf **[31]**), on obtient :

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \otimes \mathcal{X} \xrightarrow{j\otimes id_{\mathcal{X}}} \mathcal{W} \otimes \mathcal{X} \xrightarrow{\pi\otimes id_{\mathcal{X}}} \mathcal{X} \longrightarrow 0\ .$$

Après avoir effectué le *pushout* de la suite précédente, par l'application $ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ de $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \otimes \mathcal{X}$ à valeurs dans $\mathcal{Y}$, on obtient une extension $\mathfrak{I}(\mathcal{W})$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ que l'on appelle *induction* de $\mathcal{W}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow \mathfrak{I}(\mathcal{W}) = ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})_*}(\mathcal{W} \otimes \mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow 0\ .$$

On montre dans les paragraphes suivants que cette définition ne dépend pas du choix du représentant $\mathcal{W}$.

Théorème 2.1.1. *Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ deux objets de $\mathbf{T}$:*

1. *L'application $\mathfrak{I}$ de $Ext^1(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$ dans $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est un isomorphisme.*
2. *Les applications $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{I}$ sont inverses l'une de l'autre.*

Avant la preuve du théorème 2.1.1, qui fait l'objet du sous-paragraphe 2.1.1, on donne quelques précisions sur $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{I}$.

Remarque :

L'application $\theta_{(\mathcal{X},.)}$ est une équivalence entre les foncteurs $Hom(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},.))$ et $Hom(\mathcal{X},.)$, on obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Hom(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},.)) \arrow[r, "\theta_{(\mathcal{X},.)}"] \arrow[d, dash, "DF_{\mathbf{1}}"] & Hom(\mathcal{X},.) \arrow[d, dash, "DF_{\mathcal{X}}"] \\ Ext^1(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},.) \arrow[r, "\Theta_{\mathcal{X}}"] & Ext^1(\mathcal{X},.). \end{tikzcd}$$

En spécialisant ce dernier en l'objet $\mathcal{Y}$, on obtient un diagramme commutatif d'isomorphisme de groupes :

$$\begin{tikzcd} Hom(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})) \arrow[r, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}"] \arrow[d, dash, "DF_{\mathbf{1}}"] & Hom(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \arrow[d, dash, "DF_{\mathcal{X}}"] \\ Ext^1(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})) \arrow[r, "\Theta_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})"] & Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y}). \end{tikzcd}$$

On montre ici que l'isomorphisme $\mathfrak{R}$ correspond à celui induit par Θ en spécialisant les équivalences de foncteurs.

L'application de réduction $\mathfrak{R}$

Soit $\mathcal{U}$ objet de $\mathbf{T}$ représentant un élément de $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Lemme 2.1.2. *L'extension $\mathfrak{R}(\mathcal{U})$ ne dépend pas à isomorphisme d'extensions prés du représentant $\mathcal{U}$ choisi.*

Démonstration. — Si $\mathcal{V}$ est un objet de $\mathbf{T}$, représentant la même extension que $\mathcal{U}$, il existe, par définition un isomorphisme ϕ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ tel que le diagramme d'extensions suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & \mathcal{U} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "j_1"] & \mathcal{V} \arrow[r, "\pi_1"] & \mathcal{X} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur $\underline{F}_{\mathcal{X}}$ au diagramme précédent on obtient :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \arrow[r, "\underline{F}_{\mathcal{X}}(j)"] \arrow[d, equal] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{U}) \arrow[r, "\underline{F}_{\mathcal{X}}(\pi)"] \arrow[d, "\underline{F}_{\mathcal{X}}(\phi)"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \arrow[r, "\underline{F}_{\mathcal{X}}(j_1)"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{V}) \arrow[r, "\underline{F}_{\mathcal{X}}(\pi_1)"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{X}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Le foncteur $\underline{F}_{\mathcal{X}}$ étant exact, $\psi := \underline{F}_{\mathcal{X}}(\phi)$ est encore un isomorphisme d'extensions. On en déduit que les extensions obtenues par *pullback* via l'application $\theta^{-1}_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}(id_{\mathcal{X}})$ sont encore isomorphes en tant qu'extensions de $\mathbf{1}$ par $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$

□

On a ainsi bien défini une application de $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ à valeur dans $Ext(\mathbf{1}, Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$, appelée *réduction* et notée $\mathfrak{R}$.

L'application d'induction $\mathfrak{I}$

Soit $\mathcal{W}$ un objet de $\mathbf{T}$ représentant un élément de $Ext^1(\mathbf{1}, \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$.

Lemme 2.1.3. *L'extension $\mathfrak{I}(\mathcal{W})$ ne dépend pas à isomorphisme d'extensions près du représentant $\mathcal{W}$ choisi.*

Démonstration. — Pour tout objet $\mathcal{W}_1$ de $\mathbf{T}$, représentant la même extension que $\mathcal{W}$, il existe par définition un isomorphisme ϕ de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}_1$ tel que le diagramme d'extension suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & \mathcal{W} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbf{1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \arrow[r, "j_1"] & \mathcal{W}_1 \arrow[r, "\pi_1"] & \mathbf{1} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

En tensorisant par $\mathcal{X}$, on ne modifie pas les isomorphismes d'extensions et ainsi $\mathcal{W} \otimes \mathcal{X}$ et $\mathcal{W}_1 \otimes \mathcal{X}$ sont encore isomorphes en tant qu'extension de $\mathcal{X}$ par $\underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \otimes \mathcal{X}$. En effectuant le *pushout* de ces deux extensions par l'application $ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$, on aboutit à deux extensions de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ isomorphes. $\square$

On a ainsi bien défini une application de $Ext^1(\mathbf{1}, \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$ dans $Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ appelée *induction*, et notée $\mathfrak{I}$.

2.1.2. Démonstration du théorème 2.1.1. — Décrivons plus particulièrement l'action de $F_{\mathcal{Z}}$:
Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ deux objets de $\mathbf{T}$ et considérons une résolution injective de $\mathcal{X}$ (dans le cadre des catégories tannakiennes ou de R-modules (voir [**12**]), cette résolution peut être choisie de sorte qu'elle soit exacte longue) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{e} \mathcal{I}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

En appliquant le foncteur $F_{\mathcal{Z}}$, on obtient la résolution injective suivante :

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{Z}, \mathcal{X}) \xrightarrow{\epsilon} Hom(\mathcal{Z}, \mathcal{I}_0) \xrightarrow{\delta_0} Hom(\mathcal{Z}, \mathcal{I}_1) \xrightarrow{\delta_1} \cdots .$$

Par définition le foncteur dérivé d'ordre 1 de $F_{\mathcal{Z}}$, noté $R^1F_{\mathcal{Z}}$, est un foncteur de $\mathbf{T}$ dans $\mathcal{A}$ qui à un objet $\mathcal{X}$ associe le groupe $Ker\delta_1/Im(\delta_0)$.
Dans le cadre de notre exemple, on peut remarquer que

$$R^1F_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X}) = \{\phi \in Hom(\mathcal{Z}, \mathcal{I}_1),\ \phi \circ d_1 = 0\} = \{\phi \in Hom(\mathcal{Z}, \mathcal{I}_0/\mathcal{X})\}.$$

On va désormais associer à un élément de $R^1F_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X})$ une extension de $\mathcal{Z}$ par $\mathcal{X}$ dans la catégorie **T**.
Soit $\phi \in Hom(\mathcal{Z},\mathcal{I}_0/\mathcal{X})$. Considérons la suite exacte courte définie par :

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{e} \mathcal{I}_0 \xrightarrow{p} \mathcal{I}_0/\mathcal{X} \longrightarrow 0\ .$$

En effectuant le *pullback* de cette suite par ϕ, on obtient une extension de $\mathcal{Z}$ par $\mathcal{X}$ que l'on notera $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}(\phi)$.

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{e_{\mathcal{Z}}} \mathcal{E}_{\mathcal{Z}}(\phi) \xrightarrow{p_{\mathcal{Z}}} \mathcal{Z}.$$

D'après [**12**] l'application de $R^1F_{\mathcal{Z}}(\mathcal{X})$ dans $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{Z},\mathcal{X})$ qui à ϕ associe la classe d'équivalence de $\mathcal{E}_{\mathcal{Z}}(\phi)$ est un isomorphisme de groupes abéliens. Il en résulte que l'on peut identifier les foncteurs $R^1F_{\mathcal{Z}}$ et $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{Z},.)$.

Réduction des extensions et isomorphisme canonique
On démontre ici la proposition suivante :

Proposition 2.1.4. *Soit $\mathcal{U}$ dans $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$ (respectivement $\mathcal{V}$ dans $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$). On a :*

1. $\mathfrak{R}\circ\mathfrak{I}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

2. $\mathfrak{I}\circ\mathfrak{R}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$.

Soit $\mathbf{1}$ l'objet unité de **T**, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux objets de **T**.
Considérons l'isomorphisme canonique suivant :

$$\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = Hom(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \longrightarrow Hom(\mathbf{1},\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})).$$

Lemme 2.1.5. *Pour tout $\mathcal{Y}$ dans **T**, l'application $\mathfrak{R} : Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to Ext^1(\mathbf{1},Hom(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$ correspond à l'isomorphisme induit par $\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.*

Démonstration. — Considérons une résolution injective de $\mathcal{Y}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{e} \mathcal{I}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

En appliquant le foncteur $F_{\mathcal{X}}$ la résolution injective suivante :

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \xrightarrow{\epsilon} Hom(\mathcal{X},\mathcal{I}_0) \xrightarrow{\delta_0} Hom(\mathcal{X},\mathcal{I}_1) \xrightarrow{\delta_1} \cdots$$

En appliquant l'isomorphisme canonique θ, on obtient une résolution injective de $Hom(1, \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}"] & Hom(\mathcal{X},\mathcal{I}_0) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{I}_0)}"] & Hom(\mathcal{X},\mathcal{I}_1) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{I}_1)}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & Hom(1,\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})) \arrow[r, "\epsilon'"] & Hom(1,\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0)) \arrow[r, "\delta'_0"] & Hom(1,\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_1)) \arrow[r, "\delta'_1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Si ϕ est un élément de $R^1F_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$, c'est-à-dire un élément de $Hom(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y})$. Il lui correspond donc via θ un élément ψ dans $Hom(1,\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y}))$.

Remarque : Le foncteur $\underline{F}_{\mathcal{X}}$ étant exact, il existe un isomorphisme canonique entre $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0)/\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ et $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y})$ et on note encore p la projection de $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0)$ sur $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y})$.
Les morphismes ϕ et ψ donnent naissance à deux extensions $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi)$ respectivement, $\mathcal{E}_1(\psi)$.
On a :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi) = \mathcal{I}_0 \times_{\mathcal{I}_0/\mathcal{Y}} \mathcal{X} \text{ et } \mathcal{E}_1(\psi) = \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0) \times_{\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y})} \mathbf{1}.$$

Montrons que $\Re(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi))$ est isomorphe à $\mathcal{E}_1(\psi)$ en tant qu'extension de $\mathbf{1}$ par $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.
Le foncteur $\underline{F}_{\mathcal{X}}$ étant exact, il commute avec les produits fibrés et préserve les suites exactes :

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \longrightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\psi)) \longrightarrow \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{X}) \longrightarrow 0\,.$$

et on a :

$$\begin{tikzcd}
\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\psi)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{X}) \arrow[d, "\underline{F}_{\mathcal{X}}(\phi)"] \\
\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0) \arrow[r, "p"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y}).
\end{tikzcd}$$

On obtient par *pullback* et par définition de l'opérateur de réduction :

$$\begin{tikzcd}
\Re(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi)) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mu"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi)) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}(id_{\mathcal{X}})"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{X}).
\end{tikzcd}$$

Par définition du produit fibré, $\mathcal{E}_{\mathbf{1}}(\psi)$ s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\mathbf{1}}(\psi) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y})}(\phi)"] \\
\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0) \arrow[r, "p"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y}).
\end{tikzcd}$$

On utilise les propriétés universelles du produit fibré pour démontrer que $\mathfrak{R}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi))$ est isomorphe à $\mathcal{E}_{\mathbf{1}}(\psi)$ en tant qu'extension de $\mathbf{1}$ par $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.
Il s'agit avant tout de remarquer que la composée des applications $\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}(id_{\mathcal{X}})$ de $\mathbf{1}$ dans $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{X})$ et $\underline{F}_{\mathcal{X}}(\phi)$ de $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{X})$ dans $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y})$ n'est autre que l'application $\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y})}(\phi)$.
On peut donc construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{R}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi)) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha\circ\nu"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y})}(\phi)"] \\
\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0) \arrow[r, "p"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y}).
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle du produit fibré, il existe une unique application de $\mathfrak{R}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi))$ dans $\mathcal{E}_{\mathbf{1}}(\phi)$, notée r, telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{R}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi)) \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, "\mu"] \arrow[ddr, "\alpha\circ\nu"'] & & \\
& \mathcal{E}_{\mathbf{1}}(\psi) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y})}(\phi)"] \\
& \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0) \arrow[r, "p"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y}).
\end{tikzcd}$$

Réciproquement, on construit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\mathbf{1}}(\psi) \arrow[r, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}(id_{\mathcal{X}})\circ\gamma"'] \arrow[d, "\delta"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{X}) \arrow[d, "\underline{F}_{\mathcal{X}}(\phi)"] \\
\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0) \arrow[r, "p"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y}).
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle du produit fibré $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\psi))$, il existe une unique application ρ de $\mathcal{E}_{\mathbf{1}}(\psi)$ dans $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\psi))$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\mathbf{1}}(\psi) \arrow[dr, "\rho"] \arrow[drr, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}\circ\gamma"] \arrow[ddr, "\delta"'] & & \\
& \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{X}) \arrow[d, "\underline{F}_{\mathcal{X}}(\phi)"] \\
& \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0) \arrow[r, "p"] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{I}_0/\mathcal{Y}).
\end{tikzcd}$$

On en déduit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\mathbf{1}} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\gamma"] & \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi)) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}(id_{\mathcal{X}})"] & \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{X}).
\end{tikzcd}$$

Ainsi, par la propriété universelle du produit fibré, il existe une unique application $\underline{r}$ de $\mathcal{E}_{\mathbf{1}}$ dans $\mathfrak{R}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi))$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\mathbf{1}} \arrow[dr, "\underline{r}"] \arrow[drr, "\rho"] \arrow[ddr, "\gamma"'] & & \\
& \mathfrak{R}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi)) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mu"] & \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi)) \arrow[d, "\alpha"] \\
& \mathbf{1} \arrow[r, "\theta_{(\mathcal{X},\mathcal{X})}(id_{\mathcal{X}})"'] & \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{X}).
\end{tikzcd}$$

On considère maintenat l'application $i := r \circ \underline{r}$. Elle vérifie les égalités suivantes :$\gamma \circ i = \gamma \circ r \circ \underline{r} = \mu \circ \underline{r} = \gamma$, de même $\delta \circ i = \delta \circ r \circ \underline{r} = \beta \circ \nu \circ \underline{r} = \beta \circ \rho = \delta$.
Ainsi par l'unicité du produit fibré on en déduit que $i = id_{\mathcal{E}_1(\psi)}$ et $\underline{r}$ induit donc un isomorphisme entre $\mathcal{E}_{\mathbf{1}}(\psi)$ et $\mathfrak{R}(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}(\phi))$, et de plus $\mu \circ \underline{r} = \gamma$. Les deux extensions sont donc isomorphes.

□

Proposition 2.1.6. *$\mathfrak{I} \circ \mathfrak{R}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ pour tout élément $\mathcal{U}$ de $Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.*

Démonstration. — On rappelle (cf [**31**]) les propriétés suivantes propres aux catégories tensorielles pourvues de Hom internes, notés $\underline{Hom}$ (mais nous restons dans le cadre de la catégorie $\mathbf{T}$) :

Pour tout élément $\mathcal{U}$ de $Ext^1(\mathbf{1} \otimes \mathcal{X}, \mathcal{Y})$, représenté par la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathcal{Y} \to^{i} \mathcal{U} \to^{p} \mathbf{1} \otimes \mathcal{X} \to 0.$$

On a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \arrow[r, "i\circ"] \arrow[d, equal] & \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{U}) \arrow[r, "p\circ"] & \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathbf{1} \otimes \mathcal{X}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \arrow[r, "\delta"] & \mathfrak{R}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "\alpha"] & \mathbf{1} \arrow[r] \arrow[u, "\theta_{(\mathcal{X},\mathbf{1}\otimes\mathcal{X})}(id_{\mathbf{1}\otimes\mathcal{X}})"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

puis

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\otimes\mathcal{X} \arrow[r, "\delta\otimes id_{\mathcal{X}}"] \arrow[d, "ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}"] & \mathfrak{R}(\mathcal{U})\otimes\mathcal{X} \arrow[r, "\beta\otimes id_{\mathcal{X}}"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathbf{1}\otimes\mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\epsilon"] & \mathfrak{I}(\mathfrak{R}(\mathcal{U})) \arrow[r, "\lambda"] & \mathbf{1}\otimes\mathcal{X} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On peut ainsi construire le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\otimes\mathcal{X} \arrow[r, "\delta\otimes id_{\mathcal{X}}"'] \arrow[d, "ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}"'] & \mathfrak{R}(\mathcal{U})\otimes\mathcal{X} \arrow[d, "ev_{(\mathcal{X},\mathcal{U})}(\alpha\otimes id_{\mathcal{X}})"] \\
\mathcal{Y} \arrow[r, "i"] & \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

car $ev_{(\mathcal{X},\mathcal{U})}(\alpha\otimes id_{\mathcal{X}})\circ(\delta\otimes id_{\mathcal{X}}) = ev_{(\mathcal{X},\mathcal{U})}(i\circ\otimes id_{\mathcal{X}}) = i\circ ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.
Par la propriété universelle de la somme amalgamée, il existe un unique morphisme r de $\mathfrak{I}(\mathfrak{R}(\mathcal{U}))$ dans $\mathcal{U}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\otimes\mathcal{X} \arrow[r, "\delta\otimes id_{\mathcal{X}}"'] \arrow[d, "ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}"'] & \mathfrak{R}(\mathcal{U})\otimes\mathcal{X} \arrow[d, "\gamma"] \arrow[ddr, "ev_{(\mathcal{X},\mathcal{U})}(\alpha\otimes id_{\mathcal{X}})"] & \\
\mathcal{Y} \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[drr, "i"] & \mathfrak{I}(\mathfrak{R}(\mathcal{U})) \arrow[dr, "r"] & \\
& & \mathcal{U}.
\end{tikzcd}$$

De plus, les morphismes λ et $p\circ r$ vérifient les égalités suivantes :

1. $\lambda\circ\gamma = \beta\otimes id_{\mathcal{X}}$.
2. $p\circ r\circ\gamma = p\circ ev_{(\mathcal{X},\mathcal{U})}(\alpha\otimes id_{\mathcal{X}}) = ev_{(\mathcal{X},\mathbf{1}\otimes\mathcal{X})}((p\circ\alpha)\otimes id_{\mathcal{X}}))$.
3. $p\circ r\circ\gamma = ev_{(\mathcal{X},\mathbf{1}\otimes\mathcal{X})}(\theta_{(\mathcal{X},\mathbf{1}\otimes\mathcal{X})}(id_{\mathbf{1}\otimes\mathcal{X}})\otimes id_{\mathcal{X}})\circ(\beta\otimes id_{\mathcal{X}}) = \beta\otimes id_{\mathcal{X}}$.

Le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\otimes\mathcal{X} \arrow[r, "\delta\otimes id_{\mathcal{X}}"'] \arrow[d, "ev_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}"'] & \mathfrak{R}(\mathcal{U})\otimes\mathcal{X} \arrow[d, "\gamma"] \arrow[ddr, "\beta\otimes id_{\mathcal{X}}"] & \\
\mathcal{Y} \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[drr, "0"] & \mathfrak{I}(\mathfrak{R}(\mathcal{U})) \arrow[dr, bend right, "\lambda"] \arrow[dr, bend left, "p\circ r"] & \\
& & \mathbf{1}\otimes\mathcal{X}.
\end{tikzcd}$$

On en déduit par la propriété universelle de la somme amalgamée que $p\circ r = \lambda$.
On en conclut que r est un isomorphisme d'extensions de $\mathbf{1}\otimes\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ de $\mathfrak{I}(\mathfrak{R}(\mathcal{U}))$ dans

$\mathcal{U}$. En effet, il fait commuter le diagramme d'extensions suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{I}(\mathfrak{R}(\mathcal{U})) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "r"] & \mathbf{1} \otimes \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] & \mathcal{U} \arrow[r, "p"] & \mathbf{1} \otimes \mathcal{X} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

□

Corollaire 2.1.7. *Soit* $\mathcal{V} \in Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1}, \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$. *On a :* $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{I}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$.

Démonstration. — Le morphisme $\mathfrak{R}$ est surjectif d'après 2.1.5. On en déduit qu'il existe $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{V} = \mathfrak{R}(\mathcal{U})$.
On a déja prouvé que $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{R}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.
Donc $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{I}(\mathcal{V}) = \mathfrak{R}(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. □

2.2. GROUPE DE GALOIS D'UNE EXTENSION D'OBJETS SEMI-SIMPLES

Soit $\mathbf{T}$ une catégorie tannakienne neutre sur un corps C de caractéristique nulle algébriquement clos. On note ω un foncteur fibre de $\mathbf{T}$ vers la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur C. On note $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\omega)$ le groupe proalgébrique qui représente le foncteur $Aut^{\otimes}(\omega)$ et $Rep_{\mathcal{G}}$ la catégorie des représentations de dimension finie de $\mathcal{G}$ sur C.

Définition 2.2.1. *Pour tout* $\mathcal{X}$ *objet de* $\mathbf{T}$, *on note le sous-schéma en groupe de* $\mathcal{G}$ *vérifiant : pour tout* $\sigma \in Stab(\mathcal{X})$, *et tout* $x \in \omega(\mathcal{X})$, $\sigma(x) = x$.

Proposition 2.2.2. 1. $Stab(\mathcal{X})$ *est un sous-schéma en groupes distingué de* $\mathcal{G}$.
2. $\mathcal{G}/Stab(\mathcal{X})$ *est naturellement muni d'une structure de groupe algébrique sur* C. *On note ce groupe et par abus de langage on l'appellera groupe de Galois de* $\mathcal{X}$.

Définition 2.2.3. *On dira que l'objet* $\mathcal{X}$ *de* $\mathbf{T}$ *est complètement réductible si il est somme direct d'objets irréductibles.*

Puisque C est un corps de caractéristique nulle, algébriquement clos, on a :

Théorème 2.2.4 ([31]). $\mathcal{X}$ *est complètement réductible si et seulement si* $G_{\mathcal{X}}$ *est un groupe réductif.*

L'objet de ce paragraphe est de donner une version tannakienne du théorème de Berman-Singer (voir également [**2**] pour un énoncé analogue sur les groupes de Mumford-Tate). Ainsi, je prouve le théorème suivant :

Théorème 2.2.5. *Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ deux objets semi-simples de* $\mathbf{T}$*, et $\mathcal{U}$ un objet de* $\mathbf{T}$ *extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$. Le groupe de Galois de $\mathcal{U}$ est égal au produit semi-direct du groupe réductif $G_{\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}}$ par le groupe vectoriel $\omega(\mathcal{V})$, où $\mathcal{V}$ est l'unique objet de* $\mathbf{T}$ *possédant la propriété suivante : $\mathcal{V}$ est le plus petit sous-objet de $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$) tel que le quotient de l'extension $\mathfrak{R}(\mathcal{U})$ par $\mathcal{V}$ est une extension scindée.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet des paragraphes suivants.

2.2.1. Calcul du groupe de Galois d'une extension de 1 par un objet semi-simple $\mathcal{Y}$. — On rappelle les propriétés inhérentes au caractére réductif d'un groupe algébrique sur un corps de caractéristique nulle algébriquement clos :

Proposition 2.2.6. *(*[**11**] *) Soit G un groupe algébrique réductif sur C, corps de caractéristique nulle .*

1. *Pour tout G-module de dimension finie V, on a $H^1(G,V)=0$.*
2. *Pour tout G-module de dimension finie V et W. sous-G-module de V, il existe un sous-G-module W_1 de V tel que $V = W \oplus W_1$.*

On fixe $\mathcal{Y}$ objet de $\mathbf{T}$ complètement réductible, dont on connaît le groupe de Galois $G_{\mathcal{Y}}$. On se donne $\mathcal{U}$ objet de $\mathbf{T}$ représentant une extension de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{Y}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{i} \mathcal{U} \xrightarrow{p} \mathbf{1} \longrightarrow 0 .$$

On cherche dans ce paragraphe à déterminer le groupe de Galois de $\mathcal{U}$.
Le foncteur ω étant une équivalence de catégorie on en déduit que $\omega(\mathcal{U})$ se réalise comme extension de la représentation unité C par $\omega(\mathcal{Y})$ dans la catégorie des $\mathcal{G}$-modules de dimension finie. On notera s une section C-linéaire de la suite exacte suivante :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \omega(\mathcal{Y}) \arrow[r, "\omega(i)"] & \omega(\mathcal{U}) \arrow[r, shift left, "\omega(p)"] & C \arrow[l, shift left, dotted, "s"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et soit $\zeta_{\omega(\mathcal{U})}$ le cocycle de $H^1(\mathcal{G},\omega(\mathcal{Y}))$ correspondant.

Lemme 2.2.7. *$Stab(\mathcal{U})$ est un sous-schéma en groupes distingué dans $Stab(\mathcal{Y})$ et $G_{\mathcal{Y}}$ est isomorphe à $G_{\mathcal{U}}/(Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U}))$.*

DÉMONSTRATION. — Pour tout $x \in \omega(\mathcal{Y})$ et tout $\sigma \in Stab(\mathcal{U})$, on a $\sigma\omega(i)(x) = \omega(i)(x)$, soit $\omega(i)(\sigma(x)) = \omega(i)(x)$. Or l'application $\omega(i)$ est injective donc $\sigma(x) = x$ et ainsi σ est un élément de $Stab(\mathcal{Y})$. De plus si $\sigma_1 \in Stab(\mathcal{Y})$ et $\sigma_2 \in Stab(\mathcal{U})$, on a pour tout $u \in \omega(\mathcal{U})$, ${\sigma_1}^{-1}(u)$ dans $\omega(\mathcal{U})$ et donc $\sigma_2({\sigma_1}^{-1}(u)) = {\sigma_1}^{-1}(u)$. Ainsi $\sigma_1(\sigma_2({\sigma_1}^{-1}(u))) = u$ pour tout

u dans $\omega(\mathcal{U})$. On en conlut que $\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1}$ est un élément de $Stab(\mathcal{U})$ et ainsi que $Stab(\mathcal{U})$ est distingué dans $Stab(\mathcal{Y})$.

□

Soit p la surjection canonique de $G_{\mathcal{U}}$ dans $G_{\mathcal{Y}}$. On note R le noyau de ce morphisme. $R = Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$ est alors un sous groupe distingué de $G_{\mathcal{U}}$.

Soit ϕ l'application de $\mathcal{G}$ dans $\omega(\mathcal{Y})$ définie par $\phi(\sigma) = \sigma s(\sigma^{-1}1) - s(1) = \sigma s(1) - s(1)$, c'est-à-dire la spécialisation du cocycle $\zeta_{\omega(\mathcal{U})}$ définissant l'extension $\omega(\mathcal{U})$ en 1 : $\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma)(1) = \phi(\sigma)(1)$.

Lemme 2.2.8. *L'application ϕ induit un morphisme de groupes injectif de $Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$ dans $\omega(\mathcal{Y})$.*

Démonstration. — Pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in G_{\mathcal{U}}$, on a :

$$\phi(\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1\phi(\sigma_2)) + \phi(\sigma_1) \tag{1}$$

Si σ_1 et σ_2 sont des éléments de $Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$, on a $\phi(\sigma_1\sigma_2) = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2)$. De plus, si on considére une base $(e_j)_{j=1..n}$ de $\omega(\mathcal{Y})$, alors $((\omega(i)(e_j))_{j=1..n}, s(1))$ est une base $(\mathcal{B})$ de l'espace vectoriel $\omega(\mathcal{U})$ sur C. Si $\sigma \in Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$ vérifie $\phi(\sigma) = 0$, il est clair que σ induit l'identité sur $(\mathcal{B})$ et ainsi sur $\omega(\mathcal{U})$. Par définition de $G_{\mathcal{U}}$, σ est l'élément neutre. On a donc démontré que ϕ est un morphisme injectif de $Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$ dans $\omega(\mathcal{Y})$. □

On en déduit que $R = Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$ est isomorphe à un sous-groupe vectoriel de $\omega(\mathcal{Y})$. On en déduit que R est abélien. Ainsi $G_{\mathcal{Y}} = G_{\mathcal{U}}/R$ agit par congugaison sur $Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$. De plus $G_{\mathcal{U}}/R = G_{\mathcal{Y}}$ est réductif, donc R est le radical unipotent de $G_{\mathcal{U}}$.

Lemme 2.2.9. *Pour tout $\sigma_1 \in G_{\mathcal{Y}}$ et $\sigma_2 \in Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$, on a*

$$\phi(\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1}) = \sigma_1(\phi(\sigma_2)).$$

Démonstration. — Notre démonstration se base essentiellement sur la formule (1). On déduit avant tout de celle ci que :

$$\sigma_1\phi({\sigma_1}^{-1}) = \phi(id) - \phi(\sigma_1) = -\phi(\sigma_1) \tag{2}$$

En appliquant successivement (1), on obtient :

$$\phi(\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1}) = \sigma_1(\phi(\sigma_2{\sigma_1}^{-1}) + \phi(\sigma_1) = \sigma_1(\sigma_2(\phi({\sigma_1}^{-1})) + \phi(\sigma_2)) + \phi(\sigma_1).$$

De (8), on deduit que : $\sigma_1(\sigma_2(\phi({\sigma_1}^{-1}))) = -\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1}(\phi(\sigma_1))$. Or $\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1}$ est un élément de $Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$ et $\phi(\sigma_1)$ est dans $\omega(\mathcal{Y})$. On en déduit que $\sigma_1(\sigma_2(\phi({\sigma_1}^{-1}))) = \phi(\sigma_1)$. Ainsi $\phi(\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1}) = \sigma_1(\phi(\sigma_2))$. □

On déduit du lemme précédent que $Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$ s'identifie à un sous $G_{\mathcal{Y}}$-module V de $\omega(\mathcal{Y})$. On note $\mathbf{V}$ l'ensemble des sous-$G_{\mathcal{Y}}$-modules V de $\omega(\mathcal{Y})$, tels que l'extension obtenue par *pushout*, via le morphisme de projection p_V de $\omega(\mathcal{Y})$ sur $\omega(\mathcal{Y})/V$, de l'extension $\omega(\mathcal{U})$ soit triviale.

Lemme 2.2.10. *L'ensemble* $\mathbf{V}$ *admet un élément minimal.*

DÉMONSTRATION. — Le groupe $G_{\mathcal{Y}}$ étant réductif, d'après la proposition 2.2.6 tout sous $G_{\mathcal{Y}}$-module de $\omega(\mathcal{Y})$ admet un supplémentaire dans la catégorie des $G_{\mathcal{Y}}$-modules. Montrons que, si V_1 et V_2 sont des éléments de $\mathbf{V}$, il en est de même de leur intersection W : en effet, il existe deux sous-$G_{\mathcal{Y}}$ modules V_1' et W_1' de $\omega(\mathcal{Y})$ tels que :

1. $V_1 = W \oplus W_1'$, $V_2 \ \subset W \oplus V_1'$.
2. $\omega(\mathcal{Y}) = V_1 \oplus V_1' = V_1' \oplus W \oplus W_1'$.

On a :

$$Ext^1(\mathbf{1}, \omega(\mathcal{Y})) \simeq Ext^1(\mathbf{1}, V_1) \times Ext^1(\mathbf{1}, V_1') \text{ et } Ext^1(\mathbf{1}, V_1)) \simeq Ext^1(\mathbf{1}, W) \times Ext^1(\mathbf{1}, W_1').$$

Comme V_1 et V_2 sont dans $\mathbf{V}$, $\omega(\mathcal{U})$ se projette de façon triviale sur $Ext^1(\mathbf{1}, V_1')$ et sa restriction à V_1 se projette, elle aussi, de façon triviale sur $Ext^1(\mathbf{1}, W_1')$. On en déduit que $\omega(\mathcal{U})$ se projette de façon triviale sur $Ext^1(\mathbf{1}, V_1' \oplus W_1'))$ et ainsi que W est dans $\mathbf{V}$.

Ce fait assure l'existence d'un élément minimal au sens de l'inclusion dans $\mathbf{V}$. □

Proposition 2.2.11. *L' élément minimal est l'image par* ϕ *de* $Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$.

DÉMONSTRATION. — On rappelle que d'après le théorème 1.1.3 $Ext^1_{Rep_{G_{\mathcal{U}}}}(A, B)$ est isomorphe au groupe de cohomologie $H^1(G_{\mathcal{U}}, \underline{Hom}(A, B))$. Dans le cas qui nous intéresse, $A = C$ et $B = \omega(\mathcal{Y})$. Un cocyle représentant l'extension $\omega(\mathcal{U})$ est donné par l'application de $G_{\mathcal{U}}$ dans $\underline{Hom}(C, \omega(\mathcal{Y}))$ qui associe à σ élément de $G_{\mathcal{U}}$ le morphisme $\lambda \to \lambda\phi(\sigma)$. On note ce cocyle $\zeta_{\omega(\mathcal{U})}$. Un cocycle représentant le *pushout* de l'extension $\omega(\mathcal{U})$ par l'application p_V est donné par $p_V \circ \zeta_{\omega(\mathcal{U})}$.
Soit V un $G_{\mathcal{Y}}$-module de $\omega(\mathcal{Y})$ tel que le *pushout* de $\omega(\mathcal{U})$ par p_V soit trivial. Alors, il existe un morphisme f de C dans $\omega(\mathcal{Y})/V$ tel que pour tout σ dans $G_{\mathcal{U}}$, $p_V \circ \zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma) = \sigma f - f$. Si σ est un élément de $Stab(\mathcal{Y})/stab(\mathcal{U})$, on en déduit que $\sigma f - f = 0$ et ainsi que l'image de $Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$ par ϕ est incluse dans V.
Réciproquement, soit $W = \phi(Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U}))$. Montrons que W est un élément de $\mathbf{V}$. En effet $G_{\mathcal{Y}}$ est un groupe réductif, donc $H^1(G_{\mathcal{Y}}, \omega(\mathcal{Y}))$ est un groupe trivial. On en déduit que le cocycle représentant l'extension $\omega(\mathcal{U})$ est entièrement déterminé par sa restriction à $Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$. Ainsi, $p_W \circ \zeta_{\omega(\mathcal{U})}|_{Stab(\mathcal{Y})} = p_W \circ \phi|_{Stab(\mathcal{Y})} = 0$, et le *pushout* de $\omega(\mathcal{U})$ par p_W est trivial. Ceci achève la démonstration. □

2.2.2. Calcul du groupe de Galois d'une extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$. — On considère une extension $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ dans $\mathbf{T}$. En lui appliquant le foncteur fibre ω, on peut réaliser $\omega(\mathcal{U})$ comme extension de $\omega(\mathcal{X})$ par $\omega(\mathcal{Y})$ dans $Rep_{\mathcal{G}}$. On va alors utiliser l'application $\mathfrak{R}$ définie dans le paragraphe 2.1 afin de se ramener à l'étude du groupe de Galois d'une extension de C par $\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))$:

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y})) \longrightarrow \mathfrak{R}(\omega(\mathcal{U})) \longrightarrow C \longrightarrow 0\,.$$

On a démontré que $\mathfrak{R}$ est un isomorphisme de groupes entre $Ext^1_{Rep_{\mathcal{G}}}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))$ et $Ext^1_{Rep_{\mathcal{G}}}(C,\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y})))$.

Lemme 2.2.12. *Le radical unipotent du groupe de Galois de $\mathcal{U}$ est isomorphe à celui de $\mathfrak{R}(\mathcal{U})$.*

Démonstration. — Si $\mathcal{M}$ est un objet de $\mathbf{T}$, élément de $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, d'après 2.2.8 le radical unipotent du groupe de Galois de $\mathcal{M}$ est donné par l'image de $Stab(\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$ dans $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ sous un cocycle représentant la classe de $\omega(\mathcal{M})$ dans $H^1(\mathcal{G},\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))$.
Un cocycle représentant $\mathcal{U}$ dans $H^1(\mathcal{G},\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))$ est donné par l'application

$$\zeta_{\mathcal{U}} : \sigma \in \mathcal{G} \to \zeta_{\mathcal{U}}(\sigma) := \sigma s \sigma^{-1} - s \in \underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y})),$$

où s est une section C-linéaire de la suite exacte de $\mathcal{G}$-modules :

$$0 \longrightarrow \omega(\mathcal{Y}) \longrightarrow \omega(\mathcal{U}) \underset{s}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} \omega(\mathcal{X}) \longrightarrow 0\,.$$

Un cocyle représentant $\mathfrak{R}(\mathcal{U})$ dans $H^1(\mathcal{G},\underline{Hom}(C,\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))))$ est donné par :

$$\zeta_{\mathfrak{R}(\mathcal{U})} : \sigma \in \mathcal{G} \to \zeta_{\mathfrak{R}(\mathcal{U})}(\sigma) := \lambda \to \lambda(\sigma s \sigma^{-1} - s) \in \underline{Hom}(C,\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))).$$

On conclut la démonstration en rappelant l'isomorphisme canonique de $\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))$ dans $\underline{Hom}(C,\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y})))$.

□

On remarque que le groupe de Galois de $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est un quotient du groupe de Galois de $\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$. C'est donc un groupe réductif. En effet la structure de $\mathcal{G}$-module de $\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))$ est donnée par la formule suivante : $g.\theta = g\theta g^{-1}$ pour tout $g \in G$ et $\theta \in \underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))$. L'inclusion de $Stab(\mathcal{X})\cap Stab(\mathcal{Y})$ dans $Stab(\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y})))$ est évidente. Montrons que $Stab(\mathcal{X})\cap Stab(\mathcal{Y}) = Stab(\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y})$ est distingué dans $Stab(\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y})))$.
En effet soient $g_1 \in Stab(\mathcal{X})\cap Stab(\mathcal{Y})$, $g_2 \in Stab(\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y})))$ et $\theta \in \underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))$. On a : $g_2g_1g_2^{-1}\theta(g_2g_1g_2^{-1}(x)) = g_2g_1g_2^{-1}\theta(g_2g_2^{-1}(x))$ car g_1 est dans $Stab_X$ et $g_2^{-1}(x)$ est un élément de $\omega(\mathcal{X})$, donc $g_2g_1g_2^{-1}\theta(g_2g_1g_2^{-1}(x)) = g_2g_1g_2^{-1}\theta(x)$. De même $g_2^{-1}\theta(x)$ est dans $\omega(\mathcal{Y})$ donc $g_2g_1g_2^{-1}\theta(g_2g_1g_2^{-1}(x)) = g_2g_2^{-1}\theta(x) = \theta(x)$ pour tout

$x \in \omega(\mathcal{X})$. Ainsi $g_2 g_1 g_2^{-1} \in Stab(\mathcal{X}) \cap Stab(\mathcal{Y})$, ce qui conclut la démonstration.

On a donc :

Proposition 2.2.13. *Le groupe de Galois de $\mathcal{U}$ est égal au produit semi-direct de $G_{\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}}$ par l'unique sous-$G_{\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}}$-module V de $\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y}))$ possédant la propriété suivante : V est le plus petit sous-$G_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$-module de $\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y}))$ tel que $\mathfrak{R}(\omega(\mathcal{U}))/V$ soit une extension scindée de $\mathbf{1}$ par $\underline{Hom}(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y}))/V$.*

Le foncteur fibre ω induisant une équivalence de catégories entre $\mathbf{T}$ et les représentations de $\mathcal{G}$, il en découle le théorème 2.2.5.

Remarque Soient $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}', \mathcal{Y}'$ des objets de $\mathbf{T}$, $\mathcal{U} \in Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$(respectivement $\mathcal{U}' \in Ext^1(\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$). On peut considérer $\mathcal{U}\oplus\mathcal{U}'$ comme un élément de $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X}\oplus\mathcal{X}', \mathcal{Y}\oplus\mathcal{Y}')$ et ainsi calculer son groupe de Galois. Cette remarque apparemment anodine, prend plus de relief si l'on se place dans la catégorie des $\mathcal{D}_K$-modules. En effet, dans ce cadre le groupe de Galois de $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}'$ correspond au groupe de Galois différentiel du compositum de l'extension de Picard-Vessiot de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{U}'$ sur K $(K_U.K_{U'} = K_{U\oplus U'})$.

Pour conclure ce paragraphe, on énonce un corollaire du théorème 2.2.5, dont on verra une application directe au chapitre 11.

Théorème 2.2.14. *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux objets semi-simples de $\mathbf{T}$, $\Delta := End(\underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$ et $\mathcal{E}_1, .., \mathcal{E}_n \in Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ des extensions, telles que $\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1), .., \mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)$ soient Δ-linéairement indépendantes. Alors le radical unipotent de $G_{\mathcal{E}_1\oplus..\oplus\mathcal{E}_n}$ est isomorphe à $Hom(\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y}))^n$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{H} = \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ et H le Δ-module $\omega(\mathcal{H})$. $\mathcal{H}^n \simeq \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})^n$ se plonge diagonalement dans $\underline{Hom}(\mathcal{X}^n, \mathcal{Y}^n) = \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathcal{H})$. L'image par $\mathfrak{R}$ de $\mathcal{E}_1 \oplus .. \oplus \mathcal{E}_n$ est un élément des $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1}, \mathcal{H}^n)$.
Supposons que l'image W du radical unipotent du groupe de Galois de $\mathcal{E}_1 \oplus .. \oplus \mathcal{E}_n$ par le cocycle $\zeta_{\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1)\oplus..\oplus\mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)} = (\zeta_{\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1)}, .., \zeta_{\mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)})$ ne soit pas H^n tout entier.
Comme H^n est un Δ-module semi-simple, il existe des éléments $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ de Δ non tous nuls tels que :

$$\alpha_1\zeta_{\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1)} + ... + \alpha_n\zeta_{\mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)} = \zeta_{\alpha_1\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1)+..+\alpha_n\mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)}$$

s'annule sur $R_u(G_{\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1)\oplus..\oplus\mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)}) = R$. On note $G := G_{\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1)\oplus..\oplus\mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)}$. G/R est un groupe réductif. La suite d'inflation restriction appliquée aux groupes G et R induit une injection de $H^1(G, H^n)$ dans $H^1(R, H^n)$. Ainsi si $\alpha_1\zeta_{\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1)} + ... + \alpha_n\zeta_{\mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)} = \zeta_{\alpha_1\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1)+..+\alpha_n\mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)}$ est nul dans $H^1(R, H^n)$, il est aussi nul dans $H^1(G, H^n)$.

(Ici $\alpha\mathfrak{R}(E)$ signifie $\alpha_*\mathfrak{R}(E)$; c'est ainsi que l'on définit la structure de Δ-module de $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1}, \mathcal{H})$.)
Ainsi l'extension $\alpha_1\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1) + .. + \alpha_n\mathfrak{R}(\mathcal{E}_n) \in Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{H})$ est triviale, or $\mathfrak{R}(\mathcal{E}_1), .., \mathfrak{R}(\mathcal{E}_n)$ sont linéairement indépendantes sur Δ, d'où la contradiction attendue. □

CHAPITRE 3

APPLICATIONS EN THÉORIE DE GALOIS DIFFÉRENTIELLE

Soit un corps différentiel de corps des constantes C de caractéristique nulle, algébriquement clos. On note l'anneau différentiel $K[\partial]$. La catégorie tannakienne considérée ici est celle des $\mathcal{D}_K$-modules à gauche de longueur finie .
On fixe une clôture différentielle du corps K. Un foncteur fibre de cette catégorie est alors donné par $\omega(\mathcal{M}) := Hom_{\mathcal{D}_K}(\tilde{K}, \mathcal{M} \otimes \tilde{K})$, l'ensemble des vecteurs horizontaux de $\mathcal{M} \otimes \tilde{K}$ dans $\tilde{K}$, que l'on notera M.
Le groupe des C-points du groupe proalgébrique $\mathcal{G}$ défini au paragraphe 2.2 s'identifie au groupe de Galois différentiel Gal(K̃|K). Pour tout élément $\mathcal{M}$ de $\mathcal{D}_K$, on note ou K_M, l'extension de Picard-Vessiot relative à $\mathcal{M}$ dans $\tilde{K}$.
Dans ce chapitre, on suppose que K est le corps des fractions d'un anneau différentiel R. Le cas qui nous intéresse ici est le suivant : $K = \mathbb{C}(z)$ et $R = \mathbb{C}[z, \frac{1}{z-a_1}, .., \frac{1}{z-a_s}]$. On pose $\mathcal{D}_R = R[\partial]$.

3.1. DESCRIPTION ENSEMBLISTE DE $Ext^1_{\mathcal{D}_R}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

3.1.1. Nullité de $Ext^i(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ pour $i > 1$. — On appelle *module différentiel* sur R , un $\mathcal{D}_R$-module libre de type fini en tant que R-module.
On rappelle le lemme du vecteur cyclique dû à Katz :

Lemme 3.1.1. *(voir* **[25]***)*
Soit (R, d) un anneau différentiel local de caractéristique nulle ou un corps, $\mathcal{V}$ un $\mathcal{D}_R$-module libre de type fini en tant que R-module, et n son rang sur R. Si R contient un élément t tel que $d(t) = 1$, alors $\mathcal{V}$ admet un vecteur cyclique. L'annulateur dans $\mathcal{D}_R$ d'un tel vecteur cyclique sera appelé une équation de $\mathcal{V}$.

On se place désormais dans le cadre du lemme précédent. On note $\mathcal{D}_R$ l'anneau $R[\partial]$ des polynomes différentiels en une variable à coefficient dans R.

On donne dans la proposition suivante, une propriété essentielle des groupes d'extensions de $\mathcal{D}_K$-modules. Cette propriété nous permettra dans la partie II de définir dans cette même catégorie des structures d'extensions panachées.

Proposition 3.1.2. *Pour tout entier $i > 1$, tout $\mathcal{D}_R$-module $\mathcal{M}$ et tout $\mathcal{D}_R$ module $\mathcal{N}$ libres de rang fini, les groupes de cohomologie $Ext^i_{\mathcal{D}_R}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ sont nuls.*

DÉMONSTRATION. — On considère $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_R$-module libre de rang fini, le lemme du vecteur cyclique assure l'existence d'un opérateur différentiel L à coefficients dans R et d'un morphisme π de $\mathcal{D}_R$ dans $\mathcal{M}$, tels que la suite de $\mathcal{D}_R$-modules suivante soit exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_R \xrightarrow{\times L} \mathcal{D}_R \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

L'application " $\times L$" correspond à la multiplication à droite par L.
On en déduit, pour tout $\mathcal{D}_R$-module $\mathcal{N}$, la suite exacte longue de cohomologie suivante :

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow Hom(\mathcal{D}_R,\mathcal{N}) \xrightarrow{\times L} Hom(\mathcal{D}_R,\mathcal{N}) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow$$

$$Ext^1(\mathcal{D}_R,\mathcal{N}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Ext^i(\mathcal{D}_R,\mathcal{N}) \longrightarrow Ext^{i+1}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow Ext^{i+1}(\mathcal{D}_R,\mathcal{N}) \longrightarrow \cdots$$

Le module $\mathcal{D}_R$ étant libre, $Ext^i_{\mathcal{D}_\mathcal{R}}(\mathcal{D}_R,\mathcal{N})$ est nul pour tout $i > 0$.
Donc $Ext^i_{\mathcal{D}_\mathcal{R}}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = 0$ pour tout $i > 1$.

□

Remarque : La proposition précédente reste vraie même en l'absence de vecteur vecteur cyclique. En effet, tout $\mathcal{D}_R$ module $\mathcal{M}$ libre de rang n sur R, s'inscrit dans une suite exacte du type :

$$0 \longrightarrow {\mathcal{D}_R}^n \longrightarrow {\mathcal{D}_R}^n \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée donne le résultat attendu.

D'après le théorème 2.1.1 et le lemme 3.1.1, l'étude de $Ext^1_{\mathcal{D}_R}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ se ramène à celle des extensions simples d'un $\mathcal{D}_R$-module cyclique par l'objet unité. On montre maintenant que toute extension de ce type correspond à un certain produit d'opérateurs différentiels.

3.1.2. Etude du cas $\mathcal{N} = \mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial$. — On note $\mathbf{1}$ le $\mathcal{D}_R$-module $\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial$. On reprend les notations du paragraphe précédent, en particulier $\mathcal{M} = \mathcal{D}_R/\mathcal{D}_RL$. On note K le corps des fractions de R.

Proposition 3.1.3. *Toute extension de $\mathcal{M} = \mathcal{D}_R/\mathcal{D}_RL$ par $\mathbf{1}$ est K-isomorphe à un $\mathcal{D}_K$-module de la forme $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K\mathcal{N}L$ où $\mathcal{N}$ est un opérateur équivalent à ∂ dans $\mathcal{D}_K$.*

Démonstration. — De (3), on déduit l'exactitude de la suite :

$$Hom(\mathcal{D}_R,\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial) \xrightarrow{\times L} Hom(\mathcal{D}_R,\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial) \xrightarrow{E} Ext^1_{\mathcal{D}_R}(\mathcal{M},\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial) \longrightarrow 0 \quad (4)$$

On peut remarquer que :

1. L'application E correspond au *pushout* de la suite exacte suivante par un élément g de $Hom(\mathcal{D}_R,\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial)$
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{D}_R \arrow[r, "\times L"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{D}_R \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dotted] & \mathcal{M} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial \arrow[r] & E(g) \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$
2. $Hom(\mathcal{D}_R,\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial)$ est isomorphe à R : en effet un élément ϕ de $Hom(\mathcal{D}_R,\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial)$ est entièrement déterminé par la classe $\overline{\phi(1)}$ modulo ∂ de $\phi(1)$ (soit $Q \in \mathcal{D}_R$, alors $\phi(Q) = \overline{Q\phi(1)} = \overline{Q}.\overline{\phi(1)}$).

Lemme 3.1.4. *L'application E induit un isomorphisme de groupe entre $R/L(R)$ et $Ext^1_{\mathcal{D}_R}(\mathcal{M},\mathbf{1})$.*

Démonstration. — L'application "$\times L$" de $Hom(\mathcal{D}_R,\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial)$ dans lui-même associe à un morphisme ϕ la multiplication à droite par $L\phi$ où pour tout $Q \in \mathcal{D}_R$, $"\times L"\phi(Q) = QL\phi(1)$.
Or la classe modulo ∂ de $L\phi(1)$ est égale à $L(\overline{\phi(1)})$.
Par conséquent, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} Hom(\mathcal{D}_R,\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial) \arrow[r, "\text{"}\times L\text{"}"] \arrow[d, "\simeq"] & Hom(\mathcal{D}_R,\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial) \arrow[d, "\simeq"] \\ R \arrow[r, "L(.)"] & R \\ f \arrow[r, mapsto] & L(f) \end{tikzcd}$$

Ainsi $Ext^1(\mathcal{M},\mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R\partial)$ est isomorphe à $R/L(R)$.

□

Montrons enfin que $E(g)$ est isomorphe sur K à l'extension de $\mathcal{M}$ par $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K\partial$ que définit $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K(\partial - \frac{g'}{g})L$.
Pour tout élément B de $\mathcal{D}_K$ on note p_B la projection canonique de $\mathcal{D}_K$ sur $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K B$.
On note ϕ l'application $\mathcal{D}_K \times \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K\partial \longrightarrow \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K(\partial - \frac{g'}{g})L$

$$(a,b) \longmapsto p_{(\partial - \frac{g'}{g})L}(a + b * \tfrac{1}{g}L)$$

1. L'application ϕ est bien définie car $\partial\frac{1}{g}L = \frac{1}{g}(\partial - \frac{g'}{g})L$.

2. L'application ϕ est surjective.

3. Le noyau de ϕ est l'ensemble $\{(PL, -p_\partial(P)g),\ P \in \mathcal{D}_K\}$.

Par définition du *pushout* g_*, on en déduit par passage au quotient, que ϕ induit un isomorphisme d'extension entre $E(g)$ et $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K(\partial - \frac{g'}{g})L$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K\partial \arrow[r] \arrow[d, equal] & E(g) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K\partial \arrow[r, "\frac{1}{g}L"] & \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K(\partial - \frac{g'}{g})L \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

□

3.1.3. Caractérisation ensembliste de $Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{N})$. —

Définition 3.1.5. *Soit $\mathcal{N}$ un module différentiel libre de rang fini. Le $\mathcal{D}_R$-module $\mathcal{N}^* = \underline{Hom}_{\mathcal{D}_R}(\mathcal{N}, \mathbf{1})$ est le dual de $\mathcal{N}$.*

On déduit de l'isomorphisme $\mathfrak{R}$ défini au paragraphe 2.1 que les groupes $Ext^1(\mathcal{N}, \mathbf{1})$ et $Ext^1(\mathbf{1}, \underline{Hom}_{\mathcal{D}_R}(\mathcal{N}, \mathbf{1}))) = Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{N}^*)$ sont isomorphes.

On rappelle les propriétés suivantes des modules duaux de modules différentiels (voir [**39**])

Proposition 3.1.6. *Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel sur R, dont une équation est donnée par l'opérateur différentiel unitaire $L = \partial^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\partial^i \in \mathcal{D}_R$.*

1. *Il existe un isomorphisme canonique entre $(\mathcal{M}^*)^*$ et $\mathcal{M}$.*
2. *Le dual de $\mathcal{M}$ admet pour équation l'élément de $\mathcal{D}_R$ noté L^*, dont l'expression est donnée par $L^* = (-\partial)^n + \sum_{i=0}^{n-1}(-\partial)^i a_i$.*
3. *Soient L_1 et L_2 deux éléments unitaires de $\mathcal{D}_R$. On a $(L_1^*)^* = L_1$ et $(L_1L_2)^* = L_2^*L_1^*$.*

Théorème 3.1.7. *Pour tout module différentiel cyclique sur R $\mathcal{N}$ et $L \in \mathcal{D}_R$ équation de $\mathcal{N}$, il existe un isomorphisme ϕ de groupe entre $R/L^*(R)$ et $Ext^1_{\mathcal{D}_R}(\mathbf{1}, \mathcal{N})$. Pour tout représentant g d'un élément de $R/L^*(R)$, l'extension $\phi(g)$ de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{N}$ correspondante est K-isomorphe à l'extension suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L(\partial + \tfrac{g'}{g}) \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow 0\ .$$

$E(g)$ est représenté par la matrice à coefficients dans R suivante :

$$\begin{pmatrix} C_L & 0 \\ 0 & -g \end{pmatrix},$$

où C_L désigne la matrice compagnion associée à L.

Démonstration. — On va appliquer le théorème du paragraphe précédent en prenant $\mathcal{M} = \mathcal{N}^*$. Ainsi le groupe $Ext^1(\mathcal{N}^*, \mathbf{1})$ est isomorphe au groupe $R/L^*(R)$ via l'application qui à un représentant g d'un élément de $R/L^*(R)$ associe l'extension de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{N}^*$ suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K(\partial + \tfrac{g'}{g})L^* \longrightarrow \mathcal{N}^* \longrightarrow 0\ .$$

En utilisant la proposition précédente on en déduit que $(\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K(\partial - \frac{g'}{g})L^*)^* = \mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L(\partial + \frac{g'}{g})$. En composant l'isomorphisme E avec ψ, on en déduit un isomorphisme de groupe entre $R/L^*(R)$ et $Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{N})$, qui à un représentant g d'un élément $R/L^*(R)$ associe l'extension de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{N}$ suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R L(\partial + \tfrac{g'}{g}) \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow 0\ .$$

(On a utilisé aussi le fait que $(\mathcal{N}^*)^*$ est isomorphe à $\mathcal{N}$) $\square$

3.2. CALCUL DE LA DIMENSION DE $Ext^1_{\mathcal{D}_R}(R, \mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R L)$

On rappelle dans ce paragraphe un résultat classique sur la dimension des groupes d'extensions d'une équation différentielle à lieu de singularité fixé.
Soit $K = \mathbb{C}(z)$. On considère un opérateur différentiel $L = (d/dz)^n + a_{n-1}(d/dz)^{n-1} + .. + a_0$ d'ordre n à coefficients dans K, dont l'ensemble des singularités est l'ensemble fini $S := \{x_0, .., x_s\}$ de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$.
On pose $R := \mathbb{C}[z, \frac{1}{z-x_0}, .., \frac{1}{z-x_s}]$ et pour tout x dans S :
$i_x(L) := sup\{0, sup_{j=0,..,n-1}(j - n - v_x(a_j))\ \}$ si $x \neq \infty$
$(i_\infty(L) := sup\{0, sup_{j=0,..,n-1}(n - j - v_x(a_j))\ \}\ )$. On a l'énoncé suivant (voir **[16]**, **[26]**)

Théorème 3.2.1. *Soit L un élément unitaire de $\mathcal{D}_R$ tel que l'équation $Ly = 0$ n'a pas de solutions dans R. Alors la dimension du $\mathcal{C}$ espace vectoriel $Ext^1_{\mathcal{D}_R}(\mathbf{1}, \mathcal{D}_R/\mathcal{D}_R L)$ est égale à*

$$(s-2)n + \sum_{x \in\ S} i_x(L).$$

Remarque
Si $\mathcal{M}_R$ est un module différentiel sur R, posons $\mathcal{M} := \mathcal{M}_R \otimes K$, alors le groupe $Ext^1_{\mathcal{D}_R}(\mathbf{1}, \mathcal{M}_R)$ s'identifie à un sous-groupe de $Ext^1_{\mathcal{D}_K}(\mathbf{1}, \mathcal{M})$ (voir [**6**]).
On verra au chapitre 10 des contrexemples à la finitude des dimensions des groupes d'extensions dans le cadre des équations aux q-différences.

3.3. CALCUL DU GROUPE DE GALOIS D'UNE EXTENSION DE $\mathcal{X}$ PAR $\mathcal{Y}$

On reprend les notations du début du chapitre 3.

On va appliquer le théorème 2.2.5 et retrouver ainsi le théorème de P.H Berman et M. Singer dans [**4**](voir aussi [**6**]).
Pour la catégorie considérée ici, le groupe de Galois tannakien $G_{\mathcal{M}}$ d'un $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{M}$ dont l'espace $\omega(\mathcal{M})$ des solutions dans $\tilde{K}$ est noté M, s'identifie au groupe de Galois différentiel $\mathrm{Gal(K_M|K) = G_M}$.
Soit $\mathcal{U}$ une extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ dans la catégorie des $\mathcal{D}_K$-modules de longueur fini.
Cette extension donne lieu à la filtration de corps de Picard-Vessiot suivante :

$$\begin{tikzcd}
& K_U \arrow[d, dash] & \\
& K_X.K_Y \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K_X \arrow[dr, dash] & & K_Y \arrow[dl, dash] \\
& K_X \cap K_Y \arrow[d] & \\
& K &
\end{tikzcd}$$

Donc $\mathrm{Gal(K_X.K_Y|K)}$ est isomorphe à une extension de $\mathrm{Gal(K_X \cap K_Y|K)}$ par $\mathrm{Gal(K_X|(K_X \cap K_Y)} \times \mathrm{Gal(K_Y|K_X \cap K_Y)}$.
Le théorème *tannakien* 2.2.5 entraîne alors :

Théorème 3.3.1 (cf [4]). *Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ des $\mathcal{D}_K$-modules semi-simples et $\mathcal{U}$ une extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$. Alors le groupe de Galois différentiel de $\mathcal{U}$ est égal au produit semi-direct du groupe réductif* $\mathrm{Gal(K_X.K_Y|K)}$ *par le sous-espace vectoriel des solutions de $\mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ est le plus petit sous-$\mathcal{D}_K$-module de $\underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tel que le quotient par $\mathcal{V}$ de l'extension $\mathfrak{R}(\mathcal{U})$ soit une extension scindée.*

PARTIE II

EXTENSIONS PANACHÉES

CHAPITRE 4

DÉFINITION ET STRUCTURE DE TORSEUR

4.1. EXTENSIONS PANACHEES DE $\mathcal{M}_2$ PAR $\mathcal{M}_1$

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne, et $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$ trois objets de $\mathcal{C}$. On s'intéresse à la classification des objets $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$ munis d'une filtration à trois crans (voir [**20**]) :

$$0 \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M} \tag{5}$$

et d' isomorphismes donnés : $\mathcal{M}/\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{X}, \mathcal{M}_1/\mathcal{Y} \simeq \mathcal{A}$. En posant $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}/\mathcal{Y}$, on remarque que $\mathcal{M}$ donne lieu à deux extensions simples :

$$0 \to \mathcal{Y} \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{A} \to 0$$

et

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{M}_2 \to \mathcal{X} \to 0.$$

$\mathcal{M}$ s'inscrit donc dans un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\underline{i}"] & \mathcal{M} \arrow[r, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

Suivant **[20]** , nous appelerons *extension panachée de l'extension* $\mathcal{M}_2$ *par l'extension* $\mathcal{M}_1$ un objet $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$ muni d'une filtration à trois crans (5) et d'isomorphismes donnés $\mathcal{M}_2 \simeq \mathcal{M}/\mathcal{Y}$ et $\mathcal{M}/\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{X}$ compatibles avec la filtration.

Définition 4.1.1. *Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont deux extensions panachées de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{M}_1$, on dira qu'un morphisme ϕ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ est un morphisme d'extensions panachées s'il commute avec tous les morphismes des diagrammes induits par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$.*

Lemme 4.1.2. *Pour toute extension panachée $\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{M}_1$, le groupe d'automorphismes de $\mathcal{M}$ est canoniquement isomorphe à $Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.*

Démonstration. — On considère le morphisme θ de $Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dans $Aut(\mathcal{M})$ donné par l'application : $u \mapsto id_{\mathcal{M}} + \underline{i} \circ u \circ \rho$. Montrons que θ est un isomorphisme .

1. θ est injective. En effet $\underline{i}$ étant injective et ρ étant une application surjective, la nullité de $\theta(u)$ équivaut à la nullité de u.
2. θ est surjective. Si v est un élément de $Aut(\mathcal{M})$, on considére $\overline{u} := v - id_{\mathcal{M}}$. Par définition de $Aut(\mathcal{M})$, on a $\overline{u} \circ j = 0$ et $\underline{\pi} \circ \overline{u} = 0$. Il existe donc un élément u de $Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tel que $\overline{u} = \underline{i} \circ u \circ \rho$.

□

Remarque Le lemme 4.1.2 montre que l'ensemble des morphismes entre deux extensions panachées isomorphes est un torseur sous $Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ce que l'on pourra confronter à l'énoncé de la proposition 4.3.1 ci-dessous.

Définition 4.1.3. *On note , l'ensemble des classes d'isomorphismes d'extensions panachées de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{M}_1$. On dit que $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$ sont les objets initiaux de $\mathcal{M}$. Si on ne fixe pas les extensions simples $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ on dit que $\mathcal{M}$ est une extension panachée sur $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$ et on note l'ensemble des classes d'isomorphismes d' extensions panachées de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{M}_1$ où $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ parcourent l'ensemble $Ext(\mathcal{A}, \mathcal{Y}) \times Ext(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.*

Remarque Par abus de notation, on notera $\mathcal{M}$ un représentant d'un élément $\mathcal{M}$ de $Extpan(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$.

4.2. CONDITIONS DE PANACHAGE

Une des questions naturelles posées par la définition de la notion d'extension panachée est la suivante : étant donné deux éléments $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ dans $Ext(\mathcal{Y}, \mathcal{A})$ et dans $Ext(\mathcal{A}, \mathcal{X})$, existe-til un objet $\mathcal{M}$ extension panchée de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{M}_1$?
Si un tel objet existe, on dit que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont "panachables".

Une réponse est donnée par la proposition :

Proposition 4.2.1. *Soit* $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ *un élément de* $Ext(\mathcal{A}, \mathcal{Y}) \times Ext(\mathcal{A}, \mathcal{X})$. *L'ensemble* $Extpan(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ *est non vide si et seulement si le produit de Yoneda de* $\mathcal{M}_1$ *par* $\mathcal{M}_2$ *définit un élément nul dans* $Ext^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Démonstration. — Considérons la suite exacte :$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{M}_2 \to \mathcal{X} \to 0$. Cette extension donne naissance à la suite exacte de $Ext^i(-, \mathcal{Y})$ suivante :

$$Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to Ext^1(\mathcal{M}_2, \mathcal{Y}) \to Ext^1(\mathcal{A}, \mathcal{Y}) \to Ext^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \tag{6}$$

L'application de $Ext^1(\mathcal{M}_2, \mathcal{Y})$ dans $Ext^1(\mathcal{A}, \mathcal{Y})$ correspond au *pullback* d'une extension de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{Y}$ via l'injection de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_2$. L'application de $Ext^1(\mathcal{A}, \mathcal{Y})$ dans $Ext^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ correspond au produit de Yoneda ou concaténation d'un élément de $Ext^1(\mathcal{A}, \mathcal{Y})$ par la suite exacte α.

1. Si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont " panachables" (c'est-à-dire que l'ensemble $Extpan(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ est non vide), il existe un élément $\mathcal{M}$ de $Ext^1(\mathcal{M}_2, \mathcal{Y})$ tel que l'extension $\mathcal{M}_1$ soit le *pullback* de $\mathcal{M}$ par l'injection de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_2$. Ainsi le produit de Yoneda de $\mathcal{M}_1$ par $\mathcal{M}_2$ est l'élément nul de $Ext^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.
2. Réciproquement si le produit de Yoneda de $\mathcal{M}_1$ par $\mathcal{M}_2$ est trivial, la suite exacte (6) assure l'existence d'un élément $\mathcal{M}$ dans $Ext^1(\mathcal{M}_2, \mathcal{Y})$ dont le *pullback* par l'application $\mathcal{A} \to \mathcal{M}_2$ est précisément $\mathcal{M}_1$. Un tel élément définit bien une extension panachée de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{M}_1$.

□

4.2.1. Application à la catégorie des $K[\partial]$-modules. — On considère un corps différentiel K de caractéristique nulle et de corps des constantes algébriquement clos. On se place dans la catégorie des $K[\partial]$-modules de dimension finie sur K. Dans cette catégorie, les groupes $Ext^2(-,-)$ sont toujours triviaux (*cf.* proposition 3.1.2). Deux extensions simples $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ de cette catégorie sont donc toujours panachables.

Exemple On se réfère au paragraphe 5.3 pour les notations.
En supposant donnée une représentation matricielle de $\mathcal{M}_1$(resp. $\mathcal{M}_2$) par $\begin{pmatrix} A & B_1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} X & B_2 \\ 0 & A \end{pmatrix}$), toute matrice du type $\begin{pmatrix} X & B_2 & C \\ 0 & A & B_1 \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix}$, $C \in M_{(n,r)}(K)$, fournit une représentation matricielle d'une extension panachée de $\mathcal{M}_1$ par $\mathcal{M}_2$.

4.3. ACTION DE $Ext(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ SUR $Extpan(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$

On considére un élément $\mathcal{M}$ de $Extpan(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$ et un élément $\mathcal{U}$ de $Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\underline{i}"] & \mathcal{M} \arrow[r, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{u} \mathcal{U} \xrightarrow{p} \mathcal{X} \longrightarrow 0$$

On note l'élément de $Ext^1(\mathcal{M}_2,\mathcal{Y})$ obtenu en effectuant la somme de Baer de l'extension $0 \to \mathcal{Y} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}_2 \to 0$ et du *pullback* de l'extension $\mathcal{U}$ par $\underline{\rho}$. Il est aisé de vérifier que $\mathcal{M} * \mathcal{U}$ est munie d'une structure naturelle d'extension panachée de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{M}_1$ et que l'application $Extpan(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2) \times Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to Extpan(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$ qui à $(\mathcal{M},\mathcal{U})$ associe $\mathcal{M} * \mathcal{U}$, définit une action du groupe $Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ sur $Extpan(\mathcal{M}_2,\mathcal{M}_1)$.

Proposition 4.3.1. 1. *Le groupe* $Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *agit transitivement sur l'ensemble* $Extpan(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$.

2. *Le groupe* $Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *agit librement sur l'ensemble* $Extpan(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$.

En d'autres termes, $Extpan(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$ est un torseur sous l'action de $Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Pour démontrer cette proposaition, nous passons par la structure de biextension des extensions panachées (*cf.* paragraphe 4.4.4, voir aussi **[5]**)

4.4. BIEXTENSIONS

Les catégories sont celles du chapitre 2. Ainsi $\mathbf{T}$ désigne soit une catégorie tannakienne soit une catégorie de R-modules.

4.4.1. Définition. — Soient A, B, C trois groupes abéliens. On appellera biextension de $B \times C$ par A la donnée d'un ensemble G sur lequel A agit librement et d'une application $\pi := G \to B \times C$ ainsi que de deux lois de composition : $+_1 : G \times_B G \to G$ et $+_2 : G \times_C G \to G$ où $G \times_B G$ (respectivement $G \times_C G$) désigne le produit fibré au-dessus de B (respectivement au-dessus de C). Ces diverses applications doivent de plus vérifier les conditions suivantes :

1. Pour tout $b \in B$, $G_b^2 := \pi^{-1}(\{b\} \times C)$ est un groupe abélien sous la loi $+_1$, π est un morphisme surjectif de G_b^2 dans C et via l'action de A sur G_b^2 , A est isomorphe au noyau de π.
2. Pour tout $c \in C$, $G_c^1 := \pi^{-1}(B \times \{c\})$ est un groupe abélien sous la loi $+_2$, π est un morphisme surjectif de G_c^1 dans B et via l'action de A sur G_c^1 , A est isomorphe au noyau de π.
3. On demande de plus les compatibilités suivantes :
   Etant donnés $x, y, u, v \in G$ tels que :
   $\pi(x) = (b_1, c_1), \pi(y) = (b_1, c_2), \pi(u) = (b_2, c_1), \pi(v) = (b_2, c_2)$ alors
   $(x +_1 y) +_2 (u +_1 v) = (x +_2 u) +_1 (y +_2 v)$.

On notera $Biext_A(B, C)$ l'ensemble des biextensions de $B \times C$ par A.

4.4.2. Application au cas des extensions panachées. — Le choix de munir $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$ d'une nouvelle structure a été motivé, lors de nos recherches, par l'idée de définir une notion d'extension panachée triviale, ce qui n'a cependant abouti, jusqu'à présent, que dans le cas d'une extension panachée de radical unipotent abélien. (voir paragraphe 7.1 ci-dessous)

Proposition 4.4.1. *L' application naturelle θ qui à tout élément $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$ attache le couple $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ de $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \times Ext(\mathcal{A}, \mathcal{Y})$, munit $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$ d'une structure de biextension de $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \times Ext(\mathcal{A}, \mathcal{Y})$ par $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ compatible avec l'action de $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ sur $Extpan(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1) = \theta^{-1}(\{(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)\})$.*

La démonstration de la proposition 4.4.1 fait l'objet des paragraphes suivants.

Définition de la loi $+_1$ sur $\theta^{-1}(\{\mathcal{M}_1\} \times \mathbf{Ext}(\mathcal{X}, \mathcal{A})) := \mathbf{G}_{\mathcal{M}_1}$

Soit $\mathcal{M}$ une extension panachée sur $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$, dans $G_{\mathcal{M}_1}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\underline{i}"] & \mathcal{M} \arrow[r, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

et $\overline{\mathcal{M}}$ un autre élément de $G_{\mathcal{M}_1}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j_1"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}_1"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\underline{i}_1"] & \overline{\mathcal{M}} \arrow[r, "\underline{\pi}_1"] \arrow[d, "\rho_1"] & \overline{\mathcal{M}_2} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}_1"] & 0 & (2') \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3') & (4') & &
\end{tikzcd}$$

On considére la somme de Baer $\mathcal{M}_2 + \overline{\mathcal{M}_2}$ des extensions $\mathcal{M}_2$ et $\overline{\mathcal{M}_2}$, qui définit un nouvel élément de $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

Posons :

$\mathcal{M} +_1 \overline{\mathcal{M}} := \{((m, \overline{m}) \in \mathcal{M} \times \overline{\mathcal{M}})$ tels que $\rho(m) = \rho_1(\overline{m})\} / \{(j(m_1), -j_1(m_1)),\ m_1 \in \mathcal{M}_1\}$

On réalise ensuite l'extension de $\mathcal{M}_2 + \overline{\mathcal{M}_2}$ par $\mathcal{Y}$ suivante :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r] & \mathcal{M} +_1 \overline{\mathcal{M}} \arrow[r] & \mathcal{M}_2 + \overline{\mathcal{M}_2} \arrow[r] & 0 . \\
& y \arrow[r, mapsto] & \overline{(\underline{i}(y), 0)} & & \\
& & \overline{(m, \overline{m})} \arrow[r, mapsto] & \overline{(\underline{\pi}(m), \underline{\pi}_1(\overline{m}))} &
\end{tikzcd}$$

On construit ainsi, un panachage de $\mathcal{M}_1$ par $\mathcal{M}_2 + \overline{\mathcal{M}_2}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r] & \mathcal{M} +_1 \overline{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{M}_2 + \overline{\mathcal{M}_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (2\text{''}) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

On vérifie aisément que :

Lemme 4.4.2. $+_1$ *munit* $G_{\mathcal{M}_1}$ *d'une structure de groupe abélien. On peut construire de façon similaire une loi de composition sur* $G_{\mathcal{M}_2} = \theta^{-1}(Ext(\mathcal{A}, \mathcal{Y}) \times \{\mathcal{M}_1\})$*, notée* $+_2$*. Ces deux lois vérifient les conditions de compatibilité de la définition* 4.4.1.

Lemme 4.4.3. *Pour tout élément* $\mathcal{M}_1 \in Ext(\mathcal{A}, \mathcal{Y})$*,* $G_{\mathcal{M}_1}$ *est un groupe abélien pour* $+_1$*. La restriction de* θ *à* $G_{\mathcal{M}_1}$ *est un homomorphisme de groupes surjectif de noyau* N*, isomorphe à* $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*.*

DÉMONSTRATION. — On considére $\mathcal{M} \in N$. Soit s une section de $\mathcal{M}_2$, qui par définition de N est isomorphe à $\mathcal{X} \times \mathcal{A}$. Considérons le *pullback* de (2) par s. On définit ainsi une application κ de N à valeurs dans $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.
Montrons que cette application est un isomorphisme de groupe :

injectivité de κ
Si $s^*(\mathcal{M}) = 0$, soit t une section de la suite exacte $\kappa(\mathcal{M})$ et ν l'application naturelle de $s^*(\mathcal{M})$ vers $\mathcal{M}$. L'application $\phi := \nu \circ t$ est une section de (3).
En effet, $\rho \circ \phi = \underline{\rho\pi}\phi$. Or, par définition du *pullback*, on a $t(x) = (m, x)$ et $\nu t(x) = m$, où avec $\pi(m) = (x, \bar{0})$. On en conclut que $\rho\phi(x) = x$. La suite exacte (3) est donc scindée, et $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{X}$ est élément neutre de la loi $+_1$. Ainsi κ est injective.

Surjectivité de κ
Soit $\mathcal{U}$ une extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$. L'élément $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \times \mathcal{X}$ appartient à $Extpan(\mathcal{M}_1, \mathcal{X} \times \mathcal{A})$. On représente ces deux extensions par les suites exactes courtes suivantes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{a} \mathcal{U} \xrightarrow{b} \mathcal{X} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{M}_1 \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{A} \longrightarrow 0\ .$$

$$y \longmapsto (i(y), 0)$$

$$(m_1, x) \longmapsto (x, \pi(m_1))$$

On considère l'élément $\mathcal{M} := (\mathcal{M}_1 \times \mathcal{X}) * \mathcal{U}$ dans N et on va montrer que $\kappa(\mathcal{M})$ est isomorphe à $\mathcal{U}$ en tant qu'extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$.
Par définition, on a :

$$\mathcal{M} = \{((m_1, x, u) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}, b(u) = x\}/\{(((i(y), 0), -a(y)), y \in Y\}.$$

Ainsi $\kappa(\mathcal{M}) = \{(\overline{(m_1, x, u)}, x') \in \mathcal{M} \times \mathcal{X},\ \pi(m_1) = 0 \text{ et } x = x'\}$ (on peut donc écrire $m_1 = i(y)$ car $\pi(m_1) = 0$).

On va construire un isomorphisme d'extensions (de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$) de $\kappa(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{U}$ que l'on notera ϕ :

$$\phi : \qquad \kappa(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{U}$$

$$(\overline{(m_1, x, u)}, x') \longmapsto u + a(y)\ \ (m_1 = i(y))$$

1. ϕ est bien définie. En effet, si $\overline{(m_1, x, u)} = \overline{(n_1, x_1, u_1)}$, alors il existe $(y, z, z_1) \in \mathcal{Y}^3$ tel que $m_1 = i(z) = n_1 + i(y) = i(z_1) + i(y)$ (on en déduit, i étant injective que $z = y+z_1$) et $x = x_1$ et $u = u_1 - a(y)$. Donc $u+a(z) = u_1 - a(y) + a(y+z_1) = u_1 + a(z_1)$. L'application ϕ est donc indépendante du représentant choisi.
2. L'application ϕ est un morphisme injectif. En effet, si $u + a(y) = 0$, alors $b(u) = x = 0 = x'$ et $\overline{(m_1, x, u)} = \overline{(i(y), 0, -a(y))} = 0$.
3. ϕ est surjective : pour tout $u \in \mathcal{U}$, il est clair que $(\overline{(0, b(u), u)}, b(u))$ est un antécédent de u par ϕ.

Il reste à vérifier la compatibilité de l'isomorphisme ϕ avec les structures d'extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ de $\kappa(\mathcal{M})$ et de $\mathcal{U}$. On écrit ainsi des représentants de ces deux extensions :

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{\alpha} \kappa(\mathcal{M}) \xrightarrow{\beta} \mathcal{X} \longrightarrow 0$$

$$y \longmapsto (\overline{(i(y), 0, 0)}, 0)$$

$$(\overline{(m_1, x, u)}, x') \longmapsto x = b(u)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{a} \mathcal{U} \xrightarrow{b} \mathcal{X} \longrightarrow 0$$

On obtient alors $\phi \circ \alpha(y) = a(y)$ et $b \circ \phi((\overline{(m_1, x, u)}, x')) = b(u) = x = \beta((\overline{(m_1, x, u)}, x'))$. On a démontré que ϕ est un isomorphisme d'extensions entre $\kappa(\mathcal{M})$ et $\mathcal{U}$ et ainsi que κ est surjective.

On conclut que κ est un isomorphisme . □

4.4.3. Compatibilité des lois $+_1$ et $+_2$ avec l'action de $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. —

Lemme 4.4.4. *Soient $\mathcal{M}, \overline{\mathcal{M}} \in Extpan(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ et $\mathcal{U} \in Ext(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. On a :*

$$(\mathcal{M} +_1 \overline{\mathcal{M}}) * \mathcal{U} = (\mathcal{M} * \mathcal{U}) +_1 \overline{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}) +_1 (\overline{\mathcal{M}} * \mathcal{U}),$$

et

$$(\mathcal{M} +_2 \overline{\mathcal{M}}) * \mathcal{U} = (\mathcal{M} * \mathcal{U}) +_2 \overline{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}) +_2 (\overline{\mathcal{M}} * \mathcal{U}).$$

Démonstration. — On représente $\mathcal{U}$ sous par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{a} \mathcal{U} \xrightarrow{b} \mathcal{X} \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{M} +_1 \overline{\mathcal{M}} = \{(m, \overline{m}) \ \in (\mathcal{M}, \overline{\mathcal{M}}),\ \rho(m) = \rho_1(\overline{m})\}/\{(j(m_1), -j_1(m_1)),\ m_1 \in \mathcal{M}_1\}$$

Ainsi :

$$(\mathcal{M} +_1 \overline{\mathcal{M}}) * \mathcal{U} = \{(\overline{(m, \overline{m})}, u) \ \in (\mathcal{M} +_1 \overline{\mathcal{M}}) \times \mathcal{U},\ \rho(m) = b(u)\}/\{(\overline{(\underline{i}(y), 0)}, -a(y))\ y \ \in \mathcal{Y}\}$$

D'autre part :

$$\mathcal{M} * \mathcal{U} = \{(m, u) \ \in \mathcal{M} \times \mathcal{U},\ \rho(m) = b(u)\}/\{(\underline{i}(y), -a(y)),\ y \in \mathcal{Y}\}$$

Donc

$$(\mathcal{M} * \mathcal{U}) +_1 \overline{\mathcal{M}} = \{(\overline{(m, u)}, \overline{m}) \ \in (\mathcal{M} * \mathcal{U}) \times \overline{\mathcal{M}},\ \rho(m) = \rho_1(\overline{m})\}/\{(\overline{(j(m_1), 0)}, -j_1(m_1))\ m_1 \in \mathcal{M}_1\}$$

Il est alors évident que $(\mathcal{M} +_1 \overline{\mathcal{M}}) * \mathcal{U} = (\mathcal{M} * \mathcal{U}) +_1 \overline{\mathcal{M}}$. Les formules restantes relèvent du même type de démonstration. □

4.4.4. Démonstration de la proposition 4.3.1. — On a vu précédemment que $Extpan(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ est muni d'une action de $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. L'étude de la structure de biextension des extensions panachées permet de montrer que cette action fait de $Extpan(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1)$ un torseur sous $Ext(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Soient $\mathcal{M}, \overline{\mathcal{M}} \in Extpan(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$. On utilise la structure de biextension des extensions panachées et on construit $\mathcal{M} -_1 \overline{\mathcal{M}}$. Cette nouvelle extension s'inscrit dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r] & \mathcal{M} -_1 \overline{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

Considérons la suite exacte (4). Elle donne lieu à la suite illimitée à droite suivante :

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \longrightarrow Hom(\mathcal{M}_2,\mathcal{Y}) \longrightarrow Hom(\mathcal{A},\mathcal{Y})$$

$$\longrightarrow Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \xrightarrow{\underline{\rho}^*} Ext^1(\mathcal{M}_2,\mathcal{Y}) \xrightarrow{\underline{j}^*} Ext^1(\mathcal{A},\mathcal{Y})$$

$$\xrightarrow{e} Ext^2(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \qquad \cdots$$

Or, sous l'hypothése de panachage, l'image de $\mathcal{M} -_1 \overline{\mathcal{M}}$ par l'application e est triviale. Ainsi on obtient $Ker(\underline{j}^*) = Im(\underline{\rho}^*)$. La suite exacte (1) est nulle dans $Ext^1(\mathcal{A},\mathcal{Y})$ et correspond à $\underline{j}^*(2)$. Ainsi, il existe un élément $\mathcal{U}$ de $Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ tel que (2) soit le *pullback* par $\underline{\rho}$ de $\mathcal{U}$. Compte tenu de la définition de l'action de $Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ sur $Extpan(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$, on en déduit que $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} * \mathcal{U}$.

Soit $\mathcal{M}$ une extension panachée et $\mathcal{U}$ un élément de $Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, tels que les extensions panachées $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M} * \mathcal{U}$ soient isomorphes.

On considère les diagrammes suivants définissant respectivement $\mathcal{M}$ et $\mathcal{U}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\underline{i}"] & \mathcal{M} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{U} \xrightarrow{\beta} \mathcal{X} \longrightarrow 0.$$

On a par définition :

$$\mathcal{M} * \mathcal{U} = \{(m,u) \in \mathcal{M} \times \mathcal{U},\ \beta(u) = \rho(m)\}/\{(-\underline{i}(y), \alpha(y)),\ y \in \mathcal{Y}\}.$$

On note ϕ l'isomorphisme d'extensions panachées de $\mathcal{M} * \mathcal{U}$ dans $\mathcal{M}$.

Montrons que $\mathcal{U}$ est une extension triviale. On a $\underline{\pi}(\phi(\overline{(m,u)})) = \underline{\pi}(m)$, donc $(\phi(\overline{(m,u)}) - m)$ est un élément de $\mathcal{Y}$. (Convention : par le calcul , on aboutit à $\underline{i}(y)$, que l'on écrira y).
Soient u, $m \in \mathcal{M}$ tels que $\rho(m) = \beta(u)$. L'ensemble des éléments m' de M vérifiant $\rho(m') = \beta(u)$ est $\{m + j(m_1),\ m_1 \in\ M_1\}$.
On a $\phi((m+j(m_1), u) - (m+j(m_1)) = \phi((m,u)) - m + \phi(j(m_1),0) - j(m_1) = \phi((m,u)) - m$ (car $\phi(j(m_1),0) - j(m_1))$.
De plus, si $\overline{(m,u)} = \overline{(m'_0, u')}$, alors il existe $y \in \mathcal{Y}$ tel que $m = m' - \underline{i}(y)$ et $u = u' + \alpha(y)$.
Ainsi, pour $u \in \mathcal{U}$, $\phi((m,u)) - m$ ne dépend pas du choix de $m \in \mathcal{M}$ tel que $\rho(m) = \beta(u)$.
On notera $m(u)$ un tel élément.

Nullité de l'extension $\mathcal{U}$.
On considère l'application

$$\kappa : \quad \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$$

$$u \longmapsto (\beta(u), \phi((m(u),u)) - m(u)).$$

Lemme 4.4.5. *L'application κ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. — Si $\beta(u) = 0$ et $\phi((m(u),u)) - m(u) = 0$ alors il existe $y \in \mathcal{Y}$, et $m_1 \in \mathcal{M}_1$ tels que $u = \alpha(y)$ et $m = j(m_1)$. Dans ce cas $\phi((m(u),u)) - m(u) = 0 = \alpha(y)$. Donc $y = 0$ et $u = 0$. L'application θ est injective.
Soient $(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. On choisit $(m,u') \in \mathcal{M} \times \mathcal{U}$ tels que $\beta(u') = \rho(m) = x$. Alors il existe $y_1 \in \mathcal{Y}$ tel que $\phi((m,u')) - m = \alpha(y_1)$. On obtient un antécédent de (x,y) en considérant $u = u' + \alpha(y - y_1)$. L'application θ est surjective.
*L'application θ est un isomorphisme d'extension.*En effet, pour tout $y \in \mathcal{Y}$, $m(y) = 0$ donc $\phi((0,\alpha(y)) - 0 = y$. Pour tout x et y tels que $\theta(u) = (x,y)$, on a $\beta(u) = x$. L'application θ est bien un isomorphisme d'extensions entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
On a ainsi démontré la proposition 4.3.1.

□

Trouver l'extension $\mathcal{U}$.

-*en passant par* $\mathcal{M}_1$ *:*
On utilise la structure de biextension des extensions panachées et on construit $\mathcal{M} -_1 \overline{\mathcal{M}}$. On obtient $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} * \mathcal{U}$, où $\mathcal{U} \in Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

-*en passant par* $\mathcal{M}_2$ *:*
On utilise la structure de biextension des extensions panachées et on construit $\mathcal{M} -_2 \overline{\mathcal{M}}$. Cette nouvelle extension s'inscrit dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r] & \mathcal{M} -_2 \overline{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 & (2) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

Considérons la suite exacte (1). Elle donne lieu à la suite illimitée à droite suivante :

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \longrightarrow Hom(\mathcal{X}, \mathcal{M}_1) \longrightarrow Hom(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \\
&\longrightarrow Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \xrightarrow{i_*} Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{M}_1) \xrightarrow{\pi_*} Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \\
&\longrightarrow Ext^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad \cdots
\end{aligned}$$

Or $Ext^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ et $\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_2$ est nulle dans $Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. On en déduit que $\mathcal{M} -_2 \overline{\mathcal{M}}$ appartient au noyau de π_*, donc à l'image de i_*.
Il existe donc $\mathcal{V} \in Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tel que $\mathcal{M} -_2 \overline{\mathcal{M}} = i_*(\mathcal{V})$. Ceci revient à dire que $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} * \mathcal{V}$.

Comparaison des deux méthodes.

On a ainsi obtenu $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} * \mathcal{U} = \overline{\mathcal{M}} * \mathcal{V}$. Comme $Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ agit librement sur $Extpan(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, on en conclut que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ définissent le même élément de $Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

CHAPITRE 5

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES EXTENSIONS PANACHÉES

On reprend les notations du chapitre 1. En particulier, $\mathbf{1}$ désigne l'objet unité de la catégorie tannakienne $\mathbf{T}$. Les opérations définies ici font partie intégrale du calcul du radical unipotent du groupe de Galois d'une extension panachée.

5.1. REDUCTION AU CAS $\mathcal{X} = \mathbf{1}$

L'opération de réduction introduite ci-dessous est une extension de l'opération $\mathfrak{R}$ définie pour les extensions simples, au cadre des extensions panachées.

Soit $\mathcal{M}$ une extension panachée sur $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{A}$, dans $G_{\mathcal{M}_1}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\underline{i}"] & \mathcal{M} \arrow[r, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

Effectuons l'opération de réduction sur les suites (3) et (4). On obtient les extensions suivantes :

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{X}, \mathcal{M}_1) \xrightarrow{j_1} \mathfrak{R}(\mathcal{M}) := \overline{\mathcal{M}} \xrightarrow{\rho_1} 1 \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\underline{j}_1} \mathfrak{R}(\mathcal{M}_2) := \overline{\mathcal{M}_2} \xrightarrow{\underline{\rho}_1} 1 \longrightarrow 0.$$

On considére aussi la suite exacte obtenue en tensorisant (1) par $\mathcal{X}^*$:

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \xrightarrow{i_1} \overline{\mathcal{M}_1} := Hom(\mathcal{X}, \mathcal{M}_1) \xrightarrow{\pi_1} Hom(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \longrightarrow 0.$$

Proposition 5.1.1. *$\overline{\mathcal{M}}$ est une extension panachée de $\overline{\mathcal{M}_1}$ par $\overline{\mathcal{M}_2}$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{1}, Hom(\mathcal{X}, \mathcal{A}), Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$.*

DÉMONSTRATION. — :

Il s'agit de construire la suite exacte (2) correspondant à l'extension $\overline{\mathcal{M}}$. Considérons l'extension suivante :

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \xrightarrow{\underline{i}_1} \overline{\mathcal{M}} \xrightarrow{\underline{\pi}_1} \overline{\mathcal{M}_2} \longrightarrow 0$$

$$\phi \longmapsto (\underline{i} \circ \phi, 0)$$

$$(\psi, \lambda) \longmapsto (\underline{\pi} \circ \psi, \lambda)$$

Vérifions l'exactitude de l'extension construite :

On rappelle que :

$$\overline{\mathcal{M}} = \{(\psi, \lambda) \in Hom(\mathcal{X}, \mathcal{M}) \times K,\ \rho \circ \psi = \lambda id_{\mathcal{X}}\}$$

et :

$$\overline{\mathcal{M}_2} = \{(\psi, \lambda) \in Hom(\mathcal{X}, \mathcal{M}_2) \times K,\ \underline{\rho} \circ \psi = \lambda id_{\mathcal{X}}\}.$$

Injectivité de $\underline{i}_1$

Tout d'abord, $\rho \circ \underline{i} \circ \phi = 0.id_{\mathcal{X}}$; donc $\underline{i}_1$ définit bien une application de $Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dans $\overline{\mathcal{M}}$. L'injectivité de $\underline{i}$ assure l'injectivité de $\underline{i}_1$.

$\mathbf{Ker(\underline{\pi}_1) = Im(\underline{i}_1)}$

Comme $\underline{\pi} \circ \underline{i} = 0$, on a $Im(\underline{i}_1) \subset Ker(\underline{\pi}_1)$. Réciproquement, soit $(\psi, \lambda) \in \overline{\mathcal{M}}$ dans $Ker(\underline{\pi}_1)$. Alors, $\lambda = 0$ et $\underline{\pi} \circ \psi = 0$. Comme $ker(\underline{\pi}) = Im(\underline{i})$, on conclut qu'il existe $\phi \in Hom(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tel que $\psi = \underline{i} \circ \phi$.

Surjectivité de $\underline{\pi}_1$

Elle découle de la surjectivité de $\underline{\pi}$ et du fait que $\rho = \underline{\rho} \circ \underline{\pi}$.

On vérifie alors aisément que $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mathcal{M}_1}, \overline{\mathcal{M}_2}$ *se panachent* :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Hom(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & \overline{\mathcal{M}_1} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "j_1"] & Hom(\mathcal{X},\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}_1"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & Hom(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \arrow[r, "\underline{i}_1"] & \overline{\mathcal{M}} \arrow[r, "\underline{\pi}_1"] \arrow[d, "\rho_1"] & \overline{\mathcal{M}_2} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}_1"] & 0 & (2) \\
 & & 1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

□

5.2. OPERATIONS SUR $\mathcal{X}$ ET $\mathcal{Y}$

On considère une extension panachée $\mathcal{M}$ sur les objets semi-simples $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\underline{i}"] & \mathcal{M} \arrow[r, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

Etant donné $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{Y}_1$ et des morphismes $\mu : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}$ et $\nu : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_1$, on va construire une application *sv* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$ dans $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{A}, \mathcal{Y}_1)$ dont le comportement vis-à- vis de la structure de torseur de ces deux espaces sera explicité ultérieurement.

5.2.1. *Pousser et tirer*. — Effectuons le *pushout* de la suite exacte (2) par l'application ν.
On obtient une extension de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{Y}_1$ notée $\tilde{\mathcal{M}}$.
De même, on note $\tilde{\mathcal{M}}_1$ l'extension de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{Y}_1$ obtenue par *pushout* de la suite exacte (1) par ν.
Par définition :

1. $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathcal{Y}_1 / \{(\nu(y), -\underline{i}(y)),\ y \in \mathcal{Y}\}$.
2. $\tilde{\mathcal{M}}_1 = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{Y}_1 / \{(\nu(y), -i(y)),\ y \in \mathcal{Y}\}$.

On forme ensuite la suite exacte :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{\mathcal{M}}_1 \arrow[r, "\tilde{j}"] & \tilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\tilde{\rho}"] & \mathcal{X} \arrow[r] & 0 \\
 & \overline{(m_1, y_1)} \arrow[r, mapsto] & \overline{(j(m_1), y_1)} & & \\
 & & \overline{(m, y_1)} \arrow[r, mapsto] & \rho(m) &
\end{tikzcd}$$

Il est aisé de vérifier que cette suite permet de considérer $\tilde{\mathcal{M}}$ comme une extension panachée sur les objets initiaux $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}_1$ s'inscrivant dans le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y}_1 \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d, equal] & \tilde{\mathcal{M}}_1 \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{j}"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y}_1 \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{\mathcal{M}} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{\rho}"] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}
$$

Effectuons maintenant le *pullback* des suites exactes (3) et (4) par μ ; on obtient ainsi une extension de $\mathcal{X}_1$ par $\tilde{\mathcal{M}}_1$ notée $\overline{\mathcal{M}}$ et une extension de $\mathcal{Y}_1$ par $\mathcal{A}$ notée $\overline{\mathcal{M}_2}$. On vérifie facilement que $\overline{\mathcal{M}}$ est une extension panachée sur les trois objets $\mathcal{X}_1, \mathcal{A}, \mathcal{Y}_1$.
On a par définition :

$$\overline{\mathcal{M}} = \{(m, x_1, y_1) \in \mathcal{M} \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1,\ \rho(m_0) = \mu(x_1)\}\{(\underline{i}(y), 0, -\nu(y)),\ y \in \mathcal{Y}\}.$$

5.2.2. *Tirer et pousser.* — On vérifie ici que la construction de $sv(\mathcal{M})$ ne dépend pas de l'ordre des opérations que l'on a effectuées sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

En effet, on obtient de même une extension panachée sur $\mathcal{X}_1, \mathcal{A}, \mathcal{Y}_1$ en effectuant d'abord le *pullback* des suites exactes (3) et (4) par μ et ensuite le *pushout* par ν. On vérifie que l'extension panachée obtenue est isomorphe à $\overline{\mathcal{M}}$. On a donc bien défini une application sv de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$ dans $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{A}, \mathcal{Y}_1)$.

5.2.3. Action des torseurs. — Soit $\mathcal{U}$ une extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$. En effectuant le *pushout* de cette extension par ν et ensuite le *pullback* de l'extension obtenue par μ, on construit une extension de $\mathcal{X}_1$ par $\mathcal{Y}_1$ notée $\phi(\mathcal{U})$.

Lemme 5.2.1. $sv(\mathcal{M} * \mathcal{U}) = sv(\mathcal{M}) * \phi(\mathcal{U})$

DÉMONSTRATION. — Soit $\mathcal{U}$ une extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$, que l'on peut écrire :

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{a} \mathcal{U} \xrightarrow{b} \mathcal{X} \longrightarrow 0\,.$$

Par définition, on a :

$$sv(\mathcal{M}) = \{(m, x_1, y_1) \in \mathcal{M} \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1\ ,\ \rho(m) = \mu(x_1)\}/\{(\underline{i}(y), 0, -\nu(y)),\ y \in \mathcal{Y}\}$$

et

$$\phi(\mathcal{U}) = \{(u, x_1, y_1) \in \mathcal{U} \times \mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1\ ,\ b(u) = \mu(x_1)\}/\{(a(y), 0, -\nu(y)),\ y \in \mathcal{Y}\}.$$

Ainsi :

$$sv(\mathcal{M}) * \phi(\mathcal{U}) = \{(\overline{(m, x_1, y_1)}, \overline{(u, x_2, y_2)}) \in sv(\mathcal{M}) \times \phi(\mathcal{U})\ ,\ x_1 = x_2\}/\{(\overline{(0,0,h)}, \overline{(0,0,-h)},\ h \in \mathcal{Y}_1\}.$$

D'autre part, on peut écrire de manière ensembliste :

$$\mathcal{M} * \mathcal{U} := \{(m, u) \in \mathcal{M} \times \mathcal{U},\ \ \rho(m) = b(u)\}/\{(\underline{i}(y), -a(y)),\ y \in \mathcal{Y}\}.$$

Ainsi

$$sv(\mathcal{M} * \mathcal{U}) := \{(\overline{(m, u)}, x_1, y_1),\ \rho(m) = \mu(x_1)\}/\{(\overline{(\underline{i}(y), 0)}, 0, -\nu(y)),\ y \in \mathcal{Y}\}$$

On va construire un isomorphisme θ entre $sv(\mathcal{M} * \mathcal{U})$ et $sv(\mathcal{M}) * \phi(\mathcal{U})$:

$$\theta = \quad sv(\mathcal{M} * \mathcal{U}) \longrightarrow sv(\mathcal{M}) * \phi(\mathcal{U})$$

$$\overline{(\overline{(m, u)}, x_1, y_1)} \longmapsto \overline{(\overline{(m, x_1, y_1)}, \overline{(u, x_1, 0)})}.$$

1. *L'application θ est bien définie.*
   Si $\overline{(\overline{(m_1, u_1)}, x_1, y_1)} = \overline{(\overline{(m_2, u_2)}, x_2, y_2)}$ il existe $y, z \in \mathcal{Y}$ tels que
   (a) $m_1 = m_2 + \underline{i}(y) + \underline{i}(z)$.
   (b) $x_1 = x_2$.
   (c) $u_1 = u_2 - a(z)$.
   (d) $y_1 = y_2 - \nu(y)$.
   et $(m_1, x_1, y_1) = (m_2, x_2, y_2) + (\underline{i}(y + z), 0, -\nu(y + z)) + (0, 0, \nu(z))$ et $(u_1, x_1, 0) = (u_2, x_2, 0) + (-a(z), 0, \nu(z)) + (0, 0, -\nu(z))$. On en déduit que $\overline{(\overline{(m_1, x_1, y_1)}, \overline{(u_1, x_1, 0)})} = \overline{(\overline{(m_2, x_2, y_2)}, \overline{(u_2, x_2, 0)})}$ dans $sv(\mathcal{M}) * \phi(\mathcal{U})$. L'application θ est donc bien définie.
2. *θ est injective.*
   Si $\overline{(\overline{(m, x, y_1)}, \overline{(u, x, 0)})} = 0$ dans $sv(\mathcal{M}) * \phi(\mathcal{U})$ alors il existe $h \in \mathcal{Y}_1$, $z, k \in \mathcal{Y}$ tels que :
   (a) $m = \underline{i}(z)$ et $u = a(k)$.
   (b) $x = 0$.

(c) $y_1 = -\nu(z) + h$ et $0 = -\nu(k) - h$.

On en déduit que $h = -\nu(k)$ et que $y_1 = -\nu(z+k)$. Ainsi, $(m,u) = (\underline{i}(z+k),0) + (-\underline{i}(k), a(k))$, donc $\overline{(m,u)} = \overline{(\underline{i}(z+k),0)}$ dans $\mathcal{M} * \mathcal{U}$. On en déduit que $(\overline{(m,u)}, x, y_1) = (\overline{(\underline{i}(z+k),0)}, 0, -\nu(z+k))$, ce qui correspond à la classe nulle dans $sv(\mathcal{M} * \mathcal{U})$.

3. *L'application θ est surjective.*
   Soit $k = \overline{(\overline{(m_1,x_1,y_1)}, \overline{(u_1,x_1,y_2)})}$ dans $sv(\mathcal{M}) * \phi(\mathcal{U})$. Par définition des classes d'équivalence, on a : $\overline{(\overline{(m_1,x_1,y_1)}, \overline{(u_1,x_1,y_2)})} = \overline{(\overline{(m_1,x_1,y_1+y_2)}, \overline{(u_1,x_1,0)})}$. Il est clair que $\overline{(\overline{(m,u)}, x_1, y_1+y_2)}$ est un antécédent de k par θ.

On vient de démontrer que θ est un isomorphisme entre $sv(\mathcal{M} * \mathcal{U})$ et $sv(\mathcal{M}) * \phi(\mathcal{U})$. Il reste à démontrer que θ commute avec les morphismes d'extensions. On a :

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y}_1 \xrightarrow{\quad e \quad} sv(\mathcal{M} * \mathcal{U}) \xrightarrow{\quad l \quad} \mathcal{X}_1 \longrightarrow 0$$

$$y_1 \longmapsto \overline{(0,0,0,y_1)}$$

$$\overline{(\overline{(m_1,u_1)}, x_1, y_1)} \longmapsto x_1$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y}_1 \xrightarrow{\quad \epsilon \quad} sv(\mathcal{M}) * \phi(\mathcal{U}) \xrightarrow{\quad \lambda \quad} \mathcal{X}_1 \longrightarrow 0$$

$$y_1 \longmapsto \overline{(\overline{(0,0,y_1)}, \overline{0})}$$

$$\overline{(\overline{(m_1,x_1,y_1)}, \overline{(u_1,x_1,y_2)})} \longmapsto x_1.$$

On a bien

$$\theta \circ e(y_1) = \overline{(\overline{(0,0,y_1)}, \overline{0})} = \epsilon(y_1) \text{ et } \lambda \circ \theta(\overline{(\overline{(m_1,u_1)}, x_1, y_1)}) = x_1 = l(\overline{(\overline{(m_1,u_1)}, x_1, y_1)}).$$

$\square$

5.3. REPRESENTATIONS MATRICIELLES D'EXTENSIONS PANACHEES DE $\mathcal{D}_K$-MODULES

Afin de donner une expression plus concrète des opérations définies précédemment, on les exprime dans les paragraphes suivants sous une forme matricielle.

5.3.1. Matrice de connexion d'une extension panachée. — soit $\mathcal{M}$ une extension panachée de $\mathcal{D}_K$-modules :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0(1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\underline{i}"] & \mathcal{M} \arrow[r, shift left, "\underline{\pi}"] \arrow[d, shift left, "\rho"] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[d, shift left, "\underline{\rho}"] & 0(I) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[u, shift left, "t"] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[u, shift left, "\tau"] \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(II) (2)

On note F_K le foncteur oubli de la catégorie des $\mathcal{D}_K$-modules vers celle des espaces vectoriels sur K.

Les sections s et t sont des sections K-linéaires. On peut leur associer les cocycles :

1. $\zeta^1_{\mathcal{M}} := \partial s - s\partial = i \circ \phi_1$ où $\phi_1 \in Hom_{Vect_K}(\mathcal{A}, \mathcal{Y}) := Hom_{Vect_K}(F_K(\mathcal{A}), F_K(\mathcal{Y}))$.
2. $\zeta^2_{\mathcal{M}} := \partial t - t\partial = j \circ \phi_2 \ \in Hom_{Vect_K}(\mathcal{X}, \mathcal{M}_1)$.

dont les classes dans $Hom(\mathcal{A}, \mathcal{M}_1)(K))/\nabla Hom(\mathcal{A}, \mathcal{M}_1)(K))$ (respectivement dans $Hom(\mathcal{X}, \mathcal{M})(K))/\nabla Hom(\mathcal{X}, \mathcal{M})(K)))$ sont indépendantes des sections s et t.

On note $(y_i)_{i=1..n}$ une $\mathcal{D}_K$-base de $\mathcal{Y}$, $(a_i)_{i=1..s}$ une $\mathcal{D}_K$-base de $\mathcal{A}$ et $(x_i)_{i=1..r}$ une $\mathcal{D}_K$-base de $\mathcal{X}$.

Lemme 5.3.1. *La famille* $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} := \{(\underline{i}(y_k))_{k=1..n}, (j \circ s(a_k))_{k=1..s}, (t(x_k))_{k=1..r}\}$ *est une* K-*base du* $\mathcal{D}_K$-*module* $\mathcal{M}$.

Etude de l'action de ∂ sur $\mathcal{B}$

1. $\partial \underline{i}(y_k) = \underline{i}(\partial y_k)$.
2. $\partial j \circ s(a_k) = j(\partial s - s\partial)(a_k) + j \circ s(\partial(a_k)) = \underline{i}\phi_1(a_k) + j \circ s(\partial a_k)$.
3. $\partial t(x_k) = (\partial t - t\partial)(x_k) + t(\partial x_k) = j \circ \phi_2(x_k) + t(\partial x_k)$.

Soient :

1. $Y \in M_n(K)$ la représentation matricielle dans la base $(y_k)_{k=1..n}$ de l'action de ∂ sur $\mathcal{Y}$.

2. $A \in M_s(K)$ la représentation matricielle dans la base $(a_k)_{k=1..s}$de l'action de ∂ sur $\mathcal{A}$.
3. $X \in M_r(K)$ la représentation matricielle dans la base $(x_k)_{k=1..r}$ de l'action de ∂ sur $\mathcal{X}$.
4. $B_1 \in M_{(s,n)}(K)$ la représentation matricielle de ϕ_1 dans les bases $(a_k)_{k=1..s}$ et $(y_k)_{k=1..n}$.
5. $\begin{pmatrix} C \\ B_2 \end{pmatrix}$ avec $C \in M_{(r,n)}(K)$ et $B_2 \in M_{(r,s)}(K)$ la représentation matricielle de ϕ_2 dans les bases $(x_k)_{k=1..r}$ et $(\underline{i}(y_k))_{k=1..n}, (s(a_k))_{k=1..s}$.

Notation

1. Pour tout $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{Z}$(resp. $\mathcal{U}$), $\partial - Z$ (respectivement $\partial - U$) une représentation matricielle de sa connexions, on note $\nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{Z})} := \partial. + .U - Z.$, la représentation matricielle de $\underline{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{Z})$ correspondante.

2. Si $(\partial - H)Y = 0$ est un système différentiel, on note $\mathfrak{H}$ une de ses matrices fondamentales de solutions.

Proposition 5.3.2. *La représentation matricielle de l'action de ∂ sur $\mathcal{M}$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ est donnée par :*

$$M := \begin{pmatrix} Y & B_1 & C \\ 0 & A & B_2 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

On peut ainsi écrire une matrice fondamentale de solutions sous la forme :

$$\mathfrak{M} := \begin{pmatrix} \mathfrak{Y} & \mathfrak{P}\mathfrak{A} & \mathfrak{R}\mathfrak{X} \\ 0 & \mathfrak{A} & \mathfrak{Q}\mathfrak{X} \\ 0 & 0 & \mathfrak{X} \end{pmatrix}$$

où $\mathfrak{P}$ (respectivement $\mathfrak{Q}$) vérifie $\nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{Y})}\mathfrak{P} = B_1$(respectivement $\nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{A})}\mathfrak{Q} = B_2$) et $\mathfrak{R}$ vérifie $\nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathfrak{R}) = C + B_1\mathfrak{Q}$.

Remarque Si, au lieu du couple de sections (s,t), on avait pris (σ,τ) en imposant que les changements de section soit cohérents vis-à-vis du " panachage " alors, on aurait pu écrire une matrice fondamentale de solutions pour $\mathcal{M}$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Y} & \mathfrak{P}\mathfrak{A} & \tilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{X} \\ 0 & \mathfrak{A} & \mathfrak{Q}\mathfrak{X} \\ 0 & 0 & \mathfrak{X} \end{pmatrix}$$

avec $\mathfrak{R} - \tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ et $\nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\tilde{\mathfrak{R}}) = C - \mathfrak{P}B_2$.

Effet d'un changement de jauge sur la représentation matricielle

Soit H une matrice de changement de jauge, c'est-à-dire une matrice représentant un changement de base de la connexion $\nabla_{\mathcal{M}}$ du type :

$$H = \begin{pmatrix} Id & P & R \\ 0 & Id & Q \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}$$

Après changement de jauge par H, la représentation matricielle M devient :

$$M[H] := H'H^{-1} + HMH^{-1},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{array}{c} M[H] = \begin{pmatrix} Y & B_1 + \nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{Y})}(P) & C\{H\} \\ 0 & A & B_2 + \nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{A})}(Q) \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} \\ \text{où } C\{H\} := C + \nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(R) - \nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{Y})}(P)Q + PB_2 - B_1Q \end{array}}$$

Remarque L'effet du changement de jauge précédent sur la matrice M montre que l'on ne peut interpréter de façon intrinsèque C comme une matrice d'extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ alors que par exemple B_1 est bien une matrice d'extension de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{Y}$, car la jauge la modifie par la connexion matricielle de $\underline{Hom}(\mathcal{A},\mathcal{Y})$.

5.3.2. Représentation matricielle de l'action de ∂ sur $\mathcal{M} * \mathcal{U}$. — On reprend les notations du paragraphe précédent et du paragraphe 4.3.

Pour toute extension $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$, représentée par la suite exacte :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "a"] & \mathcal{U} \arrow[r, shift left, "b"] & \mathcal{X} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

il existe une application K-linéaire ϕ_3 de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ telle que $\partial\beta - \beta\partial = a \circ \phi_3$.
Soit U la matrice de ϕ_3 dans les bases $(x_k)_{k=1..r}$ et $(y_k)_{k=1..n}$.

Par définition :

$$\mathcal{M} * \mathcal{U} = \{(m,u) \in \mathcal{M} \times \mathcal{U} \ , \rho(m) = b(u)\}/\{(\underline{i}(y), -a(y)) \ y \in \mathcal{Y}\}.$$

Ainsi :

1. une base $\mathcal{B}_{\mathcal{M}*\mathcal{U}}$ est donnée par la famille $(\overline{(\underline{i}(y_k), 0)})_{k=1..n}, (\overline{(j \circ s(a_k), 0)})_{k=1..s}, (\overline{(t(x_k), \beta(x_k))})_{k=1..s}$.
2. $\zeta^1_{\mathcal{M}*\mathcal{U}} := \overline{(\zeta^1_{\mathcal{M}}, 0)}$.
3. Une section de la suite (2) est donnée par $x \mapsto \overline{(t(x), c(x))}$.
   Ainsi $\zeta^2_{\mathcal{M}*\mathcal{U}} = \overline{(\zeta^2_{\mathcal{M}}, \partial\beta - \beta\partial)} = \overline{(\zeta^2_{\mathcal{M}} + \underline{i}(\partial\beta - \beta\partial), 0)}$.

Proposition 5.3.3. *On obtient la représentation matricielle suivante de la connexion de $\mathcal{M} * \mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathcal{M}*\mathcal{U}}$:*

$$\begin{pmatrix} Y & B_1 & C+U \\ 0 & A & B_2 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

Trouver le torseur(on se réfère au paragraphe 4.4.2)

Soient $\mathcal{M}$ (resp. $\overline{\mathcal{M}}$) un élément de $Extpan(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ dont une représentation matricielle est donnée par : $M = \begin{pmatrix} X & B_2 & C \\ 0 & A & B_1 \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix}$(resp. $\overline{M} = \begin{pmatrix} X & \overline{B_2} & \overline{C} \\ 0 & A & \overline{B_1} \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix}$ où $\overline{B_i} = B_i + \nabla_{Hom}(P_i)$ pour $i = 1, 2$).
D'après la proposition 4.3.1, il existe un unique élément $\mathcal{U}$ dans $Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tel que $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} * \mathcal{U}$. On donne ici une représentation matricielle de l'extension $\mathcal{U}$.

Par un changement de jauge du type $\begin{pmatrix} 1 & P_2 & R \\ 0 & 1 & P_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on se ramène à une représentation matricielle de $\overline{\mathcal{M}}$ de la forme $\begin{pmatrix} X & B_2 & \tilde{C} \\ 0 & A & B_1 \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix}$. L'extension $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ telle que $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} * \mathcal{U}$ admet alors comme matrice de connexion : $\begin{pmatrix} X & C - \tilde{C} \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

5.3.3. Traduction matricielle de la construction $sv(\mathcal{M})$. — On se réfère au paragraphe 5.2 , en ce qui concerne les constructions mises en jeu.

Supposons que $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$.
On a donné au paragraphe 5.2 une construction d' extension pananchée sur $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{Y}_1$ déduite de $\mathcal{M}$ par le biais d'opérations élémentaires.
En reprenant les notations du paragraphe précédent et en supposant avoir écrit la base $(y_k)_{k=1..n}$ (respectivement $(x_k)_{k=1..r}$) de $\mathcal{Y}$ (resp. de $\mathcal{X}$), sous la forme $\{(y_k^1)_{k=1..n_1}, (y_k^2)_{k=1..n_2}\}$ (resp. $\{(x_k^1)_{k=1..r_1}, (x_k^2)_{k=1..r_2}\}$) où $(y_k^i)_{k=1..n_i}$ (resp. $(x_k^i)_{k=1..r_i}$) base de $\mathcal{Y}_i$ (resp de $\mathcal{X}_i$) pour $i = 1, 2$, on a les décompositions matricielles suivantes :

1. $$Y := \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix}$$
   pour la représentation matricielle de l'action de ∂ sur $\mathcal{Y}$, où $Y_1 \in M_{n_1}(K)$, $Y_2 \in M_{n_2}(K)$.
2. $A \in M_s(K)$ pour la représentation matricielle de l'action de ∂ sur $\mathcal{A}$.
3. $$X := \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$$
   pour la représentation matricielle de l'action de ∂ sur $\mathcal{X}$, où $X_1 \in M_{r_1}(K)$, $X_2 \in M_{r_2}(K)$.
4. $$B_1 := \begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_1^2 \end{pmatrix}$$
   pour la représentation matricielle de ϕ_1 dans les bases $(a_k)_{k=1..s}$ et $(y_k)_{k=1..n}$. $B_1^1 \in M_{(s,n_1)}(K)$, $B_1^2 \in M_{(s,n_2)}(K)$.
5. $$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_2^1 & C_2^2 \\ B_2^1 & B_2^2 \end{pmatrix}$$
   pour la représentation matricielle de ϕ_2 dans les bases $(x_k)_{k=1..r}$ et $(i(y_k))_{k=1..n}, (s(a_k))_{k=1..s})$.
   $C_1^1 \in M_{(r_1,n_1)}(K)$, $C_2^1 \in M_{(r_2,n_1)}(K)$,
   $C_2^1 \in M_{(r_1,n_2)}(K)$, $C_2^2 \in M_{(r_2,n_2)}(K)$,
   $B_2^1 \in M_{(r_1,s)}(K)$, $B_2^2 \in M_{(r_2,s)}(K)$.

Proposition 5.3.4. *On obtient la représentation matricielle suivante de la connexion de $sv(\mathcal{M})$ dans la base $\mathcal{B}_{sv(\mathcal{M})}$:*

$$\begin{pmatrix} Y_1 & B_1^1 & C_1^1 \\ 0 & A & B_2^1 \\ 0 & 0 & X_1 \end{pmatrix}$$

PARTIE III

CALCUL DU RADICAL UNIPOTENT DU PRODUIT DE TROIS OPÉRATEURS COMPLÈTEMENTRÉDUCTIBLES

Soient (K, ∂) un corps différentiel de caractéristique nulle, de corps des constantes C algébriquement clos, $\tilde{K}$ une clôture différentielle de K et $\mathcal{D}_K = K[\partial]$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans K.
On reprend les notations du début du chapitre 3. En particulier, pour tout $\mathcal{D}_K$- module $\mathcal{M}$ de longueur finie, on note $G_{\mathcal{M}}$ (ou G_M) le groupe de Galois différentiel de $\mathcal{M}$.
Ce chapitre est consacré à la preuve du théorème suivant, annoncé dans [**21**]. Les notations $W_{-1}(M), W_{-2}(M)$ sont explicitées au chapitre 6 (voir p.72). La notation $\mathcal{M} * \mathcal{Z}$ est celle du paragraphe 4.3.

Théorème 6.0.1 *Soit $\mathcal{M}$ une extension panachée sur les $\mathcal{D}_K$-modules semi-simples $\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y}$.*

i) *Si le radical unipotent du groupe de Galois G_M est abélien, il existe une extension simple $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ telle que le groupe de Galois de l'extension panachée $\mathcal{M} * \mathcal{Z}$ ait un W_{-2} trivial et que,de plus, $R_u(G_Z)$ s'identifie à $W_{-2}(M)$.*

ii) *Dans le cas général, soit U le groupe dérivé de $W_{-1}(M)$. Il existe une extension panachée $\overline{\mathcal{M}} \in \mathcal{E}(\mathbf{1} \oplus \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{A}), \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{A}), \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$ (voir paragraphe 4.1 pour la notation) et un sous-groupe vectoriel V de $Gr_{-1}(M)$ entièrement calculables, tels que $R_u(G_{\overline{M}})$ soit abélien, $Gr_{-1}(\overline{M}) = Gr_{-1}(M)/V$, et $W_{-2}(\overline{M}) \simeq (W_{-2}(M)/U) \times V$.*

CHAPITRE 6

COCYCLES ET FILTRATION GALOISIENNE

Soit $\mathcal{M}$ une extension panachée sur les objets initiaux $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{A}$ dans la catégorie des $\mathcal{D}_K$-modules. Le diagramme suivant représente l'extension panachée dans la catégorie Rep_{G_M} :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\underline{i}"] & M \arrow[r, shift left, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & M_2 \arrow[r] \arrow[l, shift left, bend left, "s"] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & X \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[u, bend left, "t"] & X \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

Remarque On se limite ici à des objets contenus dans la catégorie tannakienne $< \mathcal{M} >$ engendrée par $\mathcal{M}$. Gal($\tilde{\mathrm{K}}|\mathrm{K}$) agit en effet sur $\omega(\mathcal{M})$ et les $\omega(\mathcal{V})$ où $\mathcal{V} \in < \mathcal{M} >$ à travers son quotient G_M. Ainsi d'après le lemme 1.2.4, tout élément de $H^1(G_M, \omega(\mathcal{V}))$,

$\mathcal{V} \in < \mathcal{M} >$, définit une extension de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{V}$ sur K. Ces extensions sont celles qui se *trivialisent* sur K_M.

Considérons les extensions de Picard-Vessiot associées. On obtient ainsi une filtration du groupe de Galois de l'extension K_M/K .

$$\begin{tikzcd}
\overline{K} \arrow[d, dash] \\
K_M \arrow[d, dash] \arrow[d, bend right, "W_{-2}"'] \arrow[dd, bend left=60, "W_{-1}"] \arrow[ddd, bend right=80, "W_0=G_M"'] \\
K_2 := K_{M_2}.K_{M_1} \arrow[d, dash] \arrow[d, bend left, "Gr_{-1}"] \\
K_1 := K_X.K_Y.K_A \arrow[d, dash] \arrow[d, bend left, "Gr_0"] \\
K_0 := K
\end{tikzcd}$$

On pose :

$$\boxed{W_0 = W_0(M) = \mathrm{Gal(K_M|K)},\ \mathrm{W_{-1} = Gal(K_M|K_X.K_A.K_Y)},\ \mathrm{W_{-2} = Gal(K_M|K_{M_2}.K_{M_1})}.}$$

Nous ferons un usage constant du lemme (immédiat) et de la remarque qui suivent.

Lemme 6.0.5. *W_{-1} est le radical unipotent de G_M. W_{-1} et W_{-2} sont des sous-groupes distingués de W_0 et W_{-2} est abélien et contenu dans le centre de W_{-1}. On pose $Gr_0 = W_0/W_{-1}$, $Gr_{-1} = W_{-1}/W_{-2}$. En particulier l'action par conjugaison de W_0 sur W_{-2} passe au quotient par W_{-1} et munit ainsi W_{-2} d'une structure de Gr_0-module.*

Remarque D'après le lemme 1.2.4 appliqué à $G = W_{-i} (i = 0, 1, 2)$ et $\mathcal{G} = \mathrm{Gal(\tilde{K}|K_i)}$, tout élément de $H^1(W_{-i}, Hom(X, Y))$ définit une extension de $K_i[\partial]$-module de $\mathcal{X} \otimes K_i$ par $\mathcal{Y} \otimes K_i$.

6.1. COCYCLES DE L'EXTENSION PANACHEE

La démonstration du théorème 6.0.1, fait intervenir, de manière prépondérante, la dualité entre cocycles et extensions mise en avant par le théorème 1.1.3. Il est donc nécessaire de refléter les actions des divers groupes de Galois attachés à l'extension panachée sur les cocycles de cette extension, ainsi que l'effet des opérations élémentaires définies au chapitre 5 sur ces mêmes cocycles.

Soit M une extension panachée sur X, Y, A :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, "j"] & A \arrow[r] \arrow[l, shift left, bend left, "\underline{s}"] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\underline{i}"] & M \arrow[r, shift left, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & M_2 \arrow[r] \arrow[l, shift left, bend left, "s"] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & X \arrow[u, bend left, "t"] \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

(3) (4)

On considére une section C-linéaire t (respectivement s) de (3) (respectivement de (2)) et $\underline{s}$ une section de (1) telle que $s \circ \underline{j} = j \circ \underline{s}$. Soient ζ^3 (respectivement ζ^2) les cocycles associés à ces deux sections, ζ^1 (respectivement ζ^4) le cocycle associé à l'extension(1) (respectivement (2)).
Pour alléger les énoncés, on appellera des sections des suites exactes (2) et (3) *sections de l'extension panachée*. Compte tenu du *panachage* des diverses extensions considérées, on obtient les relations suivantes :

$$\zeta^1 = \zeta^2 \circ \underline{j} \text{ et } \zeta^4 = \pi \circ \zeta^3 \text{ (aux cobords près).}$$

Proposition 6.1.1. *L'application :*

$$\phi : \qquad W_{-1} \longrightarrow Hom(X, M_1) \times Hom(M_2, Y)$$

$$\sigma \longmapsto (\zeta^3(\sigma), \zeta^2(\sigma))$$

est injective.

Démonstration. — On suppose que $\phi(\sigma) = \phi(\sigma_1)$, où $(\sigma, \sigma_1) \in (W_{-1})^2$.

On note $(\underline{x})$ (resp. $(\underline{a})$, resp. $(\underline{y})$) une base de X (resp. de A, resp. de Y) sur C.

1. $\mathcal{B} := (\underline{s}(\underline{a}); i(\underline{y}))$ est une base de M_1. Or $i \circ \sigma = \sigma \circ i = i \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ i = i$ car $(\sigma, \sigma_1) \in {W_{-1}}^2$.
2. De plus
$$\zeta^1(\sigma) = \zeta^1(\sigma_1) = \sigma \underline{s} \sigma^{-1} - \underline{s} = \sigma_1 \underline{s} - \underline{s}$$
car $(\sigma, \sigma_1) \in {W_{-1}}^2$. Donc $\sigma \underline{s}(\underline{a}) = \sigma_1 \underline{s}(\underline{a})$. Ainsi $\sigma = \sigma_1$ sur M_1.
3. $\forall \tau \in W_{-1}, \tau t - t\tau = \tau t - t$. Or $\zeta^3(\sigma) = \zeta^3(\sigma_1)$, donc $\sigma t(\underline{x}) = \sigma_1 t(\underline{x})$. De plus $\sigma = \sigma_1$ sur M_1, ainsi $\sigma = \sigma_1$ sur M. D'où l'injectivité de ϕ.

□

Proposition 6.1.2 (Etude de l'action de W_0 sur les cocycles)
W_{-2} étant normalisé par W_0, on peut considérer l'action par conjugaison de W_0 sur W_{-2}. On munit $Hom(M_2, Y) \times Hom(X, M_1)$ de sa structure naturelle de W_0-module. Alors, la restriction de ϕ à W_{-2} commute avec l'action de W_0.

DÉMONSTRATION. — Soient $\sigma_0 \in W_0$ et $\sigma \in W_{-2}$. Considérons $\zeta^2(\sigma_0 \sigma \sigma_0^{-1})$.
Puisque $\sigma_0 \sigma \sigma_0^{-1}$ fixe M_2, on a

$$\zeta^2(\sigma_0\sigma\sigma_0^{-1}) = \sigma_0\sigma\sigma_0^{-1} \circ s \circ \sigma_0\sigma^{-1}\sigma_0^{-1} - s = \sigma_0\sigma\sigma_0^{-1} \circ (s - \sigma_0 s \sigma_0^{-1} + \sigma_0 s \sigma_0^{-1})\sigma_0\sigma^{-1}\sigma_0^{-1} - s.$$

Or $s - \sigma_0 s \sigma_0^{-1}$ est une application de M_2 dans Y, cet élément est donc fixé par l'action du W_{-2} (dans notre cas par $\sigma_0\sigma\sigma_0^{-1}$). On en conclut que :
$$\zeta^2(\sigma_0\sigma\sigma_0^{-1}) = s - \sigma_0 s \sigma_0^{-1} + \sigma_0\sigma\sigma_0^{-1}(\sigma_0 s \sigma_0^{-1})\sigma_0\sigma\sigma_0^{-1} - s = \sigma_0 \zeta^2(\sigma)\sigma_0^{-1}.$$
De même, ζ^3 commute avec l'action de W_0, ce qui achève la démonstration. □

Les suites exactes (1) et (4) se scindant sur $K_{M_2}.K_{M_1}$, on en déduit que :
$\zeta^1(\sigma) = 0$ et $\zeta^4(\sigma) = 0$ pour tout $\sigma \in W_{-2}$.
Ainsi, $\pi \circ \zeta^3(\sigma) = 0 = \zeta^2(\sigma) \circ \underline{j}$ pour tout $\sigma \in W_{-2}$.
Il existe donc deux cocycles, notés ζ et $\overline{\zeta}$ dans $H^1(W_{-2}, Hom(X, Y))$ tels que pour tout $\sigma \in W_{-2}$, on ait :

$$\zeta^2(\sigma) = \zeta(\sigma) \circ \underline{\rho} \text{ et } \zeta^3(\sigma) = i \circ \overline{\zeta}(\sigma).$$

Proposition 6.1.3. *Il existe des sections t et s de l'extension panachée M telles que $\overline{\zeta} = \zeta$. On appellera ce choix de sections,* sections compatibles de l'extension panachée $\mathcal{M}$. On notera dans ce cas $\zeta_{-2} = \overline{\zeta} = \zeta$

DÉMONSTRATION. — Soit t une section k-linéaire de la suite exacte (3).

Considérons l'application $\psi := t \circ \underline{\rho}$. On a

$$\rho \circ \psi = \underline{\rho} \circ \underline{\pi} \circ \psi = \underline{\rho}.$$

Il existe donc une application $\kappa : M_2 \to A$ telle que $\underline{\pi} \circ \psi = id_{M_2} + \underline{j} \circ \kappa$. La surjectivité de π assure l'existence d'une application $\underline{\kappa} : M_2 \to M_1$ telle que $\kappa = \pi \circ \underline{\kappa}$.
On obtient ainsi : $\underline{\pi} \circ \phi = id_{M_2} + \underline{\pi} \circ j \circ \underline{\kappa}$. En posant $s := \phi - j \circ \underline{\kappa}$, on obtient une section de (2).
Soit $\sigma \in W_{-2}$. On a, l'action de W_{-2} étant triviale sur $\underline{\kappa}$

$$\sigma \circ s \circ \sigma^{-1} - s = \sigma \circ t\sigma^{-1} \circ \underline{\rho} - t \circ \underline{\rho}.$$

Ainsi :

$$\zeta(\sigma)\underline{\rho} = \overline{\zeta}(\sigma)\underline{\rho}.$$

La surjectivité de $\underline{\rho}$ entraîne $\zeta = \overline{\zeta}$ □

On pose désormais $\zeta_{-2} := \zeta$, de sorte que $\zeta_{-2} \in H^1(W_{-2}, Hom(X, Y))$. De plus, d'après la proposition 6.1.1, ζ_{-2} est injectif et l'image de $W_{-2}(M)$ dans $Hom(X, Y)$ par ce cocycle détermine donc entiérement $W_{-2}(M)$.

6.2. ACTION DE $Ext(X, Y)$ SUR LES COCYCLES

Soit M une extension panachée sur X, Y, A :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\underline{i}"] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] \arrow[l, bend left, "s"] & 0 & (2) \\
 & & X \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[u, bend left, "t"] & X \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

(3) (4)

Soit U une extension de X par Y :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\iota"] & U \arrow[r, "p"] & X \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\nu"] & 0 \end{tikzcd}$$

et soit ζ_U le cocycle attaché à la section ν de U.

Proposition 6.2.1. *En considérant les cocycles sur $G_{M\oplus U}$, il existe des sections de l'extension panachée $M * U$, telles que :*

$$\zeta^2(M*U) = \zeta^2(M) + \zeta_U \circ \underline{\rho} \text{ et } \zeta^3(M*U) = \zeta^3(M) + i \circ \zeta_U.$$

En particulier $\zeta_{-2}(M*U) = \zeta_{-2}(M) + \zeta_U$.

Démonstration. — Par définition ,

$$M*U = \{(m,u) \in M \oplus U, p(u) = \rho(m)\}/\{(-\underline{j}(y), \iota(y)), y \in Y\}.$$

L'application $s' : M_2 \to M*U$, qui à $m_2 \in M_2$ associe le couple $(s(m_2), \nu(\underline{\rho}(m_2))$, est une section C-linéaire de la suite exacte (2) pour $M*U$. Par conséquent, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathrm{K_M.K_U}|\mathrm{K_X.K_A.K_Y})$, on a

$$\zeta^2(M*U) = \zeta^2(M) + \zeta_U \circ \underline{\rho}.$$

De même, l'application t' de X dans $M*U$, qui associe à x le couple $(t(x), \underline{i}(\nu(x)))$, est une section de la suite exacte (3) pour $M*U$. Par conséquent, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathrm{K_M.K_U}|\mathrm{K_X.K_A.K_Y})$, on a

$$\zeta^3(M*U) = \zeta^3(M) + i \circ \zeta_U.$$

□

6.3. EFFET SUR LES COCYCLES DE LA REDUCTION AU CAS $\mathcal{X} = 1$

On rappelle qu'après réduction au cas $X = 1$ de l'extension panachée initiale, on aboutit à une nouvelle extension panachée du type suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Hom(X,Y) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & \overline{M_1} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "j_1"] & Hom(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}_1"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & Hom(X,Y) \arrow[r, "\underline{i}_1"] & \overline{M} \arrow[r, "\underline{\pi}_1"] \arrow[d, "\rho_1"] & \overline{M_2} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}_1"] & 0 & (2) \\
 & & 1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}$$

Il s'agit ensuite de remarquer que cette opération conserve bien la structure galoisienne de départ, c'est-à-dire que $K_{\overline{M}}.K_X = K_M$, $K_{\overline{M_1}}.K_X = K_{M_1}.K_X$, $K_{\overline{M_2}}.K_X = K_{M_2}$ donc que $W_{-1}(\overline{M}) = W_{-1}(M)$. Pour cela, on va étudier l'effet de la réduction sur les cocycles attachés aux extensions panachées.
Le lemme suivant découle de la description de $\overline{\mathcal{M}}$ donnée au paragraphe 5.1.

Lemme 6.3.1. *On a, pour tout $\sigma \in W_{-1}(\overline{M})$,*

1. $\zeta^2_{\overline{M}}(\sigma)((\phi,\lambda)) = \zeta^2_M(\sigma)\circ\phi$ *pour tout* $\phi \in Hom(X, M_2)$ *et* $\lambda \in K$ *tels que* $\underline{\rho}\circ\phi = \lambda id_X$.
2. $\zeta^3_{\overline{M}}(\sigma)(\lambda) = \zeta^3_M(\sigma) \circ (\lambda id_X)$ *pour tout* $\lambda \in K$.

En particulier, la nullité de $\zeta^2_{\overline{M}}$ (respectivement $\zeta^3_{\overline{M}}$) équivaut à celle de ζ^2_M (respectivement ζ^3_M), et la restriction de $\zeta^2_{\overline{M}}$ à $W_{-2}(\overline{M}) = W_{-2}(M)$ correspond, via l'isomorphisme de $Hom(1, Hom(X,Y))$ avec $Hom(X,Y)$, à la restriction de ζ^2_M à ce même groupe.

CHAPITRE 7

CALCUL DU RADICAL UNIPOTENT

7.1. LE CAS ABÉLIEN

On reprend les notations du chapitre 6 et on démontre le théorème 6.0.1.i).
Soit donc $\mathcal{M} \in \mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{Y})$ une extension panachée de radical unipotent abélien.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 \ (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y} \arrow[r, "\underline{i}"] & \mathcal{M} \arrow[r, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{M}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 \ (2) \\
 & & \mathcal{X} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 & \\
 & & (3) & (4) &
\end{tikzcd}$$

Comme W_{-1} est abélien, il existe un sous-groupe W' de W_{-1} tel que $W_{-1} \simeq W_{-2} \times W'$, et où $W' \simeq Gr_{-1}$. On a donc :

$$\begin{tikzcd}
 & K_M \arrow[dl, "W_{-2}"'] \arrow[dr, "W'"] & \\
K_{M_1}.K_{M_2} \arrow[dr, "Gr_{-1}"] & & K' \arrow[dl, "W_{-2}"] \\
 & K_X.K_Y.K_A &
\end{tikzcd}$$

On va montrer dans les paragraphes suivants comment réaliser K' comme le compositum des extensions de Picard-Vessiot K_A et K_Z, pour $\mathcal{Z} \in Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ définie sur K(voir également [**36**]) .

7.1.1. Description du W_{-2} de l'extension panachée. — On reprend les notations du paragraphe 6.1.
Soit $\underline{t} := \pi \circ t$ une section de (4) en tant que suite exacte de $K_{M_2}.K_{M_1}[\partial]$-modules.
Considérons le *pullback* de (2) par $\underline{t}$. On obtient une extension $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X} \otimes K_{M_2}.K_{M_1}$ par $\mathcal{Y} \otimes K_{M_2}.K_{M_1}$, en tant que $K_{M_2}.K_{M_1}[\partial]$-modules .
L'espace des vecteurs horizontaux V de $\mathcal{V}$ s'inscrit dans le diagramme suivant :

(4)

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & V := \underline{t}^*(M) \arrow[r, shift left] \arrow[d, dotted, no head] & X \arrow[r] \arrow[u] \arrow[l, shift left, "\tilde{s}"] \arrow[d, bend left, "\underline{t}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\underline{i}"] & M \arrow[r, shift left, "\underline{\pi}"] & M_2 \arrow[r] \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[u, "\underline{\rho}"] & 0 \; (2) \\
 & & & A \arrow[u, "\underline{j}"] & \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Le diagramme précédent assure que $K_V \subset K_M$ mais on a le résultat plus précis :

Proposition 7.1.1. *Soit K_V l'extension de Picard-Vessiot de $K_{M_1}.K_{M_2}$ associée à l'élément $\mathcal{V}$ de $Ext^1_{K_{M_1}.K_{M_2}[\partial]}(\mathcal{X} \otimes K_{M_1}.K_{M_2}, \mathcal{Y} \otimes K_{M_1}.K_{M_2})$ défini ci-dessus. Alors,* $\mathrm{Gal}(\mathrm{K_V}|\mathrm{K_{M_2}.K_{M_1}}) = \mathrm{W_{-2}(M)}$. *En particulier $K_{M_1}.K_{M_2} \subset K_V = K_M$.*

Démonstration. — Une section de l'extension

$$V = \{(m, x) \ \in M \oplus X \text{ tels que } \underline{\pi}(m) = \underline{t}(x)\}$$

est donnée par $\tilde{s}$ de X dans V qui à $x \in X$ associe l'élément $(s \circ \underline{t}(x), x) \in V$. Par conséquent, pour tout $\sigma \in W_{-2}$, on a $\zeta_V(\sigma) = \zeta^2(\sigma) \circ \underline{t}$.
Or d'après la proposition 6.1.3, il existe $\zeta_{-2} \in H^1(W_{-2}, Hom(X, Y))$, tel que, $\zeta^2(\sigma) = \zeta_{-2}(\sigma) \circ \underline{\rho}$ pour tout $\sigma \in W_{-2}$. Comme $\underline{t}$ est une section de (4), $\underline{\rho} \circ \underline{t} = id_X$. Ainsi, ζ_V coïncide avec l'injection ζ_{-2} de $W_{-2}(M)$ dans $Hom(X, Y)$. □

Remarque L'idée qui sous-tend cette construction est la suivante : lorsque l'extension $\mathcal{M}_2$ est scindée, l'étude de l'extension panachée $\mathcal{M}$ se ramène à celle de l'extension simple :

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{X} \oplus \mathcal{A} \longrightarrow 0 \tag{7}$$

sur les objets semi-simples $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X} \oplus \mathcal{A}$.
Dans ce cas, $W_{-2}(M)$ est le radical unipotent du *pullback* de l'extension 7 par l'injection naturelle de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X} \oplus \mathcal{A}$.
Matriciellement, une telle extension panachée peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} Y & B_1 & C \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}.$$

C'est ce cas particulier qui nous a incitée à étendre les scalaires au corps $K_{M_1}.K_{M_2}$ afin de nous placer dans un cadre analogue. Il s'agissait ensuite de montrer que l'extension obtenue par *pullback* pouvait être définie sur le corps de base. Ce sont des arguments de descente galoisienne, explicités dans les sections suivantes, qui nous ont permis de résoudre ce problème.

7.1.2. Descente de l'extension V à $K_X.K_A.K_Y$. — Le radical unipotent de l'extension panachée M étant abélien, l'action par conjugaison de W_0 sur $W_{-1}(M)$ passe ici au quotient par W_{-1}, ainsi W_{-1} est muni d'une structure de Gr_0-module. Considérons alors l'extension de groupes abéliens et de Gr_0-modules suivante :

$$0 \longrightarrow W_{-2} \xrightarrow{\iota} W_{-1} \xrightarrow{\kappa} W_{-1}/W_{-2} \longrightarrow 0.$$

Le groupe Gr_0 étant par hypothèse réductif , cette suite exacte se scinde et on considère une rétraction r de W_{-1} vers W_{-2} , morphisme de Gr_0-modules.
Posons pour tout $\sigma \in W_{-1}, \overline{\zeta}(\sigma) = \zeta_V(r(\sigma))$. Ceci définit un cocycle $\overline{\zeta}$ de $H^1(W_{-1}, Hom(X, Y))$.
Il lui correspond donc par équivalence de catégorie un module différentiel $\overline{\mathcal{V}}$ sur $K_X.K_A.K_Y$, extension de $\mathcal{X} \otimes K_X.K_A.K_Y$ par $\mathcal{Y} \otimes K_X.K_A.K_Y$. Puisque $\overline{\zeta}|_{W_{-2}} = \zeta_V$, on a $V = \overline{V} \otimes K_{M_1}.K_{M_2}$. De plus $\overline{\zeta}(W_{-1}) = \zeta_V(W_{-2}) = \zeta_{-2}(W_{-2}) \simeq W_{-2}$, donc $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_{\overline{\mathrm{V}}}|\mathrm{K_X.K_Y.K_A})) = \mathrm{W_{-2}(M)}$.

7.1.3. Descente de l'extension $\overline{V}$ au corps de base K. — Considérons la suite exacte de groupes suivante :

$$0 \longrightarrow W_{-1} \xrightarrow{\iota_0} W_0 \xrightarrow{\kappa_0} Gr_0 \longrightarrow 0$$

Cette extension de groupe induit une suite exacte longue de cohomologie, suite d'inflation-restriction [**35**] :

$$0 \longrightarrow H^1(Gr_0, Hom(X,Y))^{W_{-1}}) \longrightarrow H^1(W_0, Hom(X,Y))$$

$$\xrightarrow{\phi} H^1(W_{-1}, Hom(X,Y))^{Gr_0} \longrightarrow H^2(Gr_0, Hom(X,Y))^{W_{-1}}$$

L'action de Gr_0 sur $H^1(W_{-1}, Hom(X,Y))$ est donnée par :

$$\forall \sigma_0 \in Gr_0, \forall \zeta \in H^1(W_{-1}, Hom(X,Y)), \sigma_0 * \zeta(\sigma) := \sigma_0 \circ \zeta(\sigma_0^{-1}\sigma\sigma_0) \circ \sigma_0^{-1}.$$

Mais l'action de W_{-1} est triviale sur $Hom(X,Y)$ et la réductivité de Gr_0 entraîne la nullité des groupes de cohomologie $H^1(Gr_0, Hom(X,Y))$ et $H^2(Gr_0, Hom(X,Y))$. La suite d'inflation-restriction fournit donc un isomorphisme ϕ entre $H^1(W_0, Hom(X,Y))$ et $H^1(W_{-1}, Hom(X,Y))^{Gr_0}$.

Lemme 7.1.2. *Le cocycle $\overline{\zeta} \in H^1(W_{-1}, Hom(X,Y))$ est stable sous l'action de Gr_0.*

Démonstration. — D'après la proposition 6.1.2 :

$$\forall \sigma_0 \in Gr_0, \forall \sigma \in W_{-2}, \zeta_{-2}(\sigma_0\sigma\sigma_0^{-1}) = \sigma_0 \circ \zeta_{-2}(\sigma) \circ \sigma_0^{-1}.$$

De plus r, rétraction de W_{-1} sur W_{-2} est un morphisme de Gr_0-modules. Ainsi $\forall \sigma_0 \in Gr_0, \forall \sigma \in W_{-2}, r(\sigma_0\sigma\sigma_0^{-1}) = \sigma_0 r(\sigma)\sigma_0^{-1}$. On obtient donc :

$$\sigma_0 * \overline{\zeta}(\sigma) := \sigma_0 \circ \zeta_{-2}(r(\sigma_0^{-1}\sigma\sigma_0)) \circ \sigma_0^{-1} = \sigma_0 \circ \zeta_{-2}(\sigma_0^{-1}r(\sigma)\sigma_0) \circ \sigma_0^{-1} = \zeta_{-2}(r(\sigma)) = \overline{\zeta}(\sigma)$$

pour tout $\sigma_0 \in Gr_0, \forall \sigma \in W_{-1}$.

□

Ainsi, $\overline{\zeta}$ est un élément de $H^1(W_{-1}, Hom(X,Y))^{Gr_0}$. Il lui correspond par l'isomorphisme ϕ un cocycle $\tilde{\zeta} \in H^1(W_0, Hom(X,Y))$.
D'après le théorème 1.1.3 appliqué à W_0, il existe une équation différentielle $\mathcal{Z}'$, à coefficients dans K, extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ telle que $\zeta_{Z'} = \tilde{\zeta}$.
On a $\overline{V} = \mathcal{Z}' \otimes_K K_X.K_Y.K_A$ car $\zeta_{Z'}|W_{-1} = \zeta_{\overline{V}}$.
Ces relations assurent que

$$\mathrm{Gal(K_{Z'}|K_X.K_Y) \simeq Gal(K_{Z'}.K_A/K_X.K_A.K_Y) \simeq Gal(K_{\overline{V}}|K_X.K_A.K_Y)) \simeq W_{-2}(M).}$$

Le premier isomorphisme est justifié par le fait qu'un groupe réductif et un groupe unipotent ne peuvent partager de quotient commun non trivial, le second par le fait que $\overline{V} = \mathcal{Z}' \otimes_K K_X.K_Y.K_A$.
Considérons enfin $\mathcal{Z} = -\mathcal{Z}' \in Ext^1_{\mathcal{D}_K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Alors $\zeta_{Z'} = -\zeta_Z$, donc $R_u(\mathcal{Z}) = W_{-2}(M)$ et $K_{M_1}.K_{M_2} \subset K_{M*Z} \subset K_M$(car $G_{M \oplus Z} = G_M$).
Par conséquent, la proposition 6.2.1 entraîne :

$$\zeta_{-2}(M * Z)(\sigma) = \zeta_{-2}(M)(\sigma) + \zeta_Z(\sigma) = \zeta_V(\sigma) - \zeta_{Z'}(\sigma) = 0$$

pour tout $\sigma \in W_{-2}(M)$. Suivant la proposition 6.1.1, on déduit de la formule précédente que $W_{-2}(M * Z) = 0$. Ceci conclut la preuve du théorème 6.0.1.i).

Conclusion
Le premier pas de la descente galoisiennne effectuée ci -dessus peut s'interpréter en termes de suite d'inflation-restriction de cohomologie : en effet si l'on considère W_{-2} comme un quotient de W_{-1}, on a un morphisme injectif naturel de $H^1(W_{-2}, .)$ dans $H^1(W_{-1}, .)$. Cependant, le choix d'une Gr_0-rétraction de W_{-1} sur W_{-2} n'est pas canonique et sa non-unicité est mesurée par le groupe de cohomologie $H^1_{Gr_0}(Gr_{-1}, W_{-2})$. Il n'y a donc pas en général, unicité de l'équation différentielle $\overline{\mathcal{V}}$ à coefficients dans $K_X.K_A.K_Y$ correspondant à $\mathcal{V}$.
En revanche, la deuxième descente est injective car la classe de $\mathcal{Z}$ en tant qu'extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$ ne dépend que de $H^1(Gr_0, \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$, groupe nul en vertu du caractère réductif de Gr_0.

7.2. ABELIANISATION DU RADICAL UNIPOTENT

Nous passons maintenant à la démonstration du théorème 6.0.1.ii).

On se placera ici dans le cas $\mathcal{X} = 1$. (et on reprend les notations du paragraphe 6.1).
En voici la raison : tout sous $\mathcal{D}_K$-module de $\underline{Hom}(\mathbf{1}, \mathcal{Y})$ est de la forme $\underline{Hom}(\mathbf{1}, \mathcal{Y}_1)$ (où $\mathcal{Y}_1$ sous $\mathcal{D}_K$-module de $\mathcal{Y}$) alors qu'un sous $\mathcal{D}_K$-module de $\underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ne s'écrit pas nécessairement $\underline{Hom}(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1)$.
On effectue la réduction au moyen de l'application $\mathfrak{R}$ de la partie I. Dans le résultat final, on devra donc remplacer $\mathcal{A}$ par $\underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ et $\mathcal{Y}$ par $\underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

7.2.1. Construction de l'abélianisé. — Comme W_{-2} est abélien, le groupe dérivé $U = [W_{-1}, W_{-1}]$ de W_{-1}, sous-groupe de W_{-2}, ne dépend que de W_{-1}/W_{-2}, et est donc effectivement calculable. Son image $\zeta_{-2}(U)$ (où ζ_{-2} est défini à la proposition 6.1.3) dans $Hom(X, Y) \simeq Y$ est un sous W_0-module et correspond ainsi à un sous-$\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{Y}_2$ de $\mathcal{Y}$. La complète réductibilité du module $\mathcal{Y}$ assure l'existence d'une rétraction de $\mathcal{D}_K$-modules p_2 de $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{Y}_2$. On note p_1 la projection naturelle de $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{Y}_1 := \mathcal{Y}/\mathcal{Y}_2$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{Y}_2 \arrow[r, shift left] & \mathcal{Y} \arrow[l, bend left, "p_2"] \arrow[r, "p_1"] & \mathcal{Y}/\mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{M}$ une extension panachée sur $\mathcal{X} = \mathbf{1}, \mathcal{Y}, \mathcal{A}$ et M la représentation galoisienne correspondante :

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 & (1) \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\underline{i}"] & M \arrow[r, shift left, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & M_2 \arrow[r] \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 & (2) \\
 & & X = C \arrow[r, equal] \arrow[u, bend left, "t"] \arrow[d] & X = C \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & & \\
 & & (3) & (4) & &
\end{tikzcd}
$$

On effectue le *pushout* via p_1 de la suite exacte (2) :

$$0 \longrightarrow Y_1 := Y/Y_2 \xrightarrow{\underline{i_1}} M^1 := p_{1*}(M) \xrightarrow{\underline{\pi_1}} M_2 \longrightarrow 0\ .$$

De même, on considère le *pushout* de la suite exacte (1) via p_2 :

$$0 \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{i_2} {M_2}^2 := p_{2*}(M_1) \xrightarrow{\pi_2} A \longrightarrow 0\ ,$$

ainsi que le *pushout* de (1) par p_1 :

$$0 \longrightarrow Y_1 \xrightarrow{i_1} {M_2}^1 := p_{1*}(M_1) \xrightarrow{\pi_1} A \longrightarrow 0\ .$$

Lemme 7.2.1. *Le groupe de Galois de l'extension de Picard-Vessiot K_M de $K_{M^1}.K_{{M_2}^2}$ est le groupe dérivé de W_{-1}, c'est à dire U.*

Autrement dit, $K_{M^1}.K_{{M_2}^2}$ est l'extension abélienne maximale de $K_X.K_Y.K_A$ contenue dans K_M. De ce fait, on pose $K_{M^1}.K_{{M_2}^2} = K_M^{ab}$.

Démonstration. — On rappelle que

$$\zeta_{-2}(\sigma) \circ \underline{\rho} = \zeta^2(\sigma) = \sigma s - s \tag{8}$$

pour tout $\sigma \in W_{-2}$.
Par construction , l'ensemble des solutions de l'équation $\mathcal{Y}_2$ est donné par $\zeta_{-2}(U) = \{\zeta_{-2}(\sigma)(\lambda)$ avec $\sigma \in U$ et $\lambda \in C\}$. De la formule 8 et de la surjectivité de $\underline{\rho}$, on déduit que :

$$Y_2 = \{\sigma s(m_2) - s(m_2) \text{ avec } \sigma \in U \text{ et } m_2 \in M_2\}.$$

Cependant, il existe $\phi : M \to Y$ telle que $f - s \circ \underline{\pi}(f) = \underline{i} \circ \phi(f)$ pour tout $f \in M$
Puisque $\sigma \in U \subset W_{-2}$ induit l'identité sur Y, on en déduit que $\sigma(f) - f = \sigma \circ s \circ \underline{\pi}(f) - s \circ \underline{\pi}(f)$ pour tout $\sigma \in U$.
Ainsi, $Y_2 = \{\sigma f - f,\ \sigma \in U,\ f \in\ M\}$.
Montrons que la sous-extension K_M^{ab} de K_M est fixée par U. En effet, d'une part, $K_{M_2{}^2}$ en tant que sous-extension de K_{M_1} est fixée par $W_{-2}(M)$ donc par U.
D'autre part, tout $g \in M^1$ s'écrit $g = p_1(f)$ où $f \in M$. Pour tout $\sigma \in U$, on a alors $\sigma(g) - g = p_1(\sigma(f) - f)$ car p_1 commute avec σ. Or, par construction, $\sigma(f) - f$ est dans l'espace de solutions de $\mathcal{Y}_2$. On en déduit que $p_1(\sigma(f) - f) = 0 = \sigma(g) - g$. Ainsi K_{M^1} est fixé par U. On a donc $U \subset \mathrm{Gal(K_M|K_M^{ab})}$.

Réciproquement, soit $\sigma \in \mathrm{Gal(K_M|K_M^{ab})}$. Alors σ fixe $M^1 = M/Y_2$ et il fixe donc le quotient M_2 et le sous-objet $M_1/Y_2 = M_2^1$ de M^1. Or σ fixe aussi $M_2^2 = M_1/Y_1$, il fixe donc M_1. Par conséquent σ est un élément de W_{-2} et vérifie $\zeta_{-2}(\sigma) \circ \underline{\rho} = \zeta^2(\sigma) = \sigma s - s$. De l'injectivité de ζ_{-2} sur W_{-2} (proposition 6.1.1) et du fait que σ fixe M/Y_2, on déduit :

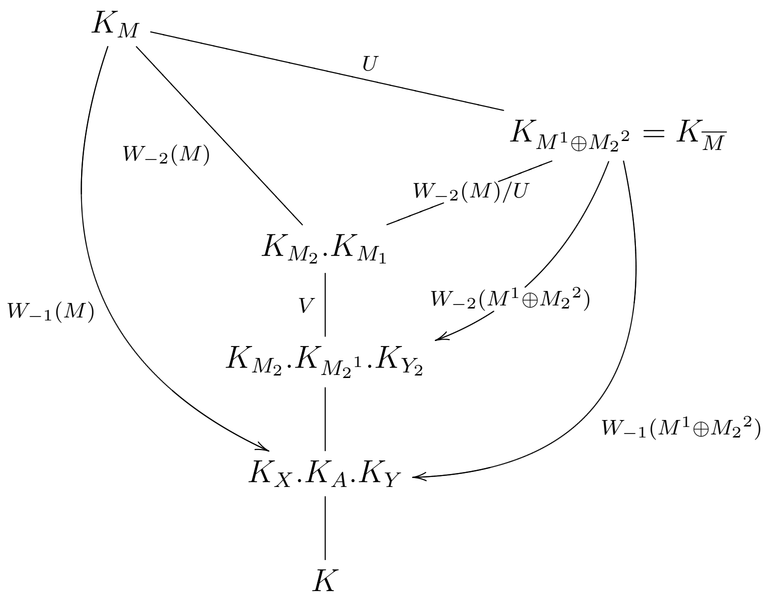
1. L'image de σ par ζ_{-2} dans $Hom(C, Y)$ détermine entièrement σ.
2. Cette image est contenue dans Y_2.

Ainsi $\mathrm{Gal(K_M|K_M^{ab})}$ s'identifie à un sous groupe de $Hom(X, Y_2) = Hom(1, Y_2) = Y_2 = U$ et le lemme 7.2.1 est démontré. □

7.2.2. Réalisation de $\overline{M} := M^1 \oplus {M_2}^2$ comme extension panachée de $X \oplus A, A, Y$. — On réalise le *panachage* suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r, "{(i_1, id_{Y_2})}"] \arrow[d, equal] & {M_2}^1 \oplus Y_2 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "{(j_1, i_2)}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "{(\underline{j}, 0)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_1 \oplus Y_2 \arrow[r, "{(\underline{i}_1, i_2)}"] & M^1 \oplus {M_2}^2 \arrow[r, "{(\underline{\pi}_1, \pi_2)}"] \arrow[d, "{(\rho_1, \pi_2)}"] & M_2 \oplus A \arrow[r] \arrow[d, "{(\underline{\rho}, id_A)}"] & 0 \\
 & & X \oplus A \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \oplus A \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Extensions de Picard-Vessiot attachées aux différents ***panachages***
On obtient le diagramme d'extensions de corps suivant :



On a donc réalisé une extension panachée, $\overline{M} := M^1 \oplus {M_2}^2 \in \mathcal{E}(X \oplus A, Y, A)$ dont le W_{-1} est abélien (en effet $W_{-1}(\overline{M}) = W_{-1}/U = W_{-1}^{ab}$), avec $Gr_{-1}(\overline{M}) \subset Gr_{-1}(M)$, $Gr_0(\overline{M}_0) = Gr_0(M)$ et $W_{-2}(\overline{M}) = W_{-2}(M)/U \oplus V$.
Ainsi, à partir de la connaissance de $W_{-2}(\overline{M})$, on peut entièrement décrire l0e radical unipotent de G_M, et ceci conclut la preuve du théorème 6.0.1.*ii*).

7.3. REPRESENTATIONS MATRICIELLES

7.3.1. Descente galoisienne et matrices de connexion. — On reprend les notations de la proposition 5.3.2.

On peut alors traduire en termes de matrices fondamentales de solutions les constructions de la descente effectuées dans le cas abélien :

1. On peut prendre pour matrice fondamentale de $\mathcal{V}$, la matrice $\mathfrak{R}$ qui vérifie $\mathfrak{R}' = Y\mathfrak{R} - \mathfrak{R}X + B_1\mathfrak{Q} + C$ où $B_1\mathfrak{Q}$ est à lire dans $\underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})(K_{M_1}.K_{M_2})$.
2. $\mathcal{V}$ *descend à* $\overline{\mathcal{V}}$ puis à $\mathcal{Z}$ veut dire que cet élément du conoyau est congru modulo $\nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(K_{M_1}.K_{M_2})$, à un élément T de $\underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})(K)$.

Autrement dit, si $R_u(G_M)$ est abélien, il existe $T \in \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})(K)$ et $\mathfrak{H} \in Hom(X, Y)(K_{M_1}.K_{M_2})$ tel que : $B_1\mathfrak{Q} + C = T + \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}X - Y\mathfrak{H}$.

De façon équivalente, ceci dit qu'il existe $S \in \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})(K)$ et $\tilde{\mathfrak{H}}$ à coefficients dans $K_{M_1}.K_{M_2}$ tels que : $-\mathfrak{P}B_2 + C = S + \tilde{\mathfrak{H}}' + \tilde{\mathfrak{H}}X - Y\tilde{\mathfrak{H}}$.

3. Un autre choix de la rétraction r donne lieu à un élément $\tilde{T}$ de $\underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})(K)$ tel qu'il existe $\mathfrak{K} \in Hom(X, Y)(K_{M_1}.K_{M_2})$ $K_{M_1}.K_{M_2}$ tel que : $B_1\mathfrak{Q} + C = \tilde{T} + \mathfrak{K}' + \mathfrak{K}X - Y\mathfrak{K}$. On en déduit que $T - \tilde{T} = \nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathfrak{G})$ où $\mathfrak{G}$ est défini sur $K_{M_1}.K_{M_2}$. On retrouve ici la signification matricielle de la non-unicité du premier pas de la descente galoisienne.

Exemple inspiré de la partie 4 du théorème 11.4.1

Considérons le système différentiel $\mathcal{M}$ de rang 3, à coefficients dans K, de matrice $\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $b_2 = b$ et $b_1 = 2b$. (On vérifie aisément que $R_u(G_M)$ est abélien).

L'énoncé encadré ci-dessus est dans ce cas élémentaire. En effet $\mathfrak{Q} = \int b_2 \in K_{M_1} = K_{M_2}$ et

$$B_1\mathfrak{Q} = 2b_2 \int b_2 = (\mathfrak{Q}^2)' = \nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathfrak{H}) \text{ où } \mathfrak{H} = \mathfrak{Q}^2 \in \underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})(K_{M_1}.K_{M_2}).$$

En particulier, $T = C$ convient pour cet énoncé.

Dans ces conditions, $K_M = K_{M_1}(\mathfrak{R})$ (*cf.* p 61), où $\nabla_{\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}' = c + B_1\mathfrak{Q} = c + (\mathfrak{Q}^2)'$. Donc $K_M = K_{M_1}(\mathfrak{U})$ où $\mathfrak{U}' = (\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}^2)' = c$.

On pourra alors choisir, comme élément $\mathcal{Z}$ de $Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = Ext^1(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ satisfaisant la conclusion du théorème 6.0.1.i),

1. $\mathcal{Z} = 0$ si c et b sont C-linéairement indépendants modulo ∂K (auquel cas $K_M = K_{M_1}$ et $W_{-2}(M) = 0$).

2. $\mathcal{Z}$ de matrice représentative $\begin{pmatrix} 0 & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sinon ; en effet, la matrice représentative $\begin{pmatrix} 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M} * \mathcal{Z}$ coïncide alors avec celle du carré symétrique de $\mathcal{M}_2$, de sorte que $W_{-2}(M * Z) = W_{-2}(S^2\mathcal{M}_2) = 0$, tandis que
$$R_u(Z) = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}(\mathfrak{U})|\mathrm{K}) \simeq \mathrm{Gal}(\mathrm{K}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{U})|\mathrm{K}(\mathfrak{Q})) = \mathrm{W}_{-2}(\mathrm{M}).$$

7.3.2. Abélianisation. — En reprenant les notations du paragraphe 5.3, on déduit de la construction de l'abélianisé de $\mathcal{M}$ qu'il est possible de représenter matriciellement l'extension panachée $\mathcal{M}$(avec $\mathcal{X} = \mathbf{1}$) sous la forme suivante :
$$\begin{pmatrix} Y_2 & 0 & B_1^2 & C^2(*) \\ 0 & Y_1 & B_1^1 & C^1 \\ 0 & 0 & A & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & X = 0 \end{pmatrix}.$$
La définition de $\mathcal{Y}_2$ montre que la matrice en place $(*)$ n'a pas d'influence sur le calcul de $R_u(G_M)$). La construction de $\overline{\mathcal{M}}$ consiste à la négliger. Une représentation matricielle de $\overline{\mathcal{M}}$ est ainsi donnée par :
$$\begin{pmatrix} Y_2 & B_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1 & B_1^1 & C^1 \\ 0 & 0 & 0 & A & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
où $\begin{pmatrix} Y_2 & B_1^2 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ correspond à M_2^2 et $\begin{pmatrix} Y_1 & B_1^1 & C^1 \\ 0 & A & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ à M^1.

CHAPITRE 8

EQUATIONS GÉNÉRALES À RADICAL UNIPOTENT ABÉLIEN

Soit (K, ∂) un corps différentiel de corps des constantes C algébriquement clos, de caractéristique nulle, $\tilde{K}$ une clôture différentielle de K et $\mathcal{D}_K$ l'anneau $K[\partial]$ des opérateurs différentiels à coefficients dans K.
Dans la suite du chapitre, on adopte les notations et conventions suivantes :

1. Pour tout opérateur différentiel L à coefficients dans K, on note $\mathcal{L}$ le dual du $\mathcal{D}_K$ module $\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K L$. On note encore L le C-espace vectoriel de solutions de $\mathcal{L}$ dans $\tilde{K}$, ainsi que $K_L = K_{\mathcal{L}}$ l'extension de Picard-Vessiot de K associée à L dans $\tilde{K}$.
2. Si $L_1, ..., L_s$ sont des éléments de $\mathcal{D}_K$, on fera l'abus de notation suivant :

$$\mathcal{L}_1..\mathcal{L}_s = (\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K(L_1..L_s))^*$$

   où $L_1..L_s$ désigne le produit des opérateurs dans $\mathcal{D}_K$.

Pour des $\mathcal{D}_K$-modules du type $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1..\mathcal{L}_{n+1}$, et pour tout $p \in [1..n+1]$, on pose $W_{-p} = \mathrm{Gal}(\tilde{\mathrm{K}}|\mathrm{K}_{\mathcal{L}_1..\mathcal{L}_p}..\mathrm{K}_{\mathcal{L}_{n+1-(p-1)}..\mathcal{L}_{n+1}})$. Par ailleurs, on peut voir $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1..\mathcal{L}_{n+1}$ comme une extension panachée sur les objets initiaux $\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2, ..., \mathcal{L}_n,\ \mathcal{L}_{n+1}$. Pour tout $\mathcal{Z} \in Ext^1(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_{n+1})$, le $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{L} * \mathcal{Z}$ est donc bien defini. On donne dans ce chapitre une généralisation partielle du théorème 6.0.1.i) et on obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 8.0.1. *Soient $L_1, .., L_{n+1}$, $n+1$ opérateurs différentiels complètement réductibles à coefficients dans K, tels que le radical unipotent du groupe de Galois attaché à l'opérateur différentiel $L = L_1..L_{n+1}$ soit abélien, il existe un élément $\mathcal{Z}$ de $Ext^1(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_{n+1})$ défini sur K tel que $W_{-n}(\mathcal{L} * \mathcal{Z}) = 0$, et $R_u(\mathcal{Z}) = W_{-n}(\mathcal{L})$.*

La démonstration de ce théorème fera l'objet des paragraphes suivants :

8.1. DESCRIPTION DE W_{-n}

Soient $L_1, ..., L_{n+1}$, $n+1$ opérateurs différentiels complètement réductibles à coefficients dans K tels que le radical unipotent du groupe de Galois attaché à l'opérateur différentiel $L = L_1..L_{n+1}$ soit abélien.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L}_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & \mathcal{L}_2..\mathcal{L}_{n+1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{L}_2..\mathcal{L}_n \arrow[r] \arrow[d, "\underline{j}"] & 0 \ (1) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L}_{n+1} \arrow[r, "\underline{i}"] & \mathcal{L}_1..\mathcal{L}_{n+1} \arrow[r, "\underline{\pi}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{L}_1..\mathcal{L}_n \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & 0 \ (2) \\
 & & \mathcal{L}_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{L}_1 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 & \\
 & & (3) & (4) &
\end{tikzcd}
$$

On a d'après la proposition 6.1.3 l'existence d'une application injective notée :

$$\zeta_{-n} : W_{-n} \to Hom(L_1, L_{n+1}),$$

telle que :

$$\zeta^3(\sigma) = i \circ \zeta_{-n}(\sigma) \text{ et } \zeta^2(\sigma) = \zeta_{-n}(\sigma) \circ \underline{\rho}$$

pour tout $\sigma \in W_{-n}$.
Soit s une section de (4) en tant que suite exacte de $K_{L_1..L_n}.K_{L_2..L_{n+1}}[\partial]$-modules. Considérons le *pullback* de (2) par s. On obtient une extension $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}_1$ par $\mathcal{L}_{n+1}$, en tant que $K_{L_1..L_n}.K_{L_2..L_{n+1}}[\partial]$-modules.
L'espace des vecteurs horizontaux de $\mathcal{V}$ s'inscrit dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & L_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & V := s^*(L_1..L_{n+1}) \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, bend left, "s"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_{n+1} \arrow[r, "\underline{i}"] & L_1..L_{n+1} \arrow[r, "\underline{\pi}"] & L_1...L_n \arrow[r] \arrow[u, "\underline{\varrho}"] & 0 \\
 & & & L_2..L_n \arrow[u, "\underline{j}"] & \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

On vérifie comme pour la proposition 7.1.1 :

Proposition 8.1.1. *Soit K_V l'extension de Picard-Vessiot de $K_{L_1..L_n}.K_{L_2..L_{n+1}}$ relative à $\mathcal{V}$. Alors* $\mathrm{Gal}(\mathrm{K_V}|\mathrm{K_{L_1..L_n}.K_{L_2..L_{n+1}}}) = \mathrm{W_{-n}}(\mathcal{L})$.

8.2. DESCENTE DE L'EXTENSION $\mathcal{V}$ A $K_{L_1}...K_{L_{n+1}}$

Le radical unipotent de l'extension panachée $L_1..L_{n+1}$ étant abélien , il est muni d'une structure naturelle de Gr_0-module. Considérons désormais l'extension de groupes abéliens et de Gr_0-modules suivante :

$$0 \longrightarrow W_{-n} \xrightarrow{\iota} W_{-1} \xrightarrow{\kappa} W_{-1}/W_{-n} \longrightarrow 0.$$

Le groupe Gr_0 étant par hypothése réductif , cette suite exacte se scinde et l'on note r une rétraction de W_{-1} vers W_{-n} , morphisme de Gr_0-modules.
Posons $\overline{\zeta}(\sigma) := \zeta_V(r(\sigma))$ pour tout $\sigma \in W_{-1}$. On a $\overline{\zeta} \in H^1(W_{-1}, Hom(L_1, L_{n+1}))$. Il lui correspond donc, par équivalence de catégorie, une extension de $\mathcal{L}_1$ par $\mathcal{L}_{n+1}$, définie sur $K_{L_1}...K_{L_{n+1}}$. De plus, l'image de W_{-1} par le cocycle $\overline{\zeta}$ dans $Hom(L_1, L_{n+1})$ correspond à l'image de W_{-n}. On a ainsi obtenu une extension de $K_{L_1}...K_{L_{n+1}}[\partial]$-modules, notée $\overline{\mathcal{V}}$, telle que $\zeta_{\overline{\mathcal{V}}}(\sigma) := \zeta_V(r(\sigma))$ pour tout $\sigma \in W_{-1}$.
Ainsi $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}} \otimes_{K_{L_1}...K_{L_{n+1}}} K_{L_1..L_n}.K_{L_2..L_{n+1}}$.

8.3. DESCENTE DE L'EXTENSION $\overline{\mathcal{V}}$ AU CORPS DE BASE K

Considérons la suite exacte de groupes suivante :

$$0 \longrightarrow W_{-1} \xrightarrow{\iota_0} W_0 \xrightarrow{\kappa_0} Gr_0 \longrightarrow 0$$

Cette extension de groupe induit une suite exacte longue de cohomologie, suite d'inflation-restriction ([**35**]) :

$$0 \longrightarrow H^1(Gr_0, Hom(L_1, L_{n+1}))^{W_{-1}}) \longrightarrow H^1(W_0, Hom(L_1, L_{n+1}))$$

$$\cdots\cdots\to H^1(W_{-1}, Hom(L_1, L_{n+1}))^{Gr_0} \longrightarrow H^2(Gr_0, Hom(L_1, L_{n+1}))$$

L'action de Gr_0 sur $H^1(W_{-1}, Hom(L_1, L_{n+1}))$ est donnée par :

$$\sigma_0 * \zeta(\sigma) := \sigma_0 \circ \zeta(\sigma_0^{-1}\sigma\sigma_0) \circ \sigma_0^{-1}$$

pour tout $\sigma_0 \in Gr_0$ et tout $\zeta \in H^1(W_{-1}, Hom(L_1, L_{n+1}))$.

L'action de W_{-1} étant triviale sur $Hom(L_1, L_{n+1})$ et la réductivité de Gr_0 entraînant la nullité des groupes de cohomologie $H^1(Gr_0, Hom(X, Y))$ et $H^2(Gr_0, Hom(L_1, L_{n+1}))$, la suite d'inflation restriction fournit un isomorphisme ϕ entre $H^1(W_0, Hom(L_1, L_{n+1}))$ et $H^1(W_{-1}, Hom(L_1, L_{n+1}))^{Gr_0}$.

Lemme 8.3.1. *Le cocycle $\overline{\zeta} \in H^1(W_{-1}, Hom(L_1, L_{n+1}))$ est stable sous l'action de Gr_0.*

DÉMONSTRATION. — D'après la proposition 6.1.2 : $\forall \sigma_0 \in Gr_0, \forall \sigma \in W_{-n}, \zeta(\sigma_0\sigma\sigma_0^{-1}) = \sigma_0 \circ \zeta(\sigma) \circ \sigma_0^{-1}$. De plus r , rétraction du W_{-1} sur le W_{-n} est un morphisme de Gr_0-modules. Ainsi $\forall \sigma_0 \in Gr_0, \forall \sigma \in W_{-n}, r(\sigma_0\sigma\sigma_0^{-1}) = \sigma_0 r(\sigma)\sigma_0^{-1}$. On obtient donc :

$$\forall \sigma_0 \in Gr_0, \forall \sigma \in W_{-1}, \sigma_0 * \overline{\zeta}(\sigma) := \sigma_0 \circ \zeta(r(\sigma_0^{-1}\sigma\sigma_0)) \circ \sigma_0^{-1} = \sigma_0 \circ \zeta(\sigma_0^{-1} r(\sigma)\sigma_0) \circ \sigma_0^{-1} = \zeta(r(\sigma)) = \overline{\zeta}(\sigma)$$

□

Ainsi, $\overline{\zeta}$ est dans $H^1(W_{-1}, Hom(L_1, L_{n+1}))^{Gr_0}$. Il lui correspond donc par l'isomorphisme ϕ un cocyle dans $H^1(W_0, Hom(L_1, L_{n+1}))$, noté $\mathcal{Z}$. L'équivalence de catégorie entre représentation de W_0 et opérateurs différentiels à coefficients dans K assure l'existence d'un $\mathcal{D}_K$-module noté, à nouveau $\mathcal{Z}$, défini sur K, extension de $\mathcal{L}_1$ par $\mathcal{L}_{n+1}$ de radical unipotent isomorphe à $W_{-n}(L_1..L_{n+1})$ et tel que $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{Z} \otimes_K K_{L_1} ... K_{L_{n+1}}$

PARTIE IV

EQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

CHAPITRE 9

THÉORIE DE GALOIS DES CORPS AUX DIFFÉRENCES

Ce chapitre basé sur l'ouvrage de Marius van der Put et Michael Singer [**38**] rappelle brièvement les définitions et théorèmes principaux de cette théorie, afin de les appliquer au cadre particulier du corps de base $K = \mathbb{C}(z)$.

9.1. ANNEAUX DE PICARD-VESSIOT

Définition

1. Un anneau aux différences est un anneau commutatif R, doté d'un automorphisme $\phi : R \to R$. Si R est un corps, on dit que R est un corps aux différences.
2. L'ensemble des constantes d'un anneau différentiel R, noté C_R est constitué des élements c de R vérifiant $\phi(c) = c$.
3. Un idéal aux différences de R est un idéal I stable par ϕ. Un anneau aux différences est dit simple si ses seuls idéaux aux différences sont (0) et R.

Exemple Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, q un nombre complexe non nul et non racine de l'unité et τ un nombre complexe non nul.
Les automorphismes σ_q donné par $\sigma_q(z) = qz$ et σ_τ donné par $\sigma_\tau(z) = z + \tau$, munissent chacun $K = \mathbb{C}(z)$ d'une structure de corps aux différences, dont l'anneau des constantes est $\mathbb{C}$.

Soit R un anneau aux différences et $A \in Gl_n(R)$. Une *matrice fondamentale* à coefficients dans R pour le système $\phi Y = AY$ est une matrice $U \in Gl_n(R)$ telle que $\phi(U) = AU$. Deux matrices fondamentales associées à la même équation se déduisent l'une de l'autre par multiplication par une matrice $P \in Gl_n(C_R)$.

Soient K un corps aux différences, C_K son corps des constantes et $\phi Y = AY$ un système aux différences du premier ordre , où $A \in Gl_n(K))$. On dit qu'une K-algèbre de type fini R est un *anneau de Picard-Vessiot* pour $\phi(Y) = AY$ si :

1. il existe un automorphisme de R, également noté ϕ, prolongeant ϕ.
2. R est un anneau aux différences simple.

3. Il existe une matrice fondamentale de solutions de $\phi Y = AY$ à coefficients dans R.
4. R est minimal en ce sens qu'aucune sous-algèbre propre de R ne satisfait les conditions $1, 2$ et 3.

Théorème 9.1.1 (Existence et unicité d'un anneau de Picard-Vessiot [38])
Soit (K, ϕ) un corps aux différences de corps des constantes C algébriquement clos, de caractéristique nulle et

$$\phi(Y) = AY \tag{9}$$

, $A \in Gl_n(K)$, un systéme aux différences.

1. *Il existe un anneau de Picard-vessiot R associé à l'équation 9 et $C_R = C$.*
2. *Si R_1 et R_2 sont deux anneaux de Picard-Vessiot de K pour $\phi(Y) = AY$ alors, il existe un isomorphime entre R_1 et R_2 commutant avec ϕ.*
3. *Soit G le groupe de Galois de R sur K, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes de R commutant avec ϕ et stabilisant K. Alors G a une structure de groupe algébrique linéaire sur C et de plus $dim_C G = degtr(R/K)$.*

9.2. MODULES AUX DIFFERENCES ET FONCTEUR FIBRE

Soit K un corps aux différences d'automorphisme σ, de corps des constantes C algébriquement clos. L'anneau $\mathcal{D}_\sigma := K[\sigma, \sigma^{-1}]$ des opérateurs aux différences est constitués des sommes finies de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \sigma^n$. La multiplication de cet anneau est donné par la formule suivante pour a dans K, $\sigma a = \sigma(a)\sigma$.
On note $Diff(K, \sigma)$ la catégorie des $K[\sigma, \sigma^{-1}]$-modules de dimension finie sur K.

Théorème 9.2.1. *La catégorie $Diff(K, \sigma)$ est une catégorie tannakienne neutre sur C.*

On fixe un foncteur fibre ω de $Diff(K, \sigma)$ dans $Vect_C$. Soit $\mathcal{V} \in Diff(K, \sigma)$, $< \mathcal{V} >$ la sous-catégorie tannakienne engendrée par $\mathcal{V}$ dans $Diff(K, \sigma)$, alors $Aut^{\otimes}_{\omega}(< \mathcal{V} >)$ est isomorphe au groupe algébrique linéaire sur C défini au théorème 9.1.1(voir [**38**], [**1**]). On l'appellera groupe de Galois de $\mathcal{V}$, et on le notera G_V (pour $V = \omega(\mathcal{V})$), en précisant souvent *au sens de* [**38**]).

CHAPITRE 10

EXTENSIONS D'ÉQUATIONS AUX q-DIFFÉRENCES

On considère le corps K des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$, que l'on munit d'une structure de corps aux différences via l'automorphisme σ_q (où q est un nombre complexe donné de module différent de 1) qui à $f(z)$ associe $f(qz)$. On pose alors $\mathcal{D}_q = \mathcal{D}_{\sigma_q}$, et on se place dans la categorie des $\mathcal{D}_q$-modules de dimension finie sur K.

10.1. RADICAL UNIPOTENT D'UNE EXTENSION DE MODULES AUX q-DIFFERENCES

Le théorème 2.2.5 s'écrit ici :

Théorème 10.1.1. *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des $\mathcal{D}_q$-modules semi-simples et $\mathcal{U}$ une extension de $\mathcal{X}$ par $\mathcal{Y}$. Alors le groupe de Galois de $\mathcal{U}$ est égal au produit semi-direct du groupe réductif $G_{\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}}$ par un sous-espace vectoriel $\omega(\mathcal{V})$ de $\omega(\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$ où $\mathcal{V}$ est le plus petit sous-$\mathcal{D}_q$-module de $\underline{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ tel que le quotient de l'extension $\mathfrak{R}(\mathcal{U})$ par $\mathcal{V}$ soit une extension scindée.*

10.2. DESCRIPTION DES GROUPES D'EXTENSIONS

On donne dans la proposition suivante, une propriété essentielle des groupes d'extensions de $\mathcal{D}_q$-modules. Cette propriété justifiera dans le chapitre 11 la construction d'extensions panachées dans cette catégorie ([**34**], [**18**]).
On note $\delta_q = \sigma_q - 1$.

Proposition 10.2.1. *Pour tout entier $i > 1$, tout $\mathcal{D}_q$-module $\mathcal{M}$ et tout $\mathcal{D}_q$-module $\mathcal{N}$ libres de rang fini sur K, les groupes de cohomologie $Ext^i(\mathcal{M},\mathcal{N})$ sont nuls.*

Démonstration. — On considère un $\mathcal{D}_q$-module $\mathcal{M}$ libre de rang fini. Le lemme du vecteur cyclique ([**33**]) assure l'existence d'un q-opérateur L à coefficients dans K que l'on appellera équation de $\mathcal{M}$ et d'un morphisme π de $\mathcal{D}_q$ dans M, tels que la suite de $\mathcal{D}_q$-modules suivante soit exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_q \xrightarrow{\times L} \mathcal{D}_q \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow 0 \tag{10}$$

L'application $\times L$ correspond à la multiplication à droite par L.
On en déduit, pour tout $\mathcal{D}_q$-module $\mathcal{N}$ la suite exacte longue de cohomologie suivante :

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow Hom(\mathcal{D}_q,\mathcal{N}) \xrightarrow{\times L} Hom(\mathcal{D}_q,\mathcal{N}) \longrightarrow Ext^1(\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow$$

$$Ext^1(\mathcal{D}_q,\mathcal{N}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Ext^i(\mathcal{D}_q,\mathcal{N}) \longrightarrow Ext^{i+1}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow Ext^{i+1}(\mathcal{D}_q,\mathcal{N}) \longrightarrow \cdots$$

Le module $\mathcal{D}_q$ étant libre, $Ext^i_{\mathcal{D}_q}(\mathcal{D}_q,\mathcal{N})$ est nul pour tout $i > 0$.
Donc $Ext^i_{\mathcal{D}_q}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = 0$ pour tout $i > 1$. □

On note **1** le $\mathcal{D}_q$-module $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q$ ($\delta_q := \sigma_q - 1$) .

Proposition 10.2.2. *Toute extension de $\mathcal{D}_q$-module de $\mathcal{M} = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_qL$ par $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q$ s'écrit sous la forme $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\mathcal{N}L$ où $\mathcal{N}$ est un opérateur équivalent à δ_q.*

Démonstration. — De 10, on déduit l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow Hom(\mathcal{M},\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q) \longrightarrow Hom(\mathcal{D}_q,\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q) \xrightarrow{\times L} Hom(\mathcal{D}_q,\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q) \xrightarrow{E}$$

$$Ext^1(\mathcal{M},\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q) \longrightarrow 0.$$

On peut remarquer que :

1. L'application E correspond au *pushout* de la suite exacte suivante par un élément g de $Hom(\mathcal{D}_q,\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{D}_q \arrow[r, "\times L"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{D}_q \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{M} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q \arrow[r] & E(g) \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

2. $Hom(\mathcal{D}_q,\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q)$ est isomorphe à K. En effet, un élément ϕ de $Hom(\mathcal{D}_q,\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q)$ est entièrement déterminé par la classe $\overline{\phi(1)}$ modulo δ_q de $\phi(1)$ (soit $Q \in \mathcal{D}_q$, alors $\phi(Q) = \overline{Q\phi(1)} = \overline{Q}.\overline{\phi(1)}$).

Lemme 10.2.3. *L'application E induit un isomorphisme de groupes entre $K/L(K)$ et $Ext^1(\mathcal{M},\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q)$.*

DÉMONSTRATION. — L'application multiplication à droite par L de $Hom(\mathcal{D}_q, \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q)$ dans lui-même associe à un morphisme ϕ ($Q \in \mathcal{D}_q$, $\phi(Q) = Q\phi(1)$), la multiplication à droite par $L\phi$ où pour tout $Q \in \mathcal{D}_q$, $" \times L" \phi(Q) = QL\phi(1)$. Or la classe modulo δ_q de $L\phi(1)$ est égale à $L(\overline{\phi(1)})$. On en déduit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Hom(\mathcal{D}_q, \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q) \arrow[r, "\text{"}\times L\text{"}"] \arrow[d, "\simeq"] & Hom(\mathcal{D}_q, \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q) \arrow[d, "\simeq"] \\
K \arrow[r, "L(.)"] & K \\
f \arrow[r, mapsto] & L(f)
\end{tikzcd}$$

donc que : $Ext^1(\mathcal{M}, \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q)$ est isomorphe à $K/L(K)$.

□

Montrons enfin que $E(g)$ est isomorphe à l'extension de $\mathcal{M}$ par $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q$ que définit $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma_q - \frac{\sigma_q(g)}{g})L$.
Pour tout élément B de $\mathcal{D}_q$ on note p_B la projection canonique de $\mathcal{D}_q$ sur $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_qB$. On note ϕ l'application $\mathcal{D}_q \times \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q \longrightarrow \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma_q - \frac{\sigma_q(g)}{g})L$

$$(a, b) \longmapsto p_{(\sigma_q - \frac{\sigma_q(g)}{g})L}(a + b * \tfrac{1}{g}L)$$

1. L'application ϕ est bien définie car $\delta_q \frac{1}{g} L = \frac{1}{\sigma_q(g)}(\sigma_q - \frac{\sigma(g)}{g})L$.

2. L'application ϕ est surjective.

3. Le noyau de ϕ est l'ensemble $\{(PL, -p_{\delta_q}(P)g)$ avec $P \in \mathcal{D}_q\}$.

Par définition du *pushout* par g_*, on en déduit par passage au quotient que ϕ induit un isomorphisme d'extensions entre $E(g)$ et $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma_q - \frac{\sigma_q(g)}{g})L$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q \arrow[r] \arrow[d, equal] & E(g) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q \arrow[r, "\frac{1}{g}L"] & \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma_q - \frac{\sigma_q(g)}{g})L \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

□

10.3. DIMENSION DE $Ext^1(\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\delta_q, \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_qA)$

Soit A l'opérateur aux q-différences $\sigma_q^n + a_{n-1}\sigma_q^{n-1} + .. + a_0$, où $a_i \in K$ pour tout $i = 0..n-1$ et $a_0 \in K^*$.
On suppose que A est à singularités fixées dans un ensemble S de cardinal fini . On note K_S le sous-anneau de K formé des fonctions sans pôle hors de S.
On illustre dans ce paragraphe la spécificité des équations aux q-différences vis-à-vis des opérateurs différentiels. Dans le cadre différentiel, le conoyau de l'opérateur L dans K_S est de dimension finie. Le phénomène de propagation des pôles le long de spirales logarithmiques entraîne, sauf dans le cas très particulier où S est réduit à $\{0, \infty\}$, que la dimension du conoyau d'un opérateur aux q-différences est de dimension infinie.

10.3.1. Calcul de la dimension de $K_S/A(K_S)$ dans le cas où $S = \{0, \infty\}$. — Pout tout $x \in \mathbb{C}$, on note $u_x := z - x$ un paramètre local en x et $u_\infty := 1/z$ un paramètre local en l'infini. Posons $i_x(A) := -inf(0, inf_j(v_x(a_j)))$, qu'on appellera l'irregularité de A en x (v_x désigne la valutaion en x).

Proposition 10.3.1. *Soit A un opérateur unitaire sans solutions rationnelles, dont l'ensemble des singularités est $\{0, \infty\}$. Alors la dimension de $K_{\{0,\infty\}}/A(K_{\{0,\infty\}})$ est finie et vaut $i_0(A) + i_\infty(A)$.*

Démonstration. — (inspirée de **[26]** lemme 2.9.13, **[9]** et de **[27]**)
Le calcul de $A({u_x}^t)$ donne :

$$A({u_x}^t) = u_x z^t(q^{nt} + a_{n-1}q^{(n-1)t} + .. + a_0).$$

Posons $P_x(X) = (u_x^{i_x})|_x X^n + (u_x^{i_x}a_{n-1})|_x X^{n-1} + .. + (a_0 {u_x}^{i_x})|_x$. P_x est un polynôme non nul de degré au plus n . Si t est un entier suffisamment grand, q^t n'est pas racine de P_x (car $|q| \neq 1$). On en déduit que, si t est suffisamment grand, $v_0(A({u_x}^t) = t + inf(0, v_x(a_0)))$.

Posons $D = (d_x)_{x\ \in S}$ où $d_x \in \mathbb{Z}$, $D^- = (d_x - 1)_{x \in S}; D(A) = (d_x + i_x)_{x \in S}$
et $K_S[D] := \{f \in K_S; v_x(f) \geq -d_x\ \forall\ x \in S\}$.
Les formules ci-dessus et l'existence d'une décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, montrent que A applique $K_S[D]$ dans $K_S[D(A)]$ pour tout D, et induit un isomorphisme de $K_S[D]/K_S[D^-]$ sur $K_S[D(A)]/K_S[D(A)^-]$ dès que D est coordonnée par coordonnée suffisamment grand, disons plus grand qu'un certain s-uplet D_0.
On a alors :

$$\mathrm{dim(K_S/A(K_S)) = dim(K_S[D_0(A)]/A(K_S[D_0])) = \sum_{x\in S} i_x + dim_C Ker(A : K_S \to K_S).}$$

□

Remarque
En fait, il aurait suffit de supposer que A n'avait pas de solutions dans $K_{\{0,\infty\}}$.

10.3.2. Contre-exemple de finitude. — On considère ici l'opérateur aux différences $A = \sigma_q - id$ et on se place sur l'anneau K_S des fonctions rationnelles sans pôle en dehors de $S = \{0, \infty, 1\}$. (voir **[28]** p. 218)

Proposition 10.3.2. *Pour tout entier positif* n*, la famille* $\{\frac{1}{(z-1)}, ..\frac{1}{(z-1)^n}\}$ *est linéairement indépendante sur* $\mathbb{C}$ *modulo* $(\sigma_q - id)(K_S)$*.*

DÉMONSTRATION. — Soient $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}$ et $f \in K_S$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(z-1)^i} = f(qz) - f(z).$$

On écrit la décomposition en éléments simples de f

$$f(z) = P(z) + \sum_{j=1}^{r} \frac{c_j}{(z-1)^j} \text{ où } P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}[z].$$

On obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(z-1)^i} = \sum_{n=0}^{N} (q^n a_n - a_n) z^n + \sum_{j=1}^{r} \frac{c_j/q^j}{(z-(1/q))^j} - \frac{c_j}{(z-1)^j}.$$

On déduit de l'unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle que :

1. Pour tout $n \geq 1$, $a_n = 0$ (car $|q| \neq 1$).
2. Pour tout $j = 1, ..., r$, $c_j = 0$.

Ainsi les λ_i sont nuls pour tout i. On en déduit que la famille $\{\frac{1}{(z-1)}, ..\frac{1}{(z-1)^n}\}$ est linéairement indépendante sur $\mathbb{C}$ modulo $(\sigma_q - id)(K_S)$. □

Corollaire 10.3.3. *Pour* $S = \{0, \infty, 1\}$*, la dimension de* $Ext^1_{K_S[\sigma_q]}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ *est infinie.*

DÉMONSTRATION. — En effet, la dimension de $Ext^1_{K_S[\sigma_q]}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ est égale à celle du conoyau de $(\sigma_q - 1)$ et d'après la proposition 10.3.2 cette dernière est infinie. □

Remarque 1 :
On a en fait un résultat plus fort, et qui sera nécessaire dans la suite pour calculer la dimension des groupes de Galois : *la famille* $\{\frac{1}{(z-1)}, ..\frac{1}{(z-1)^n}\}$ *est linéairement indépendante sur* $\mathbb{C}$ *modulo* $(\sigma_q - id)(K)$ (pas seulement modulo $(\sigma_q - id)(K_S)$). La preuve est analogue à celle du lemme 11.6.3 infra.

Remarque 2 : Soit S un sous-ensemble de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, on dira que S est **saturé** si : $\forall x \in S,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ q^n x \in S.$

Lemme 10.3.4. *Soit S un sous-ensemble de $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ saturé, A un élément unitaire de $K_S[\sigma_q]$, l'application naturelle de $Ext^1_{K_S[\sigma_q,\sigma_q{}^{-1}]}(\mathcal{D}_{K_S}/\mathcal{D}_{K_S}A, \mathbf{1})$ dans $Ext^1_{K[\sigma_q,\sigma_q{}^{-1}]}(\mathcal{D}_K/\mathcal{D}_K A, \mathbf{1})$ est injective.*

On retrouve ici un énoncé analogue à celui de la théorie de Galois différentielle.

Démonstration. — En effet, il suffit de démontrer que si l'équation $A(f) = g$ avec $g \in K_S$ a une solution f dans K alors f est dans K_S.
Notons n le degré de A et suposons qu'il existe x dans le diviseur de f, n'appartenant pas à S. On considère n_0 l'entier maximal tel que $q^{-n_0}x$ soit dans le diviseur de f. La maximalité de n_0 assure que $q^{-n-n_0}x$ est dans le diviseur de $A(f)$ et donc dans celui de g. Ceci est absurde car S est saturé. □

Si S n'est pas saturé,un contre-exemple à l'injectivité de l'application précédente est donné par :

1. $S = \{q^{-1}, q\}$.
2. $f = \frac{1}{z-1} + \frac{q}{z-q}$.
3. $\sigma_q(f) - f = g = \frac{1}{qz-1} - \frac{q}{z-q}$.

Une démonstration similaire à celle du lemme précédent permet de montrer qu'il n'existe pas d'élément k de K_S vérifiant $\sigma_q(k) - k = g$.

CHAPITRE 11

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ISSUES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

Soit (K, σ, ∂) un corps aux différences et différentiel de caractéristique nulle, tel que $\sigma \circ \partial = \partial \circ \sigma$. On note C_σ le sous-corps de K formé des invariants sous σ, et C_∂ le sous-corps des constantes différentielles de K.

Exemples

1. $(\mathbb{C}(z), \sigma_q, zd/dz)$ avec $C_{\sigma_q} = \mathbb{C} = C_{zd/dz}$.
2. $(\mathbb{C}(z), \sigma_\tau, d/dz)$ avec $C_{\sigma_\tau} = \mathbb{C} = C_{d/dz}$.
3. $(\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*), \sigma_q, zd/dz)$ avec $C_{\sigma_q} = C_E$ et $\mathbb{C} = C_{zd/dz}$ (où C_E est le sous-corps du corps $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$, formé des éléments $f \in \mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ vérifiant $\sigma_q(f) = f$; on dira que C_E est le corps des fonctions q-elliptiques)
4. $(C_E(z), \sigma_q, zd/dz)$ avec $C_{\sigma_q} = C_E$ et $\mathbb{C} = C_{zd/dz}$.

On considère le système aux différences suivant :

$$\sigma Y = AY \tag{11}$$

où $A \in Gl_n(K)$ et $Y \in K^n$.
On note $\mathcal{A}$ le $\mathcal{D}_\sigma$-module associé à ce système.
Considérons le vecteur

$$\begin{pmatrix} \partial Y \\ Y \end{pmatrix} \in K^{2n}.$$

Il vérifie l'équation aux différences suivante :

$$\sigma \begin{pmatrix} \partial Y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \partial A \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial Y \\ Y \end{pmatrix} \tag{12}$$

qui correspond à une extension de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}$ dans la catégorie des $\mathcal{D}_\sigma$-modules.

De même, la considération des dérivées secondes conduit au système aux différences

$$\sigma \begin{pmatrix} \partial^2 Y \\ \partial Y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 2\partial A & \partial^2 A \\ 0 & A & \partial A \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^2 Y \\ \partial Y \\ Y \end{pmatrix} \tag{13}$$

c'est-à-dire à la représentation matricielle d'une extension panachée $\mathcal{M}$ dans cette catégorie sur les objets initiaux $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$.
On va étudier les systèmes aux σ-différences 11, 12, 13 en se limitant au cas où A **est de rang** 1 : $A = (a)$, $a \in K^*$.

Remarque

L'idée de combiner deux opérateurs n'est pas nouvelle. Elle conduit souvent à des énoncés d'incompatibilité pour les solutions simultanées d'équations linéaires en ces opérateurs (voir par exemple [**10**]). Ici, en privilégiant σ_q, on parvient à des résultats d'indépendance algébriques pour l'opérateur ∂.

On suppose jusqu'au paragraphe 11.6.3 que C_σ est algébriquement clos (et en général, que
$K = \mathbf{C}(z), \sigma = \sigma_q$), de sorte les résultats du chapitre 9 sont vérifiés par (K, σ). On se propose dans ces conditions de calculer les groupes de Galois (au sens de [**38**]) des systèmes aux différences 11, 12) 13, sans référence aux éventuelles propriétés différentielles de leurs solutions.

Définition 11.0.5. *Soit $(K = \mathbb{C}(z), \sigma_q)$ et $a \in K^*$, on dira que a est* ***sous forme standard*** *([**38**] chap.2) si, pour tout $c \in \mathbb{C}^*$ dans le diviseur de a, et tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $q^n c$ n'apparait pas dans le diviseur de a. On peut écrire tout élément a de K^* sous la forme $a = \overline{a}\frac{\sigma(f)}{f}$ avec $f \in K^*$ et $\overline{a}$ sous forme standard.*

11.1. GROUPE DE GALOIS DU SYSTEME 11

On se place sur le corps aux différences $(K := \mathbb{C}(z), \sigma_q)$. Nous adoptons la définition du groupe de Galois donnée dans [**38**].

Proposition 11.1.1. *Le groupe de Galois de l'équation 11 est égal à μ_n si $a(z) = \lambda\frac{\sigma_q(g)}{g}$, $g \in K^*$ et λ d'ordre n dans $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$, égal à $\mathbf{G}_m$ sinon.*

Démonstration. — On écrit a sous la forme $a = \overline{a}\frac{\sigma(g)}{g}$ où $g \in K^*$ et $\overline{a}$ sous forme standard.

Le groupe de Galois G de l'équation 11, est un sous groupe algébrique de $\mathbb{G}_m$. Il est donc égal à $\mathbb{G}_m$ ou à un sous-groupe fini du type μ_n (groupe des racines n-ièmes de l'unité). Supposons que $G = \mu_n =< \sigma >$.
Soit y une solution de 11 dans l'anneau de Picard-Vessiot $K_a := K[y, \frac{1}{y}]$ de l'équation. Il existe $\zeta \in \mu_n$ telle que $\sigma(y) = \zeta y$. On a $f\ inK_a{}^{<\sigma>} = K$ d'après **[38]** lemme 1.28, et $a^n = \frac{\sigma_q(f)}{f}$ ce qui équivaut à $\overline{a}^n = \frac{\sigma_q(k)}{k}$, $k \in K^*$.
Or si $\overline{a}$ est sous forme standard, il en est de même de $\overline{a}^n$. On en déduit que le diviseur de k est porté par (0), donc que $\frac{\sigma_q(k)}{k} = q^{deg(k)}$. Ainsi $\overline{a}$ est un élément $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $\lambda^n = q^{deg(k)}$. Ceci termine la démonstration.

□

11.2. GROUPE DE GALOIS DU SYSTEME 12

Soit (K, σ, ∂) un corps aux différences différentiel de caractéristique nulle tel que $\sigma \circ \partial = \partial \circ \sigma$. On suppose ici que C_σ est algébriquement clos, et que $C_\partial \subset C_\sigma$.

L' équation 12 est une extension en termes de $\mathcal{D}_\sigma$-modules du $\mathcal{D}_\sigma$-module associé à l'équation 11 par lui-même.

On peut ainsi se demander sous quelles conditions, cette extension est scindée. La réponse est la même que pour la théorie des $\mathcal{D}_K$-modules : l'extension est scindée si et seulement si il existe $F \in M_n(K)$ telle que : $\partial A = \sigma(F)A - AF$.
Ceci nous conduit aux définitions suivantes :

Définition 11.2.1. *On dira que K est **logarithmique** si pour tout $a \in K^*$, on a la proposition suivante :*
S'il existe $f \in K$ tel que $\frac{\partial a}{a} = \sigma(f) - f$ alors il existe $g \in K^*$ tel que $a = \mu\frac{\sigma(g)}{g}$, $\mu \in C_\partial$

*On dira que K, contenant $\mathbb{C}(z)$ est **quasi logarithmique**, si pour tout $a \in \mathbb{C}(z)^*$, on a la proposition suivante :*
S'il existe $f \in K$ tel que $\frac{\partial a}{a} = \sigma(f) - f$ alors il existe $g \in \mathbb{C}(z)$ tel que $a = \mu\frac{\sigma(g)}{g}$, $\mu \in C_\partial$.

Théorème 11.2.2. *Soit K un corps logarithmique. Alors la dimension du radical unipotent du groupe de Galois (pris au sens de* [**38**]*) du système aux différences*

$$\sigma U = \begin{pmatrix} a & \partial a \\ 0 & a \end{pmatrix} U$$

est nulle si et seulement si a est de la forme $\mu \frac{\sigma(g)}{g}$, $\mu \in C_\partial$, $g \in K$.

Démonstration. — Le radical unipotent de l'équation $(*)$ étant un sous groupe de $\mathbb{G}_a$ (*cf.* théorème 2.2.5), sa dimension est nulle si et seulement si l'extension de $\mathcal{D}_\sigma$-module associée est scindée : c'est-à-dire s'il existe $h \in K$ tel que $\partial a/a = \sigma(h) - h$. Si K est logarithmique, cette dernière condition revient à demander que a soit de la forme $\mu \frac{\sigma(g)}{g}$ où $g \in K$ et $\mu \in C_\partial$. La dimension du radical est égale à 1 dans le cas contraire.

□

11.2.1. Le corps aux q-différences des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$ est logarithmique. — On munit le corps $K := \mathbb{C}(z)$ de l'automorphisme aux différences $\sigma(f)(z) = f(qz)$ où $q \in \mathbb{C}^*$ a un module différent de 1, et de la dérivation $z\frac{d}{dz} = \partial$.

Théorème 11.2.3. *(*[**23**]*) Soit $a \in \mathbb{C}(z)^*$. On a équivalence entre :*

1. *Il existe $f \in \mathbb{C}(z)$ telle que $\frac{\partial a}{a} = f(qz) - f(z)$.*
2. *Il existe $g \in \mathbb{C}(z)$ telle que $a = \mu \frac{g(qz)}{g(z)}$, $\mu \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. — Ecrivons a sous la forme $a = \overline{a}\frac{\sigma_q(g)}{g}$, $g \in K^*$, $\overline{a}$ sous forme standard.(voir aussi [**28**])

On va raisonner par condition nécessaire et suffisante. On note $' = \frac{d}{dz}$

Supposons que $a \in K$ vérifie une équation du type $za'(z) = a(z)(f(qz) - f(z))$ où $f(z) \in \mathbb{C}(z)$. Ce qui équivaut à

$$z(\overline{a})'(z) = \overline{a}(z)(k(qz) - k(z)) \tag{14}$$

, où $k(z) \in \mathbb{C}(z)$. (on utilise la formule $\partial a/a = \partial\overline{a}/\overline{a} + \sigma_q(\partial g/g) - \partial g/g$).
Ecrivons $\overline{a}(z) = \lambda \prod_{i=1}^r (z - a_i)^{\alpha_i}$, où $a_i \neq q^{\mathbb{Z}} a_j$ si $i \neq j$, et $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
La décomposition de k en éléments simples s'écrit :

$$k(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n + \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{\gamma_t} \frac{\nu_i^j}{(z - c_i)^j}$$

.
En écrivant l'équation 14 sous la forme $z\frac{\overline{a}'(z)}{\overline{a}(z)} = k(qz) - k(z)$ on obtient :

$$\sum_i \alpha_i + \sum_i \frac{\alpha_i a_i}{(z - a_i)} = \sum_{n=1}^N (q^n a_n - a_n) z^n + \sum_i \sum_j \frac{\nu_i^j}{(z - c_i)^j} - \frac{\nu_i^j / q^j}{(z - c_i/q)^j} \tag{15}$$

Il en résulte que $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum \alpha_i = 0$. On va montrer que k ne peut avoir de pôle d'ordre supérieur ou égal à 2. En effet, supposons que k ait un pôle c_{i_k} d'ordre $k > 1$.
On va d'abord traiter le cas $c_{i_k} = 0$
L'équation (15) ne comprenant dans son membre de gauche aucun terme d'ordre plus grand que 2, on en déduit que : $\nu^j_{i_k} = q^{-j}\nu^j_{i_k}$ pour tout $j \geq 2$. Or, q étant un nombre complexe de module différent de 1, on en déduit que $\nu^j_{i_k} = 0$ pour tout $j \geq 2$.

Si $c_{i_k} \neq 0$, alors il doit exister un entier i_{k+1} tel que $c_{i_k} = c_{i_{k+1}}/q$ et $\nu^j_{i_k} = q^{-j}\nu^j_{i_{k+1}}$. Ceci signifie que si c est un pôle d'ordre au moins 2 pour k alors qc doit être un pôle d'ordre au moins 2 pour k. Comme k ne peut avoir un nombre infini de pôles, on en déduit que k n'a que des pôles simples.

On notera désormais pour simplifier $\nu_i = \nu^1_i$ pour tout i et $\delta_i = \nu_i/c_i$. L'équation (15) se résume alors à :

$$\sum \frac{\alpha_i a_i}{(z - a_i)} = \sum \frac{c_i/q\delta_i}{(z - c_i/q)} - \frac{c_i\delta_i}{(z - c_i)} \tag{16}$$

Si a_i est un pôle ou un zéro non nul de $\overline{a}$, alors a_i/q ne peut être un élément du diviseur de $\overline{a}$. On suppose qu'il existe i_0 tel que $a_i = c_{i_0}$ ($a_i = c_{i_0}/q$ donnerait lieu au même type de raisonnement). Considérons alors l'entier n_0 maximal tel que c_{i_0}/q^{n_0} soit égal à un élément c_{i_1}. Comme $\overline{a}$ est sous forme standard, c_{i_1}/q ne peut aparaître comme diviseur de $\overline{a}$. Il existe donc i_2 tel que $c_{i_2} = c_{i_0}/q^{n_0+1}$ (d'après la formule (16)). Or ceci est absurde par maximalité de n_0 et non nullité de c_{i_0}.
On en déduit que $\overline{a}$ ne peut avoir de pôle ou de zéro non nuls. Le fait que $\sum \alpha_i = 0$ assure que $\overline{a}$ est un élément de $\mathbb{C}$. On en déduit que a doit être de la forme $a(z) = \lambda\frac{g(z)}{g(qz)}$ où g est une fraction rationnelle. Réciproquement si a est de la forme précédente, on obtient par dérivation $a'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}a(z) - q\frac{g'(qz)}{g(qz)}a(z)$. En posant $f(z) := -z\frac{g'(z)}{g(z)}$, on obtient $za'(z) = f(qz)a(z) - f(z)a(z)$. □

Corollaire 11.2.4. *Soit $a \in \mathbb{C}(z)^*$. Si a n'est pas de la forme $\mu\frac{g(qz)}{g(z)}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $g \in \mathbb{C}(z)$, alors la dimension sur $\mathbb{C}$ du groupe de Galois (pris au sens de* **[38]***) du système aux q-différences 12 associé à a est égale à 2.*

Démonstration. — Si $G(i)$ désigne pour $i = 1, 2$, le groupe de Galois du système (i), on a d'après le théorème 11.2.2, $R_u(G(2)) = \mathbb{G}_a$ et $G(1) = G(2)/R_u$ et d'après la proposition 11.1.1, $G(1) \simeq \mathbb{G}_m$. □

11.3. EXTENSIONS PANACHEES

Soit (K, σ) un corps aux différences de corps des constantes $C_\sigma := C$ de caractéristique nulle, algébriquement clos, on note $\mathcal{D}_\sigma$ l'anneau des polynômes aux σ-différences.

Avant d'étudier le système aux σ-différences 13, on se place dans le cadre plus général des systèmes aux différences de la forme définie ci-dessous.

Soit a un élément de K^*. On lui associe l'équation aux σ-différences : $\sigma(f) = af$ et on note $\mathcal{A}$ le $\mathcal{D}_\sigma$-module associé. Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux éléments non triviaux de $Ext^1_{\mathcal{D}_\sigma}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ et $\mathcal{M}$ un élément de $Extpan_{\mathcal{D}_\sigma}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$.
On peut représenter matriciellement le $\mathcal{D}_\sigma$-module $\mathcal{M}$ de la façon suivante :

$$M := \begin{pmatrix} a & b_1 & c \\ 0 & a & b_2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{où } b_1, b_2, c \in K.$$

Notations Pour $f \in K$, on notera $f^\sigma = \sigma(f)$.

11.3.1. Extension panachée de $\mathcal{M}_1$ par $\mathcal{M}_2$ en dualité.

— Tordons l'extension panachée $\mathcal{M}$ par $\mathcal{A}^{-1}$, c'est-à-dire, considérons le $\mathcal{D}_\sigma$-module $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}^{-1}$, dont une expression matricielle est donnée par :

$$N := \begin{pmatrix} 1 & b_1/a & c/a \\ 0 & 1 & b_2/a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{1,a}$ (respectivement $\mathcal{M}_{2,a}$) l'extension $\mathcal{M}_1$ (respectivement $\mathcal{M}_2$) tordue par $\mathcal{A}^{-1}$.

Remarque Notons que pour $\mathcal{A}$ de rang 1, $Ext^1(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = Ext^1(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ de manière canonique et qu'ainsi l'opération $\mathfrak{R}$ définie au paragraphe 2.1 correspond à l'opération $\mathcal{U} \to \mathcal{U} \otimes \mathcal{A}^{-1}$

Lemme 11.3.1. *Les $\mathcal{D}_\sigma$-modules $\mathcal{M}_{1,a}$ et $\mathcal{M}^*_{2,a}$ sont isomorphes si et seulement si il existe une σ- constante λ non nulle et un élément f de K tels que $b_1 = \lambda b_2 + f^\sigma a - af$.*

Démonstration. — Si $\mathcal{M}_{1,a}$ et $\mathcal{M}_{2,a}$ sont des éléments de $Ext^1(1,1)$, ces deux extensions peuvent être représentées par des matrices B_1, B_2 de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & b_i/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b_i \in K,\ i = 1,2.$$

Si $\mathcal{M}_{1,a}$ et $\mathcal{M}^*_{2,a}$ sont isomorphes alors il existe $P \in Gl_2(K)$ telle que : $PB_1 = {}^tB_2^{-1}P^\sigma$. On écrira P sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1b_1/a + a_2 \\ a_3 & a_3b_1/a + a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^\sigma & a_2^\sigma \\ a_3^\sigma - a_1^\sigma b_2/a & -a_2^\sigma b_2/a + a_4^\sigma \end{pmatrix}.$$

En comparant les coefficients dans l'égalité précédente, on en déduit que :

1. $a_1^\sigma = a_1$ donc a_1 est une constante.
2. $a_1b_1/a = a_2^\sigma - a_2$. Or, $\mathcal{M}_1$ étant une extension non triviale de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}$, on en déduit que a_1 doit être nul et a_2 constant.
3. $-a_1^\sigma b_2/a + a_3^\sigma = a_3$. Comme a_1 est nul, a_3 est constant.
4. $a_3b_1/a + a_4 = -a_2b_2/a + a_4^\sigma$. La matrice P étant inversible de déterminant $-a_2a_3$, ces deux constantes doivent être non nulles.

La dernière équation obtenue est équivalente à l'existence d'une constante λ non nulle et d' un élément f de K tels que $b_1 = \lambda b_2 + f^\sigma a - af$. □

Effet d'un changement de jauge

Comme il se doit, la condition d'isomorphisme dual obtenue au lemme 11.3.1 est indépendante du changement de jauge.

De façon plus générale, considérons la matrice $N \in Gl_n(K)$:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & c \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

vérifiant la condition suivante : il existe une constante $\lambda \neq 0$ et un $f \in K$ tels que $b_1 = \lambda b_2 + f^\sigma a - af$. Soit P une matrice de changement de jauge dans $Gl_n(K))$ du type :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & p & r \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En appliquant la formule de changement de jauge de la théorie des σ-différences, à N et P, on obtient une matrice N' :

$$N' = (P^\sigma)^{-1} N P = \begin{pmatrix} 1 & b_1' & c' \\ 0 & 1 & b_2' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $b_1' = b_1 + ap - p^\sigma a$, $b_2' = b_2 + ad - d^\sigma a$ et $c' = c + ar - r^\sigma a + db_1 - p^\sigma ad - p^\sigma b_2 + (pd)^\sigma a$. On vérifie qu'il existe un élément $g \in K$ tel que $b_1' = \lambda b_2' + g^\sigma a - ag$, où $g = f + \lambda d - p$.

On suppose être désormais dans les conditions du lemme 11.3.1. Ainsi, il existe une constante $\lambda \neq 0$ et $f \in K$ tels que $b_1 = \lambda b_2 + f^\sigma a - af$. Considérons la matrice $Q \in Gl_3(K)$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -f \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ce changement de jauge par Q appliqué à la matrice N donne le résultat suivant :

$$(Q^\sigma)^{-1} N Q = \begin{pmatrix} 1 & b_1/a & \lambda c/a - f b_1/a \\ 0 & 1 & b_1/a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc ramener l'étude d'une extension panachée de $\mathcal{M}_1$ par $\mathcal{M}_2$, avec $\mathcal{M}_{1,a}$ isomorphe à $\mathcal{M}_{2,a}^*$, à celle d'une extension panachée matriciellement représentée par :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \; b, c \in K.$$

Lemme 11.3.2. *Toute extension panachée $\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}_1$ par $\mathcal{M}_2$, avec $\mathcal{M}_{1,a}$ isomorphe à $\mathcal{M}_{2,a}^*$, peut être représentée matriciellement par :*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \; b, c \in K.$$

Le radical unipotent de G_M est abélien, donc du type $\mathbb{G}_a^i$, $i = 0, 1, 2$.

DÉMONSTRATION. — En effet, les éléments de G_M sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in C.$$

□

11.3.2. Autodualité et caractérisation du radical unipotent. — On s'inspire de [**7**] pour les démonstrations suivantes mais on ne peut appliquer directement les résultats de cet article dans notre cas, car ses hypothèses de rigidité ne sont pas vérifiées ici. On doit donc faire appel à de nouveaux arguments.

Définition 11.3.3. *([**7**]) Soit* $\mathbf{T}$ *une catégorie tannakienne neutre sur un corps* K *de caractéristique nulle,* $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{Y}$ *trois objets de* $\mathbf{T}$, $\mathcal{M}_1$ *dans* $Ext^1(\mathcal{A},\mathcal{Y})$ *et* $\mathcal{M}_2$ *dans* $Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{A})$.
Pour tout $\mathcal{M}$ *élément de* $Extpan(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$*, on dit que* $\mathcal{M}$ *est autoduale s'il existe un isomorphisme* ψ *de* $\mathcal{M}$ *dans* $\mathcal{M}^*$ *et un isomorphisme* ϕ *de* $\mathcal{M}_1$ *dans* $\mathcal{M}_2^*$ *tel que le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{M}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \mathcal{X} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{M}_2^* \arrow[r] & \mathcal{M}^* \arrow[r] & \mathcal{Y}^* \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Sous les hypothèses de rigidité de [**7**], qui imposent en particulier $Hom(\mathcal{A},\mathcal{X}) = Hom(\mathcal{Y},\mathcal{A}) = 0$, le caractère autodual de l'extension panachée $\mathcal{M}$ se lit sur la taille du radical unipotent de son groupe de Galois. Nous montrons qu'il en est de même dans le cas où $\mathcal{X},\mathcal{A},\mathcal{Y}$ sont des $\mathcal{D}_\sigma$-modules isomorphes, de rang 1.

Application au cas des extensions panachées aux σ-différences
On considère une extension panachée aux σ-différences $\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}_1$ par $\mathcal{M}_2$, où $\mathcal{M}_{1,a}$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{2,a}^*$. Une représentation matricielle de $\mathcal{M}$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \ a,b,c \in \ K.$$

On pose $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}^{-1}$.
Puisqu'un caractère de G_M est trivial sur le radical unipotent de G_M, les groupes $R_u(G_M)$ et $R_u(G_N)$ coïncident.

On a déja remarqué que ce type d'extension panachée a un groupe de galois dont le radical unipotent est abélien. On suppose de plus que l'extension $\mathcal{M}_1$ n'est pas scindée, ce qui implique que le radical unipotent de l'extension panachée est de dimension 1 ou 2.

Théorème 11.3.4. *La dimension du radical unipotent du groupe de Galois de* $\mathcal{M}$ *est égale à 1 si et seulement si le* $\mathcal{D}_\sigma$*-module* $\mathcal{N}$ *est autodual.*

DÉMONSTRATION. — On travaille dans le cas d'un radical unipotent abélien, donc isomorphe à une certaine puissance de $\mathbb{G}_a$

Si le radical unipotent de l'extension panachée est de dimension 1, le groupe de Galois de $\mathcal{N}$, isomorphe à $\mathbb{G}_a$ se représente dans $Gl_3(\mathbb{C})$ sous la forme :

$$g_a := \begin{pmatrix} 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } a \in \mathbb{G}_a.$$

En effet, la représentation de $\mathbb{G}_a$ dans $Gl_3(\mathbb{C})$ sous la forme précédente, est imposée par la forme de la matrice N et par la non-trivialité de sa restriction à $\mathcal{M}_{1,a}$.

On vérifie aisément que toute forme bilinéaire B représentée par une matrice P du type : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \ C_\sigma{}^2$.

vérifie ${}^t g_a P g_a = P$ pour tout a dans C_σ.

On en déduit que le groupe de Galois de $\mathcal{N}$ stabilise au moins une forme bilinéaire non dégénérée et ainsi que $\mathcal{N}$ est autodual.

Si le radical unipotent de l'extension panachée $\mathcal{M}$ est de dimension 2, le groupe de Galois de $\mathcal{N}$ est isomorphe à $\mathbb{G}_a^2$. Nous allons montrer que dans ce cas, le groupe de Galois de l'équation ne peut stabiliser aucune forme bilinéaire non dégénérée.

On peut représenter $\mathbb{G}_a^2$ dans $Gl_3(\mathbb{C})$ par le sous groupe matriciel

$$g_{(a,b)} := \begin{pmatrix} 1 & a & b + a^2/2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{avec } (a,b) \in \ \mathbb{G}_a^2.$$

On cherche une forme bilinéaire stable sous l'action du groupe de Galois de $\mathcal{N}$. Du point de vue matriciel, ceci revient à trouver une matrice P du type $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 & a_5 \\ a_6 & a_7 & a_8 \end{pmatrix}$ avec a_i pour $i = 0, .., 8$, éléments de $\mathbb{C}$ telle que ${}^t g_{(a,b)} P g_{(a,b)} = P$ pour tout couple (a, b) dans $\mathbb{G}_a^2$.

On obtient par le calcul ${}^t g_{(a,b)} P g_{(a,b)} = P$.

On pose $\gamma := (b + a^2/2)$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & aa_0 + a_1 & \gamma a_0 + aa_1 + a_2 \\ aa_0 + a_3 & a^2 a_0 + aa_3 + aa_1 + a_4 & \gamma aa_0 + \gamma a_3 + a^2 a_1 \\ & & aa_4 + aa_2 + a_5 \\ \gamma a_0 + aa_3 + a_6 & \gamma aa_0 + a^2 a_3 + aa_6 & \gamma^2 a_0 + \gamma aa_3 + \gamma a_6 \\ & +\gamma a_1 + aa_4 + a_7 & +\gamma aa_1 + a^2 a_4 + aa_7 \\ & & +\gamma a_2 + aa_5 + a_8 \end{pmatrix}.$$

Si ${}^t g_{(a,b)} P g_{(a,b)}$ est égal à P pour tout (a,b) dans $\mathbb{G}_a^2$, les coefficients de P doivent vérifier les identités suivantes :

1. $aa_0 + a_3 = a_3$ pour tout a dans $\mathbb{G}_a$. On en déduit que a_0 doit être nul (égalité des coefficients $(2,1)$) .
2. $aa_3 + a_6 = a_6$ pour tout a dans $\mathbb{G}_a$. On en déduit que a_3 doit être nul (égalité des coefficients $(3,1)$).
3. $aa_1 + a_4 = a_4$ pour tout a dans $\mathbb{G}_a$. On en déduit que a_1 doit être nul (égalité des coefficients $(2,2)$).
4. $a(a_6 + a_4) + a_7 = a_7$ pour tout a dans $\mathbb{G}_a$. On en déduit que $a_6 + a_4$ doit être nul (égalité des coefficients $(3,2)$).
5. $a(a_4 + a_2) + a_5 = a_5$ pour tout a dans $\mathbb{G}_a$. On en déduit que $a_2 + a_4$ doit être nul (égalité des coefficients $(2,3)$).
6. $-2ba_4 + aa_7 + aa_5 + a_8 = a_8$ pour tout $(a,b) \in {\mathbb{G}_a}^2$. Par conséquent $a_4 = a_7 + a_5 = 0$.

On conclut, d'après l'étude précédente que la matrice P ne peut être que du type : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 \\ 0 & -a_5 & a_8 \end{pmatrix}$, où $(a_5, a_8) \in {\mathbb{G}_a}^2$.
On en déduit qu'une forme bilinéaire stable sous le groupe de Galois ne peut être que dégénérée et donc que le $\mathcal{D}_\sigma$-module $\mathcal{N}$ ne peut être autodual. □

11.4. CALCUL DU RADICAL UNIPOTENT DU GROUPE DE GALOIS D'UNE EXTENSION PANACHEE AUX σ-DIFFERENCES

Soit a un élément de K^*. On lui associe l'équation aux σ-différences $\sigma(f) = af$ et on note $\mathcal{A}$ le $\mathcal{D}_\sigma$-module associé.
Soient $\mathcal{B}$ un élément non trivial de $Ext^1_{\mathcal{D}_\sigma}(\mathcal{A},\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}$ un élément de $Extpan_{\mathcal{D}_\sigma}(\mathcal{B},\mathcal{B})$.
On peut représenter le $\mathcal{D}_\sigma$-module $\mathcal{M}$ par la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Tordons l'extension panachée $\mathcal{M}$ par $\mathcal{A}^{-1}$, c'est-à-dire, considérons le $\mathcal{D}_\sigma$-module $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}^{-1}$, dont une expression matricielle est donnée par :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a \\ 0 & 1 & b/a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(On va chercher des conditions nécessaires et suffisantes sur b et c pour que $\mathcal{N}$ soit autodual.)

La matrice correspondante à N pour le dual de $\mathcal{N}$ est :

$$N^* =^t N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b/a & 1 & 0 \\ (b/a)^2 - c/a & -b/a & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche à déterminer des conditions sur b et c pour que N soit autodual.

On demande de plus que l'extension $\mathcal{M}_1$ ne soit pas scindée, ce qui signifie qu'il n'existe pas d'élément f de K tel que $b/a = f^\sigma - f$.
On cherche donc une matrice P dans $Gl_3(K)$ telle que $NP = \sigma(P)N^*$. Par commodité de calcul, on pose $\gamma = (b/a)^2 - c/a$.
On pose $P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$.

La condition de $\sigma - q$-isomorphisme entre N et N^* se traduit par l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 + b/a\ a_4 + c/a\ a_7 & a_2 + b/a\ a_5 + c/a\ a_8 & a_3 + b/a\ a_6 + c/a\ a_9 \\ a_4 + b/a\ a_7 & a_5 + b/a\ a_6 & a_6 + b/a\ a_9 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^\sigma + a_2^\sigma(-b/a) + \gamma a_3^\sigma & a_2^\sigma - b/a\ a_3^\sigma & a_3^\sigma \\ a_4^\sigma + a_5^\sigma(-b/a) + \gamma a_6^\sigma & a_5^\sigma - b/a\ a_6^\sigma & a_6^\sigma \\ a_7^\sigma + a_8^\sigma(-b/a) + \gamma a_9^\sigma & a_8^\sigma - b/a\ a_9^\sigma & a_9^\sigma \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

1. $a_9^\sigma = a_9$ donc a_9 est une constante. De plus, on a $a_8 = a_8^\sigma - b/a\ a_9$. Or $\mathcal{B}$ est supposée non scindée, ce qui implique $a_9 = 0$ et a_8 constante.
2. $a_6 + b/a\ a_9 = a_6^\sigma = a_6$ donc a_6 est constante. De plus $a_3 + b/a\ a_6 + c/a a_9 = a_3^\sigma = a_3 + b/a\ a_6$. On déduit de l'argument précédent que $a_6 = 0$ et que a_3 est constante.
3. $a_7^\sigma + a_8^\sigma(-b/a) = a_7 = a_7^\sigma + a_8(-b/a)$. On en déduit comme précédemment que $a_8 = 0$ et a_7 sont constantes.
4. $a_5^\sigma - b/a\ a_6^\sigma = a_5^\sigma = a_5 + b/a\ a_6 = a_5$ donc a_5 est constante. De même,$a_3 + b/a a_6 + c/a a_9 = a_3 = a_3^\sigma$ donc a_3 est constante.
5. $a_2^\sigma - b/a\ a_3^\sigma = a_2 + b/a\ a_5 + c/a\ a_8$. Cette identité revient à $a_2^\sigma - a_2 = b/a(a_5 + a_3)$. Ainsi $a_5 = -a_3$ et a_2 est constante.
6. $a_4 + b/a\ a_7 = a_4^\sigma + a_5^\sigma(-b/a) + \gamma\ a_6^\sigma$, ce qui se traduit par l'égalité suivante $a_4 - a_4^\sigma = (a_7 + a_5)(-b/a)$. Ainsi $a_7 = -a_5$ et a_4 est constante.

On en conclut que P doit être de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & -a_5 \\ a_4 & a_5 & 0 \\ -a_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
La condition d'autodualité se résume donc à l'équation suivante : $a_1^\sigma - a_1 = a_5((b/a)^2 - 2c/a)) + (b/a)(a_4 + a_2)$

En regroupant le théorème 11.3.4 et la discussion précédente, on obtient le résultat suivant

Théorème 11.4.1. *Soit $\mathcal{M}$ une extension panachée aux σ-différences, dont une représentation matricielle est du type :*

$$\begin{pmatrix} a & \lambda b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

où $\lambda \neq 0$ et $b/a \notin (\sigma_q - 1)(K)$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Le $\mathcal{D}_\sigma$-module $\mathcal{N}$, déduit de $\mathcal{M}$ en le tordant par $\mathcal{A}^{-1}$, n'est pas autodual.*
2. *Il existe $f \in K$ tel que $(\lambda(b/a)^2 - 2c/a)$ et (b/a) sont linéairement indépendants sur C_σ modulo l'ensemble $\{\sigma(f) - f,\ f \in K\}$.*

En particulier :

1. *Ces conditions sont vérifiées si le radical unipotent du groupe de Galois de $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathbb{G}_a \times W_{-2}(M)$ et $W_{-2}(M) \simeq \mathbb{G}_a$.*
2. *Sinon, ce radical est isomorphe à $\mathbb{G}_a$ et $W_{-2}(M) = \{0\}$.*

Comme dans le théorème 6.0.1, $W_{-2}(M)$ désigne dans cet énoncé le sous-groupe de $R_u(G_M)$ qui fixe le l'anneau de Picard-Vessiot des extensions simples que $\mathcal{M}$ *panache* , c'est-à-dire ici l'anneau de Picard-Vessiot de $\mathcal{M}_1$.

Remarque 1
Supposons pour simplifier que $a = 1$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\lambda = 2$. On note $\mathcal{M}_2$ le $\mathcal{D}_q$- module dont une matrice représentative est $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice du carré symétrique $S^2\mathcal{M}_2$, extension panachée de $\mathcal{M}_2$ par $\mathcal{M}_1$ est

$$S^2M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2b & b^2 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{M} = S^2\mathcal{M}_2 * \mathcal{U}$, où $\mathcal{U} \in Ext^1(\mathbf{1},\mathbf{1})$ admet pour matrice représentative $\begin{pmatrix} 1 & c - b^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mais $W_{-2}(S^2\mathcal{M}_2) = 0$, de sorte que $R_u(G_M) = R_u(G_{\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{U}})$. En appliquant le théorème 2.2.14, on retrouve ainsi que $R_u(G_M) = \mathbf{G}_a^2$ si et seulement si $b^2 - c$ et b sont C_σ-linéairement indépendants modulo $(\sigma - id)(K)$.
L'analogue aux q-différences du théorème 6.0.1.i) est alors satisfait avec le choix suivant de $\mathcal{Z} \in Ext^1(\mathbf{1},\mathbf{1})$:

1. $\mathcal{Z} = 0$ si $b^2 - c$ et b sont C_σ linéairement indépendants modulo $(\sigma - id)(K)$.

2. $\mathcal{Z}$ est représenté par $\begin{pmatrix} 1 & -c+b^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sinon.

Remarque 2 : Vérifions que la condition d'autodualité du théorème précédent est invariante par changement de jauge.

On reprend les notations du paragraphe 11.3.1.

Alors : $b_1'/a = b_1/a + (p - p^\sigma)$,$(b_1'/a)^2 = (b_1/a)^2 + (p - p^\sigma)^2 + 2(p - p^\sigma)(b_1)/a$ et $(\lambda c' + gb'1)/a = (\lambda c - fb_1) + \lambda(r - r^\sigma) + b_1/a(p - p^\sigma) + \lambda((pd)^\sigma - (pd)) + ((fp)^\sigma - fp) + p(p - p^\sigma)$ On en déduit que : $(b_1'/a)^2 - 2(\lambda c' + gb_1')/a = (b_1/a)^2 - 2(\lambda c + fb_1)/a - 2\lambda(r - r^\sigma + (dp)^\sigma - dp) - 2((fp)^\sigma - (fp)) + ((p^2)^\sigma - p^2)$. Ainsi $(b_1'/a)^2 - 2(\lambda c' + gb_1')/a$ et $(b_1/a)^2 - 2(\lambda c + fb_1)/a$ ont la même classe de congruence modulo l'image de K par $\sigma - id$ et il en est de même de b_1'/a et b_1/a. La condition d'autodualité est donc indépendante des changements de jauge.

11.5. GROUPE DE GALOIS DU SYSTEME 13

Soit (K, σ, ∂) un corps différentiel aux différences, de corps des constantes C_σ algébriquement clos. Soit $a \in K^*$. Considérons l'extension panachée de matrice représentative :

$$M = \begin{pmatrix} a & 2\partial a & \partial^2 a \\ 0 & a & \partial a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{17}$$

On suppose que l'extension $\mathcal{M}_1$ n'est pas scindée, ce qui revient à demander que $\partial a/a$ ne soit pas de la forme $f(qz) - f(z)$, $f \in K$.

Un changement de jauge constant permet de mettre $\mathcal{M}$ sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 2\partial a & 2(\partial^2 a) \\ 0 & a & 2\partial a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Ainsi, en appliquant le résultat précédent avec $b = 2\partial a$ et $c = 2(\partial^2 a)$, on obtient que la nullité du W_{-2} de l'extension panachée $\mathcal{M}$ équivaut à l'existence d'une fonction f dans K et d'une constante μ dans C_σ telles que $\sigma(f) - f = 4((\partial a/a)^2 - \partial^2 a/a) + \mu(\partial a/a) =$

$-4\partial(\partial a/a) + \mu\partial a/a.$

Cette dernière condition équivaut au fait que il existe une constante $\mu \in C_\sigma$ **et un élément** $f \in K$ **tels que**

$$\partial(\partial a/a) + (\mu)\partial a/a = \sigma(f) - f.$$

Du théorème 11.4.1, on déduit donc :

Théorème 11.5.1. *Avec les notations précédentes,* $W_{-2}(G_M) = 0$ *si et seulement si* $\partial(\partial a/a)$ *et* $\partial a/a$ *sont linéairement dépendants sur* C_σ *mod* $(\sigma - 1)(K)$.

Nous allons montrer dans les paragraphes suivants ce que signifie cette condition quand $K = \mathbb{C}(z)$

11.5.1. Autodualité sur $\mathbb{C}(z)$**.** — Pour f dans $\mathbb{C}(z)$, posons $d/dzf = f'$, de sorte que $\partial f = zf'$.

Lemme 11.5.2. *Il existe une fonction* f *dans* $\mathbb{C}(z)$ *et une constante* λ *dans* $\mathbb{C}$ *telles que* $z^2(a'/a)' + \lambda(za'/a) = f(qz) - f(z)$ *si et seulement s' il existe un élément* g *de* $\mathbb{C}(z)^*$, *une constante* μ *dans* $\mathbb{C}^*$ *et un entier relatif* r *tels que :* $a(z) = \mu z^r \frac{g(qz)}{g(z)}$.

Démonstration. — *S'il existe une fonction* f *dans* $\mathbb{C}(z)$*et une constante* λ *dans* $\mathbb{C}$ *telles que* $z^2(a'/a)' + \lambda(za'/a) = f(qz) - f(z)$ *:* D'après la définition 11.0.5, on peut écrire a sous la forme $a = \overline{a}\frac{\sigma(f)}{f}$, où $f \in K^*$ et $\overline{a}$ sous forme standard et vu l'hypothèse, il existe une fonction k dans $\mathbb{C}(z)$ et une constante λ dans $\mathbb{C}$ telles que $z^2(\overline{a}'/\overline{a})' + \lambda(z(\overline{a}'/\overline{a}) = k(qz) - k(z)$.

On écrit $\overline{a}$ sous la forme $\overline{a}(z) = \mu \prod_i (z - a_i)^{\alpha_i}$ où pour tout i, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ et $a_i \neq q^{\mathbb{Z}} a_j$ si $i \neq j$.

$$\frac{\overline{a}'}{\overline{a}} = \sum_i \frac{\alpha_i}{z - a_i} \text{ et ainsi } (\frac{\overline{a}'}{\overline{a}})' = \sum_i \frac{-\alpha_i}{(z - a_i)^2}$$

On obtient alors $z^2(\frac{\overline{a}'}{\overline{a}})' = -\sum_i \alpha_i - 2\sum_i \frac{\alpha_i a_i}{z-a_i} - \sum_i \frac{-\alpha_i a_i^2}{(z-a_i)^2}$ et $(z\overline{a}'/\overline{a}) = \sum_i \alpha_i - \sum_i \frac{a_i\alpha_i}{z-a_i}$.

Ecrivons la décomposition en éléments simples de k :

$$k(z) = \sum_n b_n z^n + \sum_i \sum_j \frac{d_i^j}{(z-c_i)^j}.$$

Il résulte de ces deux écritures de k et de $\overline{a}$, ainsi que de l'égalité $z^2(\overline{a}'/\overline{a})' + \lambda z \overline{a}'/\overline{a} = k(qz) - k(z)$, la formule suivante :

$$(\lambda-1)\sum_i \alpha_i + (\lambda-2)\sum_i \frac{\alpha_i a_i}{z-a_i} - \sum_i \frac{-\alpha_i a_i^2}{(z-a_i)^2} = \sum_i \sum_j \left(\frac{d_i^j/q^j}{(z-c_i/q)^j} - \frac{d_i^j}{(z-c_i)^j}\right) + \sum (q^n b_n - b_n) z^n.$$

En s'inspirant des démonstrations du paragraphe 11.2.1, on en déduit que k ne peut avoir de pôle d'ordre ≥ 3 et que $b_n = 0$ pour $n \geq 1$.
Par identification polaire, on obtient les égalités suivantes :

1. $(\lambda-1)\sum_i \alpha_i = 0$.
2. $(\lambda-2)\sum_i \frac{\alpha_i a_i}{z-a_i} = \sum_i \left(\frac{c_i/q * d_i^1/c_i}{(z-c_i/q)} - \frac{c_i * d_i^1/c_i}{(z-c_i)}\right)$.
3. $-\sum_i \frac{-\alpha_i a_i^2}{(z-a_i)^2} = \sum_i \left(\frac{(d_i^2/c_i^2)*(c_i/q)^2}{(z-c_i/q)^2} - \frac{(d_i^2/c_i^2)*c_i^2}{(z-c_i)^2}\right)$.

Soit a_i un pôle ou un zéro non nul de $\overline{a}$. On suppose qu'il existe i_0 tel que $a_i = c_{i_0}$ ($a_i = c_{i_0}/q$ donnerait lieu au même type de raisonnement). Considérons alors l'entier n_0 maximal tel que c_{i_0}/q^{n_0} soit égal à un élément c_{i_1}. Comme $\overline{a}$ est sous forme standard, c_{i_1}/q ne peut aparraître comme diviseur de $\overline{a}$, il existe donc i_2 tel que $c_{i_2} = c_{i_0}/q^{n_0+1}$ (d'après l'égalité 3) . Or ceci est absurde par maximalité de n_0 et non nullité de c_{i_0}.
On en déduit que $\overline{a}$ ne peut avoir de pôle ou de zéro non nul Si $\lambda \neq 1$, la première condition revient à ce que $\overline{a}$ soit de la forme μ, $\mu \in \mathbb{C}$.
Si $\lambda = 1$, alors $\overline{a}$ peut avoir un pôle ou un zéro nul et est donc de la forme μz^r. Ainsi $a = \mu z^r \frac{\sigma(f)}{f}$ avec $f \in K^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$.

Réciproquement, si a est de la forme $\mu z^r g(qz)/g(z)$, alors :

1. $za'/a = (r + k(qz) - k(z))$ avec $k(z) := zg'(z)/g(z)$.
2. $(a'/a)' = -(r + k(qz) - k(z))/z^2 + (qk'(qz) - k'(z))/z$.
3. ainsi $z^2(a'/a)' + za'/a = h(qz) - h(z)$ avec $h(z) = zk'(z)$.

Ceci termine la démonstration.

□

Le théorème 11.5.1 entraîne alors pour le système aux différences 17 décrit par la matrice M du début du paragraphe 11.5 .

Corollaire 11.5.3. *Soit* $a \in \mathbb{C}(z)^*$. *La dimension sur* $\mathbb{C}$ *du groupe de Galois (pris au sens de* [**38**]*) du système aux* q*-différences 17, associée à* $\mathcal{A} = (a)$ *est égale à* 3 *si et seulement si* a *n'est pas de la forme* $\mu z^r \frac{g(qz)}{g(z)}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{Z}$ *et* $g \in \mathbb{C}(z)$.

11.6. TRANSCENDANCE ET HYPERTRANSCENDANCE DES SOLUTIONS D'EQUATIONS AUX q-DIFFERENCES

11.6.1. Hypothèse (H) et transcendance. — On reprend les notations du début chapitre 11. En particulier C_E désigne le corps des fonctions q-elliptiques. Un module aux q-différences $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{C}(z)$ de type 13 (dans un cadre plus général voir [**29**]) admet dans $\mathcal{M}er(C^*)$ une matrice fondamentale de solutions

$$\Phi = (\phi_{ij}) = \begin{pmatrix} \phi & 2\partial\phi & \partial^2\phi \\ 0 & \phi & \partial\phi \\ 0 & 0 & \phi \end{pmatrix}$$

dont les composantes engendrent sur $K_E := C_E(z)$ une extension aux q-differences

$$F_E = K_E(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi).$$

L'ensemble des σ-automorphismes de F_E/K_E est un groupe algébrique linéaire sur C_E, noté $G^E_{\mathcal{M}}$. Nous supposerons que par rapport au groupe de Galois $G_{\mathcal{M}}$ calculé plus haut, il vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H) : les composantes neutres des groupes $G^E_{\mathcal{M}}$ et $G_{\mathcal{M}} \otimes C_E$ sont isomorphes sur $\overline{C_E}$.
voir note en bas de page 6.

Puisque Φ est inversible dans l'anneau $K_E[\Phi, 1/det(\Phi)]$, l'application naturelle

$$\phi \mapsto \{g \to g\phi\}$$

de cette algèbre dans l'anneau des fonctions règulieres sur G^E_M, a valeurs dans F_E, s'étend en un morphisme surjectif

$$F_E \otimes_{K_E} K_E[\Phi, 1/det(\Phi)] \to F_E \otimes_{C_E} C_E[G^E_{\mathcal{M}}].$$

En particulier, $\mathrm{degtr}(F_E/K_E) \geq dim(G^E_{\mathcal{M}})$ (et il y a probablement égalité).

En se plaçant sous l'hypothèse (H), on déduit donc des corollaires 11.2.4, 11.5.3 l'énoncé suivant .

Théorème 11.6.1. *Soient $\phi \in \mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ et $a \in \mathbb{C}(z)$ tels que $\sigma_q(\phi) = a\phi$. Alors :*

1. *ϕ est algébrique sur K_E si et seulement si a est du type $a(z) = \mu\frac{\sigma_q(g)}{g}$, $g \in K$ et μ d'ordre fini dans $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$.*
2. *ϕ et $\partial\phi$ sont algébriquement indépendants sur $C_E(z)$ si et seulement si a n'est pas de la forme $\mu\frac{\sigma_q(g)}{g}$, où $\mu \in \mathbb{C}$ et $g \in \mathbb{C}(z)$*
3. *ϕ, $\partial\phi$ et $\partial^2\phi$ sont algébriquement indépendants sur $C_E(z)$ si et seulement si a n'est pas de la forme $\mu z^r\frac{\sigma_q(g)}{g}$,où $\mu \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{Z}$ et $g \in \mathbb{C}(z)$.*

11.6.2. Hypertranscendance. — Soient n un entier > 2, $\mathcal{M}_n$ le système aux q-differences construit sur le mode de (2) et (3), en derivant n fois ϕ, et $F_E := K_E(\phi, \partial\phi, ..\partial^n\phi) \subset \mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$.
Alors, $Aut_{\sigma_q}(F_E/K_E)$ est le groupe algébrique linéaire $G^E_{\mathcal{M}_n}$ de $\mathcal{M}_n$ sur C_E. Un calcul simple permet de montrer que :

$$\forall k \geq 0,\ \sigma_q(\partial^k(\partial(\phi)/\phi)) - \partial^k(\partial(\phi)/\phi) = \partial^k(\partial(a)/a).$$

Comme $F_E = K_E(\phi, \phi\partial(\phi)/\phi, .., \phi\partial^{n-1}(\partial(\phi)/\phi))$, on en déduit que F_E est aussi le corps engendré sur K_E par les solutions du module au différences $\tilde{\mathcal{M}_n}$, dont une représentation matricielle est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & .. & .. & a\partial^{n-1}(\partial(a)/a) \\ 0 & a & 0 & .. & a\partial^{n-2}(\partial(a)/a) \\ 0 & .. & .. & a & \partial a \\ 0 & .. & .. & 0 & a \end{pmatrix}.$$

$\tilde{\mathcal{M}_n}$ est la somme directe des extensions $\mathcal{E}_i$ pour $i = 0, .., n-1$ de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}$, définies par $\mathcal{E}_i := \sigma_q(z) - az = a\partial^i(\partial a/a)y$, où $\sigma_q(y) = ay$. Elles sont définies sur K.

D'après le théorème 2.2.14, le radical unipotent du groupe de Galois de $\tilde{\mathcal{M}_n}$ (au sens de [**38**]) est isomorphe à $\mathbb{C}^n$ si les extensions $\mathcal{E}_i$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes dans

$Ext^1_{K[\sigma_q]}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.

Sous l'hypothèse (H) et le fait que $degtr(F_E/K_E) \geq dim_{C_E} G^E_{\mathcal{M}_n}$, on se propose d'en déduire :

Théorème 11.6.2. *Soit a dans $K = \mathbb{C}(z)$ et f une solution dans $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ de l'équation aux q-différences $\sigma_q(f) = af$. Si a n'est pas de la forme $\mu z^r \frac{f(qz)}{f(z)}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{Z}$ et $f \in K$, alors f est hypertranscendante sur C_E, c'est-à-dire f ne satisfait aucune équation algébrodifférentielle sur C_E.*

Remarque1 La nouvelle écriture de F_E aurait permis, pour $n = 2$, une preuve plus rapide pour le calcul du calcul du groupe de Galois de l'extension panachée $\mathcal{M}$ que celle du paragraphe 11.5.1.
Néanmoins, nous avons préféré conserver la preuve du paragraphe 11.3, qui fournit une piste pour cerner les extensions $\mathcal{Z}$ attachées aux extensions panachées $\mathcal{M}$ avec $R_u(G_M)$ abélien (voir aussi la remarque 1 suivant le théorème 11.4.1) .
Remarque2
On peut en fait déduire le théorème 11.6.2 du théorème d'Ishizaki **[23]**. celui-ci entraîne en effet que pour $a(z)$ de la forme $a_2(z) = \prod(1 - a_i z)^{\alpha_i}$ i.e $div(a_2) \subset \mathbb{C}^*$, les solutions y_2 de $\sigma_q(y) = a_2 y$ sont hypertranscendantes. Par ailleurs, si a est de la forme $a_1(z) = \mu z^r$, les solutions y_1 de $\sigma_q(y) = a_1 y$ vérifient $\partial(\frac{\partial y_1}{y_1}) = 0$. Donc, pour $a = a_1 a_2$, $a_2 \neq 1$ les solutions de $\sigma_q(y) = ay$ sont encore hypertranscendantes.

Démonstration. — D'après les remarques précédentes et le lemme 10.2.3, la dimension de $G_{\tilde{\mathcal{M}}_n}$ est égale à n si $\partial a/a, ..\partial^{n-1}(\partial a/a)$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes modulo $(\sigma_q - 1)\mathbb{C}(z)$.

D'après la définition 11.0.5, on peut écrire a sous la forme $a = \overline{a}\frac{\sigma(f)}{f}$, $f \in K^*$ et $\overline{a}$ sous forme standard.

Lemme 11.6.3. *Soit $a \in \mathbb{C}(z)^*$ telle que a ait une forme standard possédant un pôle ou un zéro non nul. Alors la famille $\{\partial a/a, .., \partial^k(\partial a/a), ..\}$ est indépendante sur $\mathbb{C}$ modulo $(\sigma_q - 1)(\mathbb{C}(z))$.*

Preuve

Par changement de jauge, on se ramène au cas où $a(z) = \overline{a}(z)$.
On reprend les notations de la preuve 11.6.2 et on suppose qu'il existe $\lambda_0, ..., \lambda_N$ dans $\mathbb{C}$, $\lambda_N \neq 0$ et $f \in \mathbb{C}(z)$, tels que :

$$\sum_{k=0}^{N} \lambda_k \partial^k(\partial a/a) = \sigma_q(f) - f = \sum_n (q^n b_n(qz) - b_n) z^n + \sum_i \sum_j \left(\frac{q^{-j}.d_i^j}{(z - c_i/q)^j} - \frac{d_i^j}{(z - c_i)^j}\right)$$

et

$$f(z) = \sum_n b_n z^n + \sum_i \sum_j \frac{d_i^j}{(z - c_i)^j}.$$

Une récurrence aisée montre que :

$\forall\, j > 0,\ \partial^j(\partial a/a) = \sum_i \frac{\alpha_i a_i^j (-1)^j j!}{(z - a_i)^j} +$ des termes polaires d'ordre strictement inférieur à j,

où $\sum \alpha_i(a_i) = diviseur(a)$. Soit alors i_0 tel que $a_{i_0} \neq 0$.
Compte tenu des écritures précédentes et de l'unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(z)$, on en déduit que a_{i_0} doit être un pôle d'ordre N de $\sigma_q f - f$, c'est-à-dire que soit a_{i_0} soit qa_{i_0} est un pôle d'ordre au au moins N de f.
On considère ensuite l'entier relatif n_0 maximal tel que $q^{-n_0} a_{i_0}$ soit un pôle d'ordre au moins N de f. Comme $q^{-(n_0+1)} a_{i_0}$ est un pôle de $\sigma_q(f)$ et que $q^{-(n_0+1)} a_{i_0}$ n'est pas pôle d'ordre N de $\sigma_q(f) - f$ ($a = \overline{a}$ est standard), on en déduit que $q^{-(n_0+1)} a_{i_0}$ doit apparaitre comme pôle d'ordre au moins N de f. Or ceci est absurde par maximalité de n_0 et non nullité de a_{i_0}.
La dimension de $G_{\tilde{\mathcal{M}}_n}$ tend vers l'infini avec n, le degré de transcendance de $K(\phi, \partial\phi, .., \partial^n \phi..)$ sur K sous l'hypothèse (H) est donc infini. Le théorème 11.6.2 est donc démontré.

□

11.6.3. Compléments : équations aux q-différences sur $C_E(z)$. — A l'appui de l'hypothèse (H), on montre comment le théorème 11.2.3 et le lemme 11.5.2 qui ont servi à calculer $G_{\mathcal{M}}$ sur $\mathbb{C}(z)$ sont encore valables sur $C_E(z)$.
Nous conservons l'hypothése $a \in \mathbb{C}(z)^*$

Notations

$K_E = C_E(z)$ est le corps des fractions rationnelles à coefficients dans C_E.
On désigne par $\overline{C_E}$ une clôture algébrique de C_E, $F = \overline{C_E}(z)$ le corps des fractions

différentielles à coefficients dans $\overline{C_E}$, et $\partial := zd/dz$ la dérivation dans K.

Soit $\tilde{\sigma_q}$ un prolongement de σ_q à $\overline{K_E}$. Il induit un automorphisme de $\overline{C_E}$, que l'on note τ. On note de nouveau σ_q l'automorphisme aux différences de F défini par :

$$\forall b \in \overline{C_E},\ \sigma_q(bz) = \tau(b)qz.$$

De plus, ∂ étant une dérivation de C_E, on peut l'étendre de façon unique en une dérivation de $\overline{C_E}$, à nouveau notée ∂ de corps des constantes $\mathbb{C}$. Le caractére galoisien de $\tilde{\sigma_q}$ assure l'égalité suivante : $\partial\tau = \tau\partial$.

Définition 11.6.4. *On dit que deux éléments f et g de $\overline{C_E}(z)$ sont équivalents s' il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = \frac{{\sigma_q}^n(g)}{q^n}$. Dans ce cas, on note $f = q^n.g$*

Remarque on a bien défini une relation d'équivalence.

Le corps des fractions rationnelles sur C_E est quasi logarithmique

Lemme 11.6.5. *$(K_E, \partial, \sigma_q)$ est un corps aux différences différentiels et $C_\partial(K_E) = \mathbb{C}$, $C_\sigma(K_E) = C_E$*

Démonstration. — K_E est inclus dans $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$, par conséquent $C_\partial(K_E) = \mathbb{C}$, $C_\sigma(K_E) = C_E$.

□

Lemme 11.6.6. *Soit f dans $\overline{C_E}$. S'il existe un entier $k \neq 0$ tel que $\tau(f) = f/q^k$, alors f est nulle.*

Démonstration. — Si f est dans $\overline{C_E}$, il existe un polynôme minimal $P(X) = \sum_{n=0}^N a_n X^n$ à coefficients dans C_E annulant f.
Ainsi $\sum_{n=0}^N a_n f^n = 0$ et $\sum_{n=0}^N a_n \tau(f)^n = 0 = \sum_{n=0}^N a_n/q^{nk} f^n = 0$.
On en déduit que $\sum_{n=0}^N a_n(1 - \frac{1}{q^n k})f^n = 0$, donc :

$$f(\sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1}(1 - \frac{1}{q^{(n+1)k}}))f^n = 0 = fQ(f)$$

Il résulte de l'égalité précédente que :

1. Soit $f = 0$
2. Soit $Q(f) = 0$, ce qui par minimalité de P impose la nullité du polynôme Q, ce qui revient à la nullité des coefficients a_n pour $n \geq 1$ car q est de module différent de 1. donc $a_0 f = 0$, P étant non nul $f = 0$.

□

Théorème 11.6.7. *Le corps K_E est quasi-logarithmique.*

DÉMONSTRATION. — Soit a dans $\mathbb{C}(z)$, tel qu'il existe f dans K_E telle que $\partial a/a = \sigma_q(f) - f$.
D'après la définition 11.0.5, on peut écrire a sous la forme $a = \overline{a}\frac{\sigma(g)}{g}$ avec $g \in \mathbb{C}(z)^*$ avec $\overline{a}$ sous forme standard.
Dans ce cas, il existe k dans K_E telle que $\partial\overline{a}/\overline{a} = \sigma_q(k) - k$.

On écrit $\overline{a}$ sous la forme

$$\overline{a} = d\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)^{\alpha_i}$$

où d, a_i dans $\mathbb{C}$ et $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.
On obtient :

$$\partial\overline{a}/\overline{a} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i ai}{(z-a_i)}.$$

On écrit la décomposition de k en éléments simples dans F : $k(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n + \sum_i \sum_j^{\nu_i} \frac{d_i^j}{(z-c_i)^j}$ avec b_n, d_i^j, c_i des éléments de $\overline{C_E}$.
On a $\sigma_q k - k = \sum_{n=0}^{N}(q^n\tau(b_n) - b_n)z^n + \sum_i \sum_j^{\nu_i} \frac{q^{-j}\tau(d_i^j)}{(z-q.c_i)^j} - \frac{d_i^j}{(z-c_i)^j}$ On en déduit par identification que :

1. $\tau(b_n) = b_n/q^n$ pour tout $n \geq 1$, ce qui entraîne d'après le lemme 11.6.6 , $b_n = 0$ pour $n > 0$.
2. $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = (\tau(b_0) - b_0)(*)$ Or b_0 étant algébrique sur C_E, il existe un entier $N > 0$ tel que $\tau^N(b_0) = b_0$. Ainsi $N\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = (\tau^N(b_0) - b_0) = 0$ et on en déduit que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$.
3. k ne peut avoir de pôle non nul d'ordre supérieur à 1. En effet, supposons qu'il existe c_i d'ordre $l > 1$. On a $\sum_i$ tels que $_{\nu_i=l}\ \frac{q^{-l}\tau(d_i^l)}{(z-q.c_i)^l} - \frac{d_i^l}{(z-c_i)^l} = 0$. Soit n le plus grand entier positif ou nul tel que $q^n.c_i$ soit un pôle d'ordre l de k.
   Alors $q^{n+1}.c_i$ apparaît dans la décomposition en éléments simples avec un ordre k, ce qui implique que $q^{n+1}.c_i$ est un pôle d'ordre l de k. Il existe donc un entier $r \leq n$ tel que $q^{n+1}.c_i = q^r.c_i$. On en déduit d'après le lemme 11.6.6 que $c_i = 0$, ce qui est absurde.

Toujours par identification des décompositions en éléments simples, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i ai}{z-a_i} = \sum_i \frac{\frac{\tau(d_i^1)(q.c_i)}{\tau(c_i)}}{(z-q.c_i)} - \frac{\frac{d_i^1(c_i)}{c_i}}{(z-c_i)} \tag{18}$$

Si a_i est un pôle ou un zéro non nul de $\overline{a}$, alors a_i/q ne peut être un élément du diviseur de $\overline{a}$. On suppose qu'il existe i_0 tel que $a_i = c_{i_0}$, c_{i_0} est donc dans $\mathbb{C}$ ($a_i = c_{i_0}/q$ donnerait lieu au même type de raisonnement). Considérons alors l'entier n_0 maximal tel que c_{i_0}/q^{n_0} soit égal à un élément c_{i_1}. Comme $\overline{a}$ est sous forme standard, c_{i_1}/q ne peut apparraître

comme diviseur de $\overline{a}$, il existe donc i_2 tel que $c_{i_2} = c_{i_0}/q^{n_0+1}$ (d'après la formule (18)) . Or ceci est absurde par maximalité de n_0 et non nullité de c_{i_0}.
On en déduit que $\overline{a}$ ne peut avoir de pôle ou de zéro non nul. Le fait que $\sum \alpha_i = 0$ assure que $\overline{a}$ est un élément de $\mathbb{C}$. On en déduit que a doit être de la forme $a(z) = \lambda\frac{g(z)}{g(qz)}$ où g est une fraction rationnelle.

□

Autodualité sur $C_E(z)$
On reprend les notations du paragraphe précédent.

Lemme 11.6.8. *Il existe une fonction q-elliptique λ et un élément f dans K_E tels que $\partial(\partial a/a) + \lambda(\partial a/a) = f(qz) - f(z)$ si et seulement si il existe un complexe μ, un entier relatif r et un élément g dans $\mathbb{C}(z)$ tels que $a(z) = \mu z^r \frac{g(qz)}{g(z)}$.*

Démonstration. — On reprend les notations du lemme 11.6.3.

D'après la définition 11.0.5, on peut écrire a sous la forme $a = \overline{a}\frac{\sigma(f)}{f}$ où $f \in K^*$ avec $\overline{a}$ est sous forme standard.
Vu l'hypothèse, il existe une fonction k dans $\mathbb{C}(z)$ et une constante γ dans $\mathbb{C}$ telles que $z^2(\overline{a}'/\overline{a})' + \gamma(z(\overline{a}'/\overline{a}) = k(qz) - k(z)$.

Cette équivalence se déduit de la formule : $\partial a/a = \partial\overline{a}/\overline{a} + \sigma_q(\partial g/g) - \partial g/g$. On va désormais travailler avec $\overline{a}$.

On a donc :

1. $\partial(\partial\overline{a}/\overline{a}) + \lambda\partial\overline{a}/\overline{a} = \lambda\sum\alpha_i + \sum\frac{\alpha_i\lambda a_i}{(z-a_i)} - \sum\frac{\alpha_i(a_i)^2}{(z-a_i)^2}$.
2. $k(qz) - k(z) = \sum_{n=0}^{N}(q^n\tau(b_n) - b_n)z^n + \sum_i\sum_j \frac{q^{-j}\tau(d_i^j)}{(z-q.c_i)^j} - \frac{d_i^j}{(z-c_i)^j}$.

Les mêmes arguments que ceux de la preuve 11.6.3 donnent les résultats suivants :

1. $\lambda\sum\alpha_i = \tau(b_0) - b_0$ ce qui implique $\lambda\sum\alpha_i = 0$.
2. $b_n = 0$ pour $n > 0$.
3. k ne peut avoir de pôle d'ordre > 2.

Toujours par identification de la décomposition en éléments simples, on a :

$$\sum\frac{\alpha_i(a_i)^2}{(z-a_i)^2} = \sum_i \frac{q^{-2}\tau(d_i^2)}{(z-q^2.c_i)^2} - \frac{d_i^2}{(z-c_i)^2} = \sum_i \frac{\frac{\tau(d_i^2)}{(\tau(c_i))^2}(q.c_i)^2}{(z-q.c_i)^2} - \frac{\frac{d_i^2}{(c_i)^2}}{(z-c_i)^2} \tag{19}$$

. Si a_i est un pôle ou un zéro non nul de $\overline{a}$, alors a_i/q ne peut être un élément du diviseur de $\overline{a}$. On suppose qu'il existe i_0 tel que $a_i = c_{i_0}$ ($a_i = c_{i_0}/q$ donnerait lieu au même type de raisonnement). Considérons alors l'entier n_0 maximal tel que c_{i_0}/q^{n_0} soit égal à un élément c_{i_1}. Comme $\overline{a}$ est sous forme standard, c_{i_1}/q ne peut apparraître comme diviseur

de $\overline{a}$, il existe donc i_2 tel que $c_{i_2} = c_{i_0}/q^{n_0+1}$ (d'après la formule (19)) . Or ceci est absurde par maximalité de n_0 et non nullité de c_{i_0}.
On en déduit que $\overline{a}$ ne peut avoir de pôle ou de zéro non nul. Si $\lambda \neq 1$, la première condition revient compte tenu de la discussion précédente à dire que $\overline{a}$ ne possède ni zéro, ni pôle nul et est donc de la forme μ, $\mu \in \mathbb{C}$.
Si $\lambda = 1$, alors $\overline{a}$ peut avoir un pôle ou un zéro nul et est donc de la forme μz^r. Ainsi $a = \mu z^r \frac{\sigma_q(g)}{g}$, $g \in \mathbb{C}(z)^*$.
Ceci termine la démonstration du lemme. □

11.7. CORPS AUX τ-DIFFERENCES

11.7.1. Le corps des fractions rationnnelles aux τ-différences est logarithmique. — Soit τ un nombre complexe non nul. On note σ_τ l'application de $\mathbb{C}(z)$ dans $\mathbb{C}(z)$ qui à z associe $z + \tau$. Le corps $k = \mathbb{C}(z)$ muni de l'opérateur aux différences σ_τ et de la dérivation $\frac{d}{dz}$ est un corps différentiel aux différences de corps des constantes $\mathbb{C}$ de carcatéristique nulle et algébriquement clos. On peut donc lui appliquer les résultats du chapitre 9.

Théorème 11.7.1. *Le corps* $(\mathbb{C}(z), \sigma_\tau, \frac{d}{dz})$ *est logarithmique.*

Démonstration. — Supposons que $a(z)$ vérifie une équation du type
$$a'(z) = a(z)(f(z+\tau) - f(z)) \tag{20}$$
où $f(z) \ \in \mathbb{C}(z)$.
Ecrivons $a(z) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (z - a_i)^{\alpha_i}$ où les a_i sont distincts deux à deux, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. La décomposition en éléments simples de f fournit l'écriture suivante $f(z) = P(z) + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{\gamma_t} \frac{\nu_i^j}{(z - c_i)^j}$, $P(z) \in \mathbb{C}[z]$. En écrivant l'équation (20) sous la forme $\frac{a'(z)}{a(z)} = f(z + \tau) - f(z)$ on obtient :
$$\sum_i \frac{\alpha_i}{(z - a_i)} = P(z+\tau) - P(z) + \sum_i \sum_j \frac{\nu_i^j}{(z - c_i)^j} - \frac{\nu_i^j}{(z - (c_i - \tau))^j} \tag{21}$$
Il en résulte que $P(z)$ est une constante car l'application affine de $\mathbb{C}$ dans lui -même qui à z associe $z + \tau$ n'admet aucun point fixe. On va montrer que f ne peut avoir de pôle d'ordre ≥ 2.

En effet, supposons que f ait un pôle c_{i_k} d'ordre $k > 1$.

Soit c_{i_k} un pôle d'ordre > 1. Il doit exister un entier i_{k+1} tel que $c_{i_k} = c_{i_{k+1}} - \tau$ et $\nu_{i_k}^j = \nu_{i_{k+1}}^j$.

Ceci signifie que si c est un pôle d'ordre ≥ 2 pour f alors $c+\tau$ doit être un pôle d'ordre au ≥ 2 pour f. Comme f ne peut avoir un nombre infini de pôles, on en déduit que f n'a que des pôles simples.

On notera désormais $\nu_i = \nu_i^1$ pour tout i et on pose $\delta_i = \nu_i/c_i$. L'équation (21) se résume alors à :

$$\sum \frac{\alpha_i}{(z-a_i)} = \sum \frac{c_i\delta_i}{(z-(c_i-\tau))} - \frac{c_i\delta_i}{(z-c_i)}.$$

On en déduit que si c_i est un pôle d'ordre δ_i de a alors $c_i-\tau$ est un zéro d'ordre δ_i de a et que si c_i est un zéro d'ordre δ_i de a alors $c_i-\tau$ est un pôle d'ordre δ_i. On en déduit que a doit être de la forme $a(z)=\lambda\frac{g(z+\tau)}{g(z)}$, où g est une fraction rationnelle.
Réciproquement si a est de la forme précédente, on obtient par dérivation $a'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}a(z) - \frac{g'(z+\tau)}{g(z+\tau)}a(z)$. En posant $f(z) := \frac{g'(z)}{g(z)}$, on obtient $a'(z) = f(z+\tau)a(z) - f(z)a(z)$. □

11.7.2. Extensions panachées dérivées d'équations aux τ-différences. — Soit τ un nombre complexe non nul. On note σ_τ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $z+\tau$ Soit a dans $K=\mathbb{C}(z)^*$ on considére l'extension panachée suivante, où $'=d/dz$:

$$M = \begin{pmatrix} a & 2a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

On suppose que l'extension de matrice M_1 $\begin{pmatrix} a & a' \\ 0 & a \end{pmatrix}$ n'est pas scindée.

Un changement de jauge constant permet de mettre A sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 2a' & 2a" \\ 0 & a & 2a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Ainsi, en appliquant le résultat précédent avec $b=2a'$ et $c=2a''$, on obtient que la nullité du W_{-2} de l'extension panachée tordue par $\mathcal{A}^{-1}$ équivaut à l'existence d'une fonction $f\in K$ et d'une constante $\lambda\in\mathbb{C}$ tels que $f(z+\tau)-f(z) = 4(a'/a)^2 - 4a''/a + \lambda(a'/a) = 4(a'/a)' + \lambda(a'/a)$.

Lemme 11.7.2. *S'il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ et $f\in K$ tels que $(a'/a)'+\lambda(a'/a) = f(z+\tau)-f(z)$ alors il existe un élément g dans K et une constante $\mu\in\mathbb{C}$ tels que $a(z)=\mu\frac{g(z+\tau)}{g(z)}$.*

Démonstration. — On écrit a sous la forme : $a(z)=\mu\prod_i(z-a_i)^{\alpha_i}$ avec pour tout i, α_i dans $\mathbb{Z}$ et $a_i\neq a_j$ si $i\neq j$.

$$\frac{a'}{a} = \sum_i \frac{\alpha_i}{z-a_i} \text{ et ainsi } (\frac{a'}{a})' = \sum_i \frac{-\alpha_i}{(z-a_i)^2}$$

On obtient alors :$(\frac{a'}{a})' = -\sum_i \frac{\alpha_i}{(z-a_i)^2}$.
Ecrivons la décomposition en éléments simples de f :

$$f(z) = P(z) + \sum_i \sum_j \frac{d_i^j}{(z-c_i)^j}.$$

Il résulte de ces deux écritures de f et de a, ainsi que de l'égalité $(a'/a)' = f(z+\tau) - f(z)$, la formule suivante :

$$-\sum_i \frac{\alpha_i}{(z-a_i)^2} + \lambda \sum_i \frac{\alpha_i}{(z-a_i)} = \sum_i \sum_j \left(\frac{d_i^j}{(z-(c_i-\tau))^j} - \frac{d_i^j}{(z-c_i)^j}\right).$$

Parallèlement à la démonstration du théorème 11.7.1, on en déduit que $P(z)$ est constant et que f ne peut avoir de pôle d'ordre ≥ 2.
Par identification polaire, on obtient les égalités suivantes :

$$-\sum_i \frac{\alpha_i}{(z-a_i)^2} = \sum_i \frac{d_i^2}{(z-(c_i-\tau))^2} - \frac{d_i^2}{(z-c_i)^2}$$

et

$$\lambda \sum_i \frac{\alpha_i}{(z-a_i)} = \sum_i \frac{d_i^1}{(z-(c_i-\tau))} - \frac{d_i^1}{(z-c_i)}.$$

Une démonstration analogue à celle du lemme 11.5.2 montre alors qu'il existe une fonction g dans K telle que $a(z) = \mu \frac{g(z+\tau)}{g(z)}$. □

De l'analogue du théorème 11.5.1 et du lemme 11.7.2, on déduit :

Théorème 11.7.3. *Soit a dans K^*, on a :*

1. *Si a est de la forme $\lambda \frac{g(z+\tau)}{g(z)}$, $g \in K$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors la dimension du radical unipotent du groupe de Galois (pris au sens de* [**38**]*) de l'extension panachée $\mathcal{M}$ associée à a est nulle.*
2. *Dans le cas contraire, sa dimension vaut* 2.

Remarque Dans le cas du corps aux σ-différences $(\mathbb{C}(z), \tau, d/dz)$, la dimension du radical unipotent du groupe de Galois (pris au sens de [**38**]) du système 13 est égale à 2 si et seulement si a n'est pas de la forme $\lambda \frac{g(z+\tau)}{g(z)}$, $g \in K$ et $\lambda \in \mathbb{C}$
Contrairement au cas des σ_q-différences, on n'a pas dans le cas des τ-différences de changement de condition sur a lorsque l'on passe du système (2) au système (3). La raison en est que σ_τ n'admet pas 0 comme point fixe, à l'inverse de σ_q. Pour une appoche analytique de ces questions, voir [**3**].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. André. Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 34(5) :685–739, 2001.

[2] Yves André. Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part. *Compositio Math.*, 82(1) :1–24, 1992.

[3] S. B. Bank. Some results on hypertranscendental meromorphic functions. *Monatsh. Math.*, 90(4) :267–289, 1980.

[4] P. H. Berman and M. F. Singer. Calculating the Galois group of $L_1(L_2(y)) = 0$, L_1, L_2 completely reducible operators. *J. Pure Appl. Algebra*, 139(1-3) :3–23, 1999.

[5] C. Bertolin. Biextensions and 1-motives. *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*, 27(3) :65–71, 2005.

[6] D. Bertrand. Extensions de D-modules et groupes de Galois différentiels. Lecture Notes in Math.,1454 :125–141, 1990, Springer Verlag.

[7] D. Bertrand. Extensions panachées et dualité. *prepublication N°287 Institut de Mathématiques de Jussieu*, 2001.

[8] D. Bertrand. Unipotent radicals of differential Galois groups and integrals of solutions of inhomogeneous equations. *Math. Ann.*, 321(3) :645–666, 2001.

[9] Jean-Paul Bézivin. Sur les équations fonctionnelles aux q-différences. *Aequationes Math.*, 43(2-3) :159–176, 1992.

[10] Jean-Paul Bézivin. Sur les systèmes d'équations aux différences. *Aequationes Math.*, 60(1-2) :80–98, 2000.

[11] A. Borel. *Groupes algébriques.* Soc. Math. France, Paris, 1995.

[12] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique.* Masson, Paris, 1980. Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique.

[13] K. Boussel. Opérateurs hypergéométriques réductibles : décompositions et groupes de Galois différentiels. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 5(2) :299–362, 1996.

[14] E. Compoint and M. F. Singer. Computing Galois groups of completely reducible differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 28(4-5) :473–494, 1999.

[15] É. Compoint and J. A. Weil. Absolute reducibility of differential operators and Galois groups. *J. Algebra*, 275(1) :77–105, 2004.

[16] P. Deligne. *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. Springer-Verlag, Berlin, 1970. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163.

[17] P. Deligne. *Catégories tannakiennes*, volume 87 of *Progr. Math.* Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 111-195.

[18] L. Di Vizio, J.-P. Ramis, J. Sauloy, and C. Zhang. Équations aux q-différences. *Gaz. Math.*, (96) :20–49, 2003.

[19] P. I. Etingof. Galois groups and connection matrices of q-difference equations. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 1(1) :1–9 (electronic), 1995.

[20] A. Grothendieck. *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I), Dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288.

[21] C. Hardouin. Calcul du groupe de galois du produit de trois opérateurs différentiels complètement réductibles. *C.R.Acad.Sci Paris, Ser.I 341(2005).*

[22] E. Hrushovski. *Computing the Galois group of a linear differential equation*, volume 58 of *Banach Center Publ.* Polish Acad. Sci., Warsaw, 2002.

[23] K. Ishizaki. Hypertranscendency of meromorphic solutions of a linear functional equation. *Aequationes Math.*, 56(3) :271–283, 1998.

[24] N. M. Katz. On the calculation of some differential Galois groups. *Invent. Math.*, 87(1) :13–61, 1987.

[25] N. M. Katz. A simple algorithm for cyclic vectors. *Amer. J. Math.*, 109(1) :65–70, 1987.

[26] N. M. Katz. *Exponential sums and differential equations*, volume 124 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[27] B. Malgrange. Sur les points singuliers des équations différentielles. *Enseignement Math. (2)*, 20 :147–176, 1974.

[28] M. van der Put and M. Reversat. Krichever modules for difference and differential equations. *Astérisque*, (296) :207–225,vol. I, 2004.

[29] C. Praagman. Fundamental solutions for meromorphic linear difference equations in the complex plane, and related problems. *J. Reine Angew. Math.*, 369 :101–109, 1986.

[30] J.-P. Ramis. About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 1(1) :53–94, 1992.

[31] N. Saavedra Rivano. *Categories tannakiennes.* Lecture Notes in Mathematics. 265. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag. 418 p., 1972.

[32] P. Maisonobe and C. Sabbah, editors. *Éléments de la théorie des systèmes différentiels. $\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes*, volume 45 of *Travaux en Cours [Works in Progress]*. Hermann, Paris, 1993. Papers from the CIMPA Summer School held in Nice, August and September 1990.

[33] J. Sauloy. Classification analytique locale des équations aux q différences irrégulières (prép. toulouse).

[34] J. Sauloy. Galois theory of Fuchsian q-difference equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(6) :925–968 (2004), 2003.

[35] J.-P. Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1994.

[36] M. van der Put. Skew differential fields, differential and difference equations. *Astérisque*, (296) :191–205,vol. I, 2004.

[37] M. van der Put and M. Reversat. Galois theory of Q-difference equations, Prepub. n°298 Lab. E.Picard, 2005

[38] M. van der Put and M. F. Singer. *Galois theory of difference equations*, volume 1666 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[39] M. van der Put and M. F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*, volume 328 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* . Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[40] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. Reprint of the fourth (1927) edition.