

COURBURES, GROUPES DE GALOIS GÉNÉRIQUES ET D -GROUPOÏDE DE GALOIS D'UN SYSTÈME AUX q -DIFFÉRENCES

LUCIA DI VIZIO AND CHARLOTTE HARDOUIN

RÉSUMÉ. En combinant les résultats de [6], [1] and [2], nous prouvons que les groupes de Galois génériques, usuel et différentiel, d'un module aux q -différences sur $\mathbb{C}(x)$ peuvent toujours être caractérisés à l'aide d'un ensemble convenable de courbures, dans l'esprit de [8]. Nous utilisons ce résultat pour prouver que le D -groupeïde de Malgrange-Granier d'un système aux q -différences linéaire coïncide, dans un sens que nous spécifions dans le texte ci-dessous, avec la clôture de Kolchin de la dynamique du système aux q -différences, et que le groupe qui fixe une transversal du groupeïde coïncide avec le groupe de Galois différentiel générique.

INTRODUCTION

Considérons un système aux q -différences $Y(qx) = A(x)Y(x)$, avec $q \in \mathbb{C}$, $|q| > 1$ et $A(x) \in GL_\nu(\mathbb{C}(x))$. Dans [5], les auteurs attachent à cet objet un groupe de Galois différentiel à la Kolchin-Cassidy, qui "mesure" les relations algébrodifférentielles satisfaites par les solutions du système. Le groupe différentiel de Hardouin-Singer est défini sur la clôture différentielle du corps des fonctions méromorphes sur le tore $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$, donc un corps très grand.

Nous considérons ici le groupe de Galois générique d'un système aux q -différences $Y(qx) = A(x)Y(x)$, avec $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $A(x) \in GL_\nu(\mathbb{C}(x))$, dans l'esprit de [8] et [1], et son avatar différentiel. Ces deux groupes génériques sont définis sur $\mathbb{C}(x)$ et encodent beaucoup d'informations sur les solutions du système et peuvent être caractérisés en termes de courbures, dans l'esprit de la conjecture de Grothendieck-Katz sur les p -courbures d'une équation différentielle (cf. [8]). Nous comparons le D -groupeïde de Galois d'un système aux q -différences linéaire (cf. [4]) avec le groupe de Galois générique différentiel et la clôture de Kolchin de la dynamique du système, généralisant ainsi les résultats de [3].

1. DÉFINITION DES GROUPES DE GALOIS GÉNÉRIQUES ALGÈBRE ET DIFFÉRENTIEL

Soient K un corps de caractéristique zéro, $q \in K \setminus \{0, 1\}$ et $\sigma_q : f(x) \mapsto f(qx)$, pour tout $f(x) \in K(x)$. On appelle module aux q -différences $\mathcal{M}_{K(x)} = (M_{K(x)}, \Sigma_q)$ sur $K(x)$ un $K(x)$ -espace vectoriel $M_{K(x)}$ équipé d'une bijection σ_q -semilinéaire $\Sigma_q : M_{K(x)} \rightarrow M_{K(x)}$. Nous considérons la plus petite famille $\text{Constr}(\mathcal{M}_{K(x)})$ de $K(x)$ -espaces vectoriels contenant $M_{K(x)}$ et fermée par rapport aux constructions algébriques (somme directe, produit tensoriel, symétrique et antisymétrique, dual). L'opérateur Σ_q induit une bijection σ_q -semilinéaire sur chaque espace vectoriel de la famille $\text{Constr}(\mathcal{M}_{K(x)})$, que l'on appellera à nouveau Σ_q , de façon que les éléments de la famille $\text{Constr}(\mathcal{M}_{K(x)})$ ont une structure de module aux q -différences sur $K(x)$. Notons que $\text{Gl}(M_{K(x)})$ agit fonctoriellement sur chaque élément de la famille $\text{Constr}(\mathcal{M}_{K(x)})$.

Nous pouvons aussi considérer une famille plus grande $\text{Constr}^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})$, contenant $\text{Constr}(\mathcal{M}_{K(x)})$, mais qui est en plus fermée par rapport au *foncteur de prolongation* F , dont nous allons maintenant donner la définition. Soit $\partial = x \frac{d}{dx}$. Pour tout module aux q -différences $\mathcal{M}_{K(x)}$, le module aux q -différences $F(\mathcal{M}_{K(x)}) = (F(M_{K(x)}), \Sigma_q)$ est défini par : $F(M_{K(x)}) = M_{K(x)} \otimes_{K(x)} [K(x) + K(x)\partial]$, où le produit tensoriel est pris par rapport à la structure de $K(x)$ -module à droite de $K(x) + K(x)\partial$; si \underline{e} est une $K(x)$ -base de $M_{K(x)}$ telle que $\Sigma_q \underline{e} = \underline{e}A(x)$, alors on note $(\underline{e}, \partial(\underline{e})) := (\underline{e} \otimes 1, \underline{e} \otimes \partial)$ et on pose $\Sigma_q(\underline{e}, \partial(\underline{e})) = (\underline{e}, \partial \underline{e}) \begin{pmatrix} A & \partial(A) \\ 0 & A \end{pmatrix}$, motivé par le fait que $\sigma_q \partial = \partial \sigma_q$. Nous soulignons que la structure $K(x)$ -linéaire de $F(M_{K(x)})$ est définie par

Date: 9 mars 2010

Lucia DI VIZIO, Institut de Mathématiques de Jussieu, Topologie et géométrie algébriques, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. e-mail: divizio@math.jussieu.fr.

Charlotte HARDOUIN, Institut de Mathématiques de Jussieu, Topologie et géométrie algébriques, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France. e-mail: hardouin@math.ups-tlse.fr.

Travail partiellement financé par le contrat ANR-06-JCJC-0028.

$\lambda(\partial(m)) := \lambda(m \otimes \partial) = \partial(\lambda m) - \partial(\lambda)m$, pour tout $\lambda \in K(x)$ et $m \in M_{K(x)}$. Un automorphisme $\varphi \in Gl(M_{K(x)})$ agit sur $F(M_{K(x)})$ dans la base $(\underline{e}, \partial \underline{e})$ via : $\varphi(\underline{e}, \partial \underline{e}) = (\underline{e}, \partial \underline{e}) \begin{pmatrix} \Phi & \partial(\Phi) \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}$.

Définition 1.1. On appelle groupe de Galois générique (algébrique) (resp. générique différentiel) de $\mathcal{M}_{K(x)}$ le sous-groupe algébrique $Gal(\mathcal{M}_{K(x)}) = \{\varphi \in Gl(M_{K(x)}) : \varphi \text{ stabilise tout sous-espace } \Sigma_q\text{-stable dans chaque objet de } Constr(\mathcal{M}_{K(x)})\}$ (resp. différentiel¹ $Gal^\partial(\mathcal{M}_{K(x)}) = \{\varphi \in Gl(M_{K(x)}) : \varphi \text{ stabilise tout sous-espace } \Sigma_q\text{-stable dans chaque objet de } Constr^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})\}$) de $Gl(M_{K(x)})$.

La noetherianité de $Gl(M_{K(x)})$ et le théorème de Ritt-Raudenbush [7, Thm.7.1] impliquent :

Proposition 1.2. *Il existe un sous-corps $K' \subset K$, de type fini sur \mathbb{Q} , tel que*

$$Gal(\mathcal{M}_{K'(x)}) \otimes_{K'(x)} K(x) = Gal(\mathcal{M}_{K(x)}) \quad (\text{resp. } Gal^\partial(\mathcal{M}_{K'(x)}) \otimes_{K'(x)} K(x) = Gal^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})) .$$

D'après le théorème de Chevalley (resp. son analogue différentiel [10]) tout sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ s'écrit comme le stabilisateur d'une droite $L_{K(x)}$ contenue dans $\mathcal{W}_{K(x)}$ dans $Constr(\mathcal{M}_{K(x)})$ (resp. $Constr^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})$).

2. CONJECTURE DE GROTHENDIECK-KATZ POUR LES MODULES AUX q -DIFFÉRENCES

Nous pouvons donner l'énoncé informel suivant, dont nous expliquerons la significations plus loin :

Théorème 2.1. *Soient K une extension de \mathbb{Q} de type fini, $q \in K \setminus \{0, 1\}$ et $\mathcal{M}_{K(x)} = (M_{K(x)}, \Sigma_q)$ un module aux q -différences sur $K(x)$. Alors $Gal(\mathcal{M}_{K(x)})$ (resp. $Gal^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})$) est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ qui contient un ensemble non vide et cofini de courbures.*

L'énoncé précédent résume de façon un peu informelle trois énoncés similaires. Les trois cas dépendent de la nature de q :

1) q est une racine de l'unité. Dans ce cas, il n'y a qu'une courbure à prendre en compte :

Théorème 2.2 (cf. [6] dans le cas du groupe de Galois usuel). *Soient K une extension de \mathbb{Q} de type fini, q une racine de l'unité d'ordre $\kappa > 1$ et $\mathcal{M}_{K(x)} = (M_{K(x)}, \Sigma_q)$ un module aux q -différences sur $K(x)$. Alors $Gal(\mathcal{M}_{K(x)})$ (resp. $Gal^\partial(\mathcal{M}_{K(x)})$) est la clôture de Zariski (resp. la clôture de Kolchin) de $\{\Sigma_q^\kappa\}$ dans $Gl(M_{K(x)})$.*

2) q est transcendant sur \mathbb{Q} . Si q est transcendant sur \mathbb{Q} , il existe un corps k de type fini sur \mathbb{Q} tel que q est transcendant sur k et K est une extension algébrique de $k(q)$. Nous appelons \mathcal{O}_K son anneau des entiers de K . Nous appellerons *cyclotomiques* les valuations v de K , pour lesquelles l'image de q dans le corps résiduel est une racine de l'unité q_v , disons d'ordre κ_v . Soit ϕ_v le polynôme minimal de q_v sur k . Dans ce cadre, le théorème 2.1 se traduit par :

Théorème 2.3 ([2, Thm. 4.5 and 5.11]). *Le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) de $\mathcal{M}_{K(x)}$ est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ qui contient $\Sigma_q^{\kappa_v}$ modulo ϕ_v , pour presque toute place cyclotomique v .*

Cet énoncé nécessite encore des explications. Notons qu'il existe une algèbre \mathcal{A} , munie d'une action de σ_q , de la forme $\mathcal{A} = \mathcal{O}_K \left[x, \frac{1}{P(x)}, \frac{1}{P(qx)}, \dots \right]$, avec $P(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, et un \mathcal{A} -réseau M de $M_{K(x)}$ stable par Σ_q . Le \mathcal{A} -réseau M induit un \mathcal{A} -réseau V sur tout module aux q -différences $\mathcal{V}_{K(x)}$ contenu dans une construction différentielle de $\mathcal{M}_{K(x)}$. Alors, le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) G de $Gl(M_{K(x)})$, tel que G soit le stabilisateur d'une droite $L_{K(x)}$ dans une construction algébrique (resp. différentielle) $\mathcal{W}_{K(x)}$ avec $L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K / (\phi_v)$ est $\Sigma_q^{\kappa_v}$ -stable dans $W \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K / (\phi_v)$.

3) q est algébrique, mais pas une racine de l'unité. Soit Q la clôture algébrique de \mathbb{Q} dans K et \mathcal{O}_Q son anneau des entiers. Pour presque toute place finie v de Q , la réduction de q modulo v est une racine de l'unité d'ordre κ_v . Pour chaque v , on fixe un uniformisant v -adique et une puissance entière φ_v de cet uniformisant, telle que $\varpi_v^{-1}(1 - q^{\kappa_v})$ soit un entier inversible de \mathcal{O}_Q . Nous avons donc :

Théorème 2.4 ([1, Thm. 10.2.1] pour le groupe de Galois générique algébrique, si K est un corps de nombres, et [2, Thm. 8.8] sinon). *Le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) de $\mathcal{M}_{K(x)}$ est le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) de $Gl(M_{K(x)})$ qui contient $\Sigma_q^{\kappa_v}$ modulo ϖ_v , pour presque toute place finie v de Q .*

1. *i.e.* défini par une famille de polynomes différentiels

L'énoncé précédent a exactement la même signification que le théorème 2.3 en termes de droites stabilisées par les groupes de Galois génériques. Notamment, il existe une base de transcendance \underline{a} de K/Q , un élément primitif b de $K/Q(\underline{a})$ et une algèbre de la forme $\mathcal{A} = \mathcal{O}_Q \left[\underline{a}, b, x, \frac{1}{P(x)}, \frac{1}{P(qx)}, \dots \right]$, avec $P(x) \in \mathcal{O}_Q[\underline{a}, b, x]$, tels qu'il existe un \mathcal{A} -réseau Σ_q -stable M de $M_{K(x)}$ qui induit, comme dans le cas précédent des \mathcal{A} -réseaux sur les sous-modules des constructions de $M_{K(x)}$. Le groupe de Galois générique (resp. générique différentiel) est ainsi le plus petit sous-groupe algébrique (resp. différentiel) G de $Gl(M_{K(x)})$, tel que G soit le stabilisateur d'une droite $L_{K(x)}$ dans une construction algébrique (resp. différentielle) $\mathcal{W}_{K(x)}$ avec $L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\varpi_v)$ est $\Sigma_q^{\kappa_v}$ -stable dans $W \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\varpi_v)$.

Les théorèmes précédents se déduisent, suivant l'idée de [8], du Théorème de Chevalley (et de son analogue différentiel [10]) et du critère suivant :

Théorème 2.5 ([1, Thm.7.1.1], [2, Thm.3.1 et Thm.8.1]). *Le module aux q -différences $\mathcal{M}_{K(x)}$ est banal (i.e. il est isomorphe à $K(x)^\nu$ avec l'action de σ_q définie composante par composante) si et seulement s'il existe un ensemble non vide et cofini de courbures égales à l'identité.*

Cela signifie que Σ_q^κ est l'identité, dans le premier cas ; que $\Sigma_q^{\kappa_v}$ agit comme l'identité sur $M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\phi_v)$ pour presque toute place cyclotomique v dans le deuxième cas ; que $\Sigma_q^{\kappa_v}$ agit comme l'identité sur $M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/(\varpi_v)$ pour presque toute place finie v de Q dans le troisième cas.

3. APPLICATION AUX D -GROUPOÏDES DE MALGRANGE-GRANIER

Considérons maintenant un système aux q -différences linéaire (*) $Y(qx) = A(x)Y(x)$, avec $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $A(x) \in Gl_\nu(\mathbb{C}(x))$. Soit $Dyn(A(x)) = \{A_k(x) := A(q^{k-1}x) \dots A(qx)A(x) : k \in \mathbb{Z}, k > 0\} \cup \{A_0(x) = Id_\nu\} \cup \{A_k(x) := A(q^k x)^{-1} A(q^{k+1}x)^{-1} \dots A(q^{-1}x)^{-1} : k \in \mathbb{Z}, k < 0\}$ la dynamique du système (*). Nous allons noter $\mathcal{M}^{(A)}$ le module aux q -différences associé à ce système, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\mathbb{C}(x)^\nu$ muni de la bijection σ_q -semilinéaire $\Sigma_q : \mathbb{C}(x)^\nu \rightarrow \mathbb{C}(x)^\nu$, $\Sigma_q(X) = A(x)^{-1} X \sigma_q$. Pour la définition du D -groupoïde de Galois $\mathcal{G}al(A)$ de (*) et pour la définition de D -groupoïde tout court, nous nous référons à [4]. On note $M = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{C}^\nu$ et $J^*(M, M)$ l'espace des jets inversibles de M .

Nous considérons d'abord la clôture de Kolchin $\mathcal{K}ol(A)$ de $\left\{ \begin{pmatrix} q^k & 0 \\ 0 & A_k(x) \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ dans $Gl_{\nu+1}(\mathbb{C}(x))$ et son idéal $I_{\mathcal{K}ol(A)}$ dans l'algèbre différentielle $\mathbb{C}(x)\{T, \det T^{-1}\}_\partial$, avec $T = (T_{i,j})_{i,j=0,\dots,\nu}$. Nous appellerons $\mathcal{G}al^{alg}(A)$ le D -groupoïde engendré au sens de [9, Thm.4.4.1] par $\langle \frac{\partial \bar{x}}{\partial X}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} x - \bar{x}, \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial X^2}, \frac{\partial X}{\partial X} X - \bar{X}, \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial X^2} \rangle$ (cf. [4, Thm.2.2]) et l'image par τ de $I_{\mathcal{K}ol(A)}$:

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{C}(x)\{T, \frac{1}{\det T}\}_\partial &\longrightarrow H^0(M \times_{\mathbb{C}} M, \mathcal{O}_{J^*(M,M)}) \\ (T_{i,j})_{i,j=0,\dots,\nu} &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} & \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial X_j} \right)_j \\ \left(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial x} \right)_j & \left(\frac{\partial \bar{X}_i}{\partial X_j} \right)_{i,j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les déclinaisons, selon la nature de q , du théorème 2.1 permettent de montrer l'égalité entre l'idéal de définition de $\mathcal{G}al^\partial(\mathcal{M}^{(A)})$ et l'idéal différentiel engendré par $I_{\mathcal{K}ol(A)}$ et $T_{0,0} - 1$. On obtient ainsi l'analogue aux q -différences de [9, Cor.5.3.6]

Théorème 3.1 ([2, §9]). *Les D -groupoïdes $\mathcal{G}al(A)$ et $\mathcal{G}al^{alg}(A)$ ont les mêmes solutions, i.e. des difféomorphismes obtenus de la façon suivante :*

$$(x, X) \longmapsto (\alpha x, \beta(x)X), \text{ avec } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta(x) \end{pmatrix} \text{ solutions de } I_{\mathcal{K}ol(A)}.$$

Les solutions des D -groupoïdes $\widetilde{\mathcal{G}al}(A)$ et $\widetilde{\mathcal{G}al}^{alg}(A)$, intersections respectives de $\mathcal{G}al(A)$ et $\mathcal{G}al^{alg}(A)$ avec le D -groupoïde engendré par $\langle x - \bar{x} \rangle$, sont les difféomorphismes construits de la façon suivante :

$$(x, X) \longmapsto (x, \beta(x)X), \text{ avec } \beta(x) \text{ solutions de équations différentielles définissant } \mathcal{G}al^\partial(\mathcal{M}^{(A)}).$$

Le théorème précédent généralise un résultat analogue de A. Granier établi pour les systèmes aux q -différences $Y(qx) = AY(x)$, avec $A \in Gl_\nu(\mathbb{C})$ et $q \in \mathbb{C}$, avec $|q| \neq 1$. Dans [2, Cor.6.15], on compare le groupe générique différentiel d'un module aux q -différences avec le groupe différentiel de Hardouin-Singer qui, dans le cas d'un système à coefficients constants, coïncide avec le groupe de Galois usuel.

RÉFÉRENCES

1. L. Di Vizio, *Arithmetic theory of q -difference equations. The q -analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p -curvatures*, *Inventiones Mathematicae* **150** (2002), no. 3, 517–578, arXiv :math.NT/0104178.
2. L. DI Vizio et C. Hardouin, *Algebraic and differential generic galois groups for q -difference equations*, followed by the appendix *The Galois D -groupoid of a q -difference system* by Anne Granier, ArXiv :1002.4839.
3. A. Granier, *A local D -groupoid for fuchsian q -difference equations*, Submitted for publication, 2009.
4. ———, *Un D -groupeïde de galois local pour les systèmes aux q -différences fuchsians*, *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*. Doi : 10.1016/j.crma.2010.01.030, 2010.
5. C. Hardouin and M. F. Singer, *Differential Galois theory of linear difference equations*, *Mathematische Annalen* **342** (2008), no. 2, 333–377.
6. P. Hendriks, *Algebraic Aspects of Linear Differential and Difference Equations*, Ph.D. thesis, University of Groningen., 1996.
7. I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1957.
8. N. M. Katz, *A conjecture in the arithmetic theory of differential equations*, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **110** (1982), no. 2, 203–239.
9. B. Malgrange, *Le groupeïde de Galois d'un feuilletage*, *Essays on geometry and related topics*, Vol. 1, 2, Monogr. Enseign. Math., vol. 38, Enseignement Math., 2001, pp. 465–501.
10. A. Ovchinnikov, *Chevalley's theorem for linear differential algebraic groups*, Personal communication. (2009).
11. A. Peón Nieto, *On sigmadelta-picard-vessiot extensions*, to appear in *Communications in algebra*, 2009.