Hypertranscendance et Groupes de Galois aux différences

Charlotte Hardouin

Université Paris VI

le 15 septembre 2006

Résumé

On donne dans cet article divers critères d'indépendance algébrique pour les dérivées successives de solutions d'équations aux différences de rang 1. L'idée principale consiste à construire au moyen de l'opérateur de dérivation, qui commute avec l'opérateur aux différences, des extensions itérées du module aux différences initial. Le problème se ramène alors au calcul du groupe de Galois aux différences de telles extensions, calcul qui lui-même se réduit à une simple question d'algèbre linéaire. Les catégories tannakiennes mises en jeu sont neutres, mais sur des corps parfois non algébriquement clos, ce qui conduit à étudier le comportement des groupes de Galois par extension des corps de bases.

Abstract This paper deals with criteria of algebraic independence for the derivatives of solutions of rank one difference equations. The key idea consists in deriving from the commutativity of the differentiation and difference operators a sequence of iterated extensions of the original difference module, thereby setting the problem in the framework of difference Galois theory and finally reducing it to an exercise in linear algebra. The involved tannakian categories are neutral over non necessarily algebraically closed fields, and this leads us to study the behaviour of Galois groups under base field extensions.

- Key words :

- Classification AMS : 12 H 10, 12 H 05, 34 M 15, 39 A 13

- Adresse electronique de l'auteur : hardouin@math.jussieu.fr,

- Adresse postale :

  Institut de mathématiques de Jussieu, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris

  à compter du 01/10/2006, Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen (IWR) der Universität Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 368, 69120 Heidelberg Germany

Table des matières

1 Introduction

Dans cet article, on s'intéresse aux relations algébro-différentielles satisfaites par les solutions d'équations fonctionnelles, plus particulièrement aux différences. On dira qu'une fonction f (indéfiniment dérivable) est *hypertranscendante* sur un corps K s'il n'existe pas de relations algébriques à coefficients dans K liant f et ses dérivées, autremant dit si f ne vérifie pas d'équations différentielles algébriques sur K.
L'exemple le plus classique de fonction hypertranscendante est celui de la fonction Γ qui vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et qui est hypertranscendante sur $\mathbb{C}(z)$.
Des résultats de même nature ont été établis par exemple par S. Bank (voir [3]) dans le cadre d'équations aux τ-différences de rang 1 et par K. Ishizaki ([12]) dans le cadre d'équations aux q-différences non homogènes de rang 1.
Ces résultats se basent essentiellement sur des méthodes analytiques et sur l'estimation de la taille des coefficients du développement de telles fonctions.
Dans cet article, on se propose d'étendre ce type d'énoncés à l'étude simultanée de plusieurs solutions (autrement dit, à des questions d ' *"hyperindépendance algébrique"*), et ce, par des méthodes purement algébriques de théorie de Galois aux différences. Voici, dans le cadre des q-différences, le type de théorème auquel on aboutira.

Soit $q \in \mathbb{C}^*, |q| \neq 1$. On désigne par $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$, par σ_q l'automorphisme de $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$, qui à une fonction $f(z)$ associe la fonction $f(qz)$ et par C_E le sous-corps de $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ des fonctions invariantes sous l'action de σ_q, qui est isomorphe au corps $\mathbb{C}(E)$ des fonctions rationnelles sur la courbe elliptique $E = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$.
On appelle diviseur elliptique d'une fonction $f \in \mathbb{C}(z)$ l'image dans le groupe des diviseurs de la courbe elliptique $E = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ de la partie première à 0 du diviseur de f.

Théorème 1.1 *Soient $a_1, ..., a_n$ des éléments non nuls de $\mathbb{C}(z)$ et q un nombre complexe non nul de module différent de 1. Pour tout $i = 1, ..., n$, soit $f_i \neq 0$ une solution méromorphe sur $\mathbb{C}^*$ de l'équation aux q-différences $\sigma_q(f_i) = a_i f_i$. On suppose que les diviseurs elliptiques des a_i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Alors les fonctions $f_1, ..., f_n$ ainsi que leur dérivées successives sont algébriquement indépendantes sur $C_E(z)$.*

L'outil essentiel à la démonstration de ce théorème est la théorie de Galois aux différences, qui permet de faire le lien entre groupe de Galois des équations et degré de transcendance des extensions de corps mises en jeu (tout comme en théorie des équations différentielles). Le principe de la preuve est le suivant :

Soit (K, σ, ∂) un corps aux différences et différentiel de caractéristique nulle, c'est à dire un corps K muni d'un automorphisme de corps σ et d'un opérateur de dérivation ∂ tels que $\sigma \circ \partial = \partial \circ \sigma$. On note C_σ (resp. C_∂) le sous-corps de K formé des invariants sous σ (resp. des constantes différentielles de K) et $\mathcal{D}_\sigma = K[\sigma, \sigma^{-1}]$ l'anneau des polynômes en σ et σ^{-1} à coefficients dans K. Par exemple dans le cas supra , on pourra prendre $(K_E, \sigma, \partial) =$

$(C_E(z), \sigma_q, zd/dz)$ (d'où $C_\sigma = C_E$ et $C_\partial = \mathbb{C}$), ou encore $(K, \sigma, \partial) = (\mathbb{C}(z), \sigma_q, zd/dz)$(d'où $C_\sigma = C_\partial = \mathbb{C}$).

On considère le système aux différences :

$$\sigma Y = AY, \text{ où } A \in Gl_n(K) \tag{1}$$

Soient L une extension aux différences différentielle de K et $Y \in L^n$ une solution de (1). Notons $\mathcal{A}$ le $\mathcal{D}_\sigma$-module associé à ce système et considérons le vecteur

$$\begin{pmatrix} \partial Y \\ Y \end{pmatrix} \in L^{2n}.$$

Puisque σ et ∂ commutent, il vérifie l'équation aux différences :

$$\sigma \begin{pmatrix} \partial Y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \partial A \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial Y \\ Y \end{pmatrix} \tag{2}$$

qui correspond à une extension $\mathcal{M}(1)$ de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}$ dans la catégorie des $\mathcal{D}_\sigma$-modules.

En itérant $m-1$ fois ce processus, et en notant que pour tout entier $j \geq 1$,

$$\sigma(\partial^j Y) = \partial^j(\sigma Y) = \partial^j(AY) = \sum_{i=0}^{j} C_j^i \partial^i A \partial^{j-i} Y, \tag{3}$$

on obtient le système aux différences

$$\sigma \begin{pmatrix} \partial^m Y \\ \partial^{m-1} Y \\ . \\ . \\ . \\ \partial Y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & n\partial A & \frac{n(n-1)}{2}\partial^2 A & \cdots & \partial^m A \\ 0 & A & (n-1)\partial A & \cdots & \partial^{m-1} A \\ \vdots & \vdots & A & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^m Y \\ \partial^{m-1} Y \\ . \\ . \\ . \\ \partial Y \\ Y \end{pmatrix}; \tag{4}$$

c'est la représentation matricielle d'un $\mathcal{D}_\sigma$-module $\mathcal{M}(m)$, extension itérée m-fois de l'objet $\mathcal{A}$ dans cette catégorie.

Le degré de transcendance du corps $K(Y, \partial Y, ..., \partial^m Y)$ sur K s'interprète alors comme la dimension de l'orbite de cette solution sous l'action du groupe de Galois aux différences $G(\mathcal{M}(m))$ de $\mathcal{M}(m)$. De plus, lorsque $\mathcal{A}$ est complétement réductible la seule action du radical unipotent de $G(\mathcal{M}(m))$ suffit à contrôler le degré de transcendance de la *partie différentielle* $K(Y, \partial Y, ..., \partial^m Y)/K(Y)$ de cette extension.
C'est ainsi au calcul du radical unipotent de $G(\mathcal{M}(m))$ qu'est consacré l'essentiel de l'article, pour $\mathcal{A}$ somme directe de $\mathcal{D}_\sigma$-modules de rang 1. Sous les hypothèses du théorème

1.1, on verra qu'il est aussi grand que possible. Le théorème 1.1 et son analogue pour les τ-différences en découlent immédiatement.

Le plan de l' article est le suivant.

Dans la partie 2, on étend les résultats de [4] et [2] sur le calcul du radical unipotent du groupe de Galois du produit de deux opérateurs différentiels complétement réductibles au cadre d'une catégorie tannakienne $\mathbf{T}$ neutre sur un corps C de caractéristique 0 mais non nécessairement algébriquement clos. Plus précisément, on détermine au théorème 2.1 le radical unipotent du groupe de Galois d'une extension de l'objet $\mathbf{1}$, élément unité de $\mathbf{T}$, par un objet $\mathcal{Y}$ complétement réductible. On obtient ainsi l'équivalence entre la complexité de l'extension et la taille de son groupe de Galois. On rappelle également (proposition 2.10) comment le groupe de Galois contrôle le degré de transcendance des solutions.

On peut extraire de la littérature plusieurs définitions de groupes de Galois aux différences, correspondant à divers choix de foncteurs fibres. Par exemple, dans le cas des q-différences, celui des symboles de M. van der Put et M.F. Singer ([20]) où la catégorie tannakienne $\mathbf{T}$ est la catégorie des σ_q-modules de type fini sur $K = \mathbb{C}(z)$ (ou plus généralement sur $K = C(z)$ avec C algébriquement clos) et où le groupe de Galois correspond au choix d'un foncteur fibre ω sur $\mathbb{C}$ (voir aussi [1], paragraphes 3.2 et 3.4). Les foncteurs fibres, de nature plus géométriques, de J. Sauloy ([19]) fournissent encore des groupes de Galois sur $\mathbb{C}$. Les travaux de C. Praagman ([17]) permettent en revanche de considérer la catégorie $\mathbf{T}_E$ des σ_q-modules de type fini sur $K_E = C_E(z)$ et un foncteur fibre ω_E (donc un groupe de Galois) sur le corps non algébriquement clos C_E. La nature même de nos résultats (étude de "vraies" fonctions, sur lesquelles agit une dérivation) conduit à privilégier cette dernière approche [1], mais on montre dans la partie 3 que des extensions d'objets de $\mathbf{T}$ indépendantes au sens de $\mathbf{T}$ le demeurent, après extension des scalaires à K_E, au sens de $\mathbf{T}_E$ (théorème 3.2).

Dans la partie 4, on vérifie que les extensions de la catégorie $\mathbf{T}$ mises en jeu au théorème 1.1 sont bien indépendantes. Les résultats d'hypertranscendance dans le cadre particulier d'opérateurs aux q-différences de rang 1 et plus généralement d'une somme d'opérateurs de rang 1 irréductibles et non isomorphes en découlent. On aboutit ainsi au théorème 1.1.

Enfin, on donne dans la partie 5 l'analogue des théorèmes de la partie 4 dans le cadre des τ-différences. On y redémontre par exemple, de facon purement algébrique, l'hypertranscendance de la fonction Γ.

[1] On trouvera au paragraphe 3.3 une démonstration fondée sur la première approche et sur un cas particulier des théorèmes de comparaison établis dans [6] entre groupes de Galois au sens de $\mathbf{T}$ et de $\mathbf{T}_E$

Remarque
La considération simultanée de deux opérateurs, ici σ_q et ∂, agissant sur le même corps de fonctions n'est pas nouvelle, voir par exemple les travaux de J.P. Bézivin ([5]) pour deux opérateurs aux q-différences, σ_{q_1} et σ_{q_2} avec $q_1 \neq q_2$. Dans ce type de travail, les deux opérateurs jouent un rôle symétrique et on ne traite que d'équations linéaires en chacun des opérateurs.
L'idée clé du présent article est la consideration des extensions successives décrite plus haut. Les rôles des opérateurs σ_q et ∂ ne sont plus symétriques, permettant ainsi d'atteindre des équations différentielles non linéaires. Signalons que ce processus s'adapte à d'autres situations : voir ainsi le recent travail de A. Ovchinnikov [16], où σ_q est remplacé par un operateur de derivation ∂_x commutant avec ∂_z.

2 Calcul de groupes de Galois

Dans cette partie, C désigne un corps de caractéristique nulle. *On ne suppose pas que C soit algébriquement clos.*

Soit $\mathbf{T}$ une catégorie tannakienne neutre sur le corps C (au sens de Deligne [7], dont on reprend dans tout l'article les notations et conventions). On note $\mathbf{1}$ l'objet unité (en particulier $End(\mathbf{1}) = C$) et ω un foncteur fibre de $\mathbf{T}$ à valeurs dans la catégorie $Vect_C$ des C-espaces vectoriels de dimension finie.

Le principal résultat de cette partie est la version tannakienne suivante des énoncés de [4] et [2], où l'on appelle *groupe de Galois* d'un objet $\mathcal{M}$ de $\mathbf{T}$, noté $G_{\mathcal{M}}$, le groupe algébrique $Aut^{\otimes}(\omega| < \mathcal{M} >)$ (où $< \mathcal{M} >$ désigne la catégorie tannakienne engendrée par $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{T}$).

Théorème 2.1 *Soient $\mathcal{Y}$ un objet complétement réductible de $\mathbf{T}$ et $\mathcal{U}$ une extension dans $\mathbf{T}$ de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{Y}$. Alors $G_{\mathcal{U}}$ est égal au produit semi-direct du groupe réductif $G_{\mathcal{Y}}$ par le groupe vectoriel $\omega(\mathcal{V})$, où $\mathcal{V}$ désigne le plus petit sous-objet de $\mathcal{Y}$ tel que le quotient par $\mathcal{V}$ de l'élément $\mathcal{U}$ de $Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{Y})$ soit une extension scindée.*

L'existence du plus petit objet $\mathcal{V}$ de l'énoncé précédent est justifié au lemme 2.7 et la preuve du théorème est donnée au paragraphe 2.2.

On déduit du théorème 2.1 le corollaire suivant, qui suffira pour les applications décrites aux parties 4 et 5 de cet article.

Corollaire 2.2 *Soient $\mathcal{Y}$ un objet complétement réductibles de* $\mathbf{T}$*, Δ l'anneau $End(\mathcal{Y})$, $\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n$, des extensions de* $\mathbf{1}$ *par $\mathcal{Y}$ telles que $\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n$ soient Δ-linéairement indépendantes dans $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1}, \mathcal{Y})$. Alors le radical unipotent de $G_{\mathcal{E}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{E}_n}$ est isomorphe à $\omega(\mathcal{Y})^n$.*

On conclut cette seconde partie par le lien entre le degré de transcendance des solutions et la dimension du groupe de Galois mis en jeu.

2.1 Groupe de Galois d' objets complétement réductibles

Soient donc C un corps commutatif de caractéristique nulle, $\mathbf{T}$ une catégorie tannakienne neutre sur C, $\mathbf{1}$ l'objet neutre. On fixe désormais ω un foncteur fibre de $\mathbf{T}$ dans la catégorie $Vect_C$ des espaces vectoriels de dimension finie et on s'autorise à omettre l'indice ω dans les définitions qui suivent.
On désigne par $\mathcal{G} = \mathcal{G}^\omega$ le groupe proalgébrique sur C, représentant le foncteur $Aut^{\otimes}(\omega)$, par $Rep_{\mathcal{G}}$ la catégorie des représentations de $\mathcal{G}$ portées par des C-espaces vectoriels de dimension finie sur C, et par 1_C l'objet neutre de $Rep_{\mathcal{G}}$. On peut décrire les quotients de $\mathcal{G}$ de type $G_{\mathcal{M}} = Aut^{\otimes}(\omega| < \mathcal{M} >)$ de la façon suivante.

Definition 2.3 *Pour tout objet $\mathcal{M}$ de* $\mathbf{T}$*, on note $Stab(\mathcal{M})$ le sous-schéma en groupe de $\mathcal{G}$ vérifiant : pour tout $\sigma \in Stab(\mathcal{M})$, et tout $x \in \omega(\mathcal{M})$, $\sigma(x) = x$. Alors, $Stab(\mathcal{M})$ est un sous-schéma en groupes distingué de $\mathcal{G}$, et* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}) = \mathcal{G}/\mathrm{Stab}(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{G}_{\mathcal{M}}$ *est naturellement muni d'une structure de groupe algébrique sur C. On dit que* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M})$ *est le groupe de Galois de $\mathcal{M}$ relatif à ω.*

Definition 2.4 *Soit $\mathcal{X}$ un objet de* $\mathbf{T}$*. On dit que $\mathcal{X}$ est irréductible s'il n'admet pas de sous-objet propre. On dit que $\mathcal{X}$ est isotypique s'il est somme directe d'objets irréductibles isomorphes. On dit que $\mathcal{X}$ est complétement réductible s'il est somme directe d'objets irréductibles ou de façon équivalente s'il est somme directe de ses composantes isotypiques maximales (maximal étant compris au sens de l'inclusion).*

Proposition 2.5 *Soit $\mathcal{X} \in$* $\mathbf{T}$ *et $Rep_{\mathcal{G}}$ comme ci-dessus.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *$\mathcal{X}$ est complétement réductible dans* $\mathbf{T}$*.*
2. *$\omega(\mathcal{X})$ est complétement réductible dans $Rep_{\mathcal{G}}$.*
3. $\mathrm{Gal}(\mathcal{X})$ *est un groupe réductif, c'est-à-dire son radical unipotent est trivial.*
4. *Tout* $\mathrm{Gal}(\mathcal{X})$*-module est complétement réductible.*

Démonstration
Le foncteur fibre ω fournit une équivalence de catégorie entre $\mathbf{T}$ et $Rep_{\mathcal{G}}$ ([7]). L'équivalence entre 1) et 2) en découle. Les énoncés 2) et 4) sont équivalents car $\mathcal{G}$ agit sur $\omega(\mathcal{X})$ à travers $Gal(\mathcal{X})$, et si un groupe admet une représentation fidèle (ici $\omega(\mathcal{X})$) complétement réductible, toutes ses représentations sont alors complétement réductibles.
D'après [8], proposition 2.23 et remarque 2.28, p.141, un groupe algébrique G défini sur un corps quelconque de caractéristique nulle est réductif si et seulement si la catégorie Rep_G est semi-simple. Les deux dernières propriétés sont donc équivalentes.

Pour tout objet $\mathcal{Y}$ (resp. Y) d'objets de $\mathbf{T}$ (resp. de $Rep_{\mathcal{G}}$), notons $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1},\mathcal{Y})$ (resp. $Ext^1_{Rep_{\mathcal{G}}}(1_C, Y)$) le groupe des classes d'isomorphismes d'extensions de $\mathbf{1}$ (resp. 1_C) par $\mathcal{Y}$ (resp. Y). Ces groupes sont naturellement munis d'une action de C, qui en fait des C-espaces vectoriels. Plus généralement, ces groupes sont naturellement munis d'une structure de module sur $End_{\mathbf{T}}(\mathcal{Y})$ (respectivement sur $End_{Rep_{\mathcal{G}}}(Y)$).

Théorème 2.6 *Pour tout couple $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ d'objets de $\mathbf{T}$, les C-espaces vectoriels $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $Ext^1_{Rep_{\mathcal{G}}}(\omega(\mathcal{X}),\omega(\mathcal{Y}))$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration
L'isomorphisme découle de l'équivalence de catégories entre $\mathbf{T}$ et $Rep_{\mathcal{G}}$.

2.2 Groupe de Galois d'une extension simple

On reprend les hypothèses et les notations du théorème 2.1. On note de plus $G_{\mathcal{Y}} = Gal(\mathcal{Y})$ et $G_{\mathcal{U}} = Gal(\mathcal{U})$, et on pose

$$R_u = Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U}).$$

Ainsi R_u est distingué dans $G_{\mathcal{U}}$ et $G_{\mathcal{Y}}$ est isomorphe à $G_{\mathcal{U}}/R_u$. On verra au cours de la démonstration que R_u est un sous-groupe vectoriel de $G_{\mathcal{U}}$. Puisque $\mathcal{Y}$ est, par hypothèse, complétement réductible, le groupe $G_{\mathcal{U}}/R_u \simeq G_{\mathcal{Y}}$ est réductif (cf. Proposition 2.5), et R_u est donc le radical unipotent de $G_{\mathcal{U}}$.

Avant de passer à la preuve du théorème 2.1, on démontre le lemme préliminaire suivant.

Lemme 2.7 (et définition) *Soient $\mathcal{Y}$ un objet complétement réductible de $\mathbf{T}$, et $\mathcal{U}$ un objet de $\mathbf{T}$ extension de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{Y}$. L'ensemble $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathcal{Y},\mathcal{U})$ des sous-objets $\mathcal{V}$ de $\mathcal{Y}$ tel que le quotient de l'extension $\mathcal{U}$ par $\mathcal{V}$ est une extension scindée admet un plus petit élément pour l'inclusion. On l'appellera* ***l'objet minimal*** *de $\mathbf{V}(\mathcal{Y},\mathcal{U})$.*

Démonstration
Il s'agit de voir que si $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont des éléments de $\mathbf{V}$, il en est de même de leur intersection $\mathcal{W}$. Puisque $\mathcal{Y}$ est complètement réductible, , il existe trois sous-objets $\mathcal{V}'$, $\mathcal{W}'_1$, $\mathcal{W}'_2$ de $\mathcal{Y}$ tels que :

1. $\mathcal{V}_1 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}'_1$, $\mathcal{V}_2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}'_2$.
2. $\mathcal{Y} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{W}'_2 \oplus \mathcal{V}' = \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{W}'_1 \oplus \mathcal{V}' = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}'_2 \oplus \mathcal{W}'_1 \oplus \mathcal{V}$

On a :

$$Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{Y}) \simeq Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{V}_1) \times Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{W}'_2 \oplus \mathcal{V}') \text{ et} Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{Y}) \simeq Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{V}_2) \times Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{W}'_1 \oplus \mathcal{V}').$$

Comme $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont dans $\mathbf{V}$, $\mathcal{U}$ se projette de façon triviale sur $Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{W}'_2 \oplus \mathcal{V}')$ et sur $Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{W}'_1 \oplus \mathcal{V}')$. On en déduit que $\mathcal{U}$ se projette de façon triviale sur $Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{W}'_2 \oplus \mathcal{W}'_1 \oplus \mathcal{V}')$ et ainsi, que $\mathcal{W}$ est dans $\mathbf{V}$.

Pour établir le théorème 2.1, il reste donc à montrer que R_u est isomorphe au groupe vectoriel $\omega(\mathcal{V})$, où $\mathcal{V}$ est l'objet minimal de $\mathbf{V}(\mathcal{Y}, \mathcal{U})$.

Démonstration du théorème 2.1

Par hypothèse, $\mathcal{U}$ s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{i} \mathcal{U} \xrightarrow{p} \mathbf{1} \longrightarrow 0\,.$$

D'après le théorème 2.6, $\omega(\mathcal{U})$ se réalise comme extension de la représentation unité 1_C par $\omega(\mathcal{Y})$ dans la catégorie des $\mathcal{G}$-modules de dimension finie. Soit s une section C-linéaire de la suite exacte de C-espaces vectoriels

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \omega(\mathcal{Y}) \arrow[r, "\omega(i)"] & \omega(\mathcal{U}) \arrow[r, shift left, "\omega(p)"] & C \arrow[l, dotted, shift left, "s"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et posons $f = s(1) \ \in \omega(\mathcal{U})(C)$.
Considérons le morphisme de C-schémas $\zeta_{\omega(\mathcal{U})} : G_{\mathcal{U}} \to \omega(\mathcal{Y})$:

$$\forall \sigma \in G_{\mathcal{U}}, \zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma) = (\sigma - 1)f.$$

C'est un cocycle de $G_{\mathcal{U}}$ à valeurs dans $\omega(\mathcal{Y})$ dont la restriction à R_u est un morphisme de C-groupes algébriques injectif de R_u dans $\omega(\mathcal{Y})$.

Lemme 2.8 *L'image W de R_u sous $\zeta_{\omega(\mathcal{U})}$ est un sous-$G_{\mathcal{Y}}$-module de $\omega(\mathcal{Y})$.*

Démonstration
Pour tout $\sigma_1 \in G_{\mathcal{Y}}$ et $\sigma_2 \in R_u$, on a

$$\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_1 \sigma_2 {\sigma_1}^{-1}) = \sigma_1(\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_2)).$$

En effet, on a :

$$\sigma_1\zeta_{\omega(\mathcal{U})}({\sigma_1}^{-1}) = (1-\sigma)f = -\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_1), \tag{5}$$

et

$$\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1}) = \sigma_1(\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_2{\sigma_1}^{-1}))+\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_1) = \sigma_1(\sigma_2(\zeta_{\omega(\mathcal{U})}({\sigma_1}^{-1}))+\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_2))+\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_1).$$

De (5), on déduit que : $\sigma_1(\sigma_2(\zeta_{\omega(\mathcal{U})}({\sigma_1}^{-1}))) = -\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1}(\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_1))$. Or $\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1}$ est un élément de $Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$ et $\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_1)$ est dans $\omega(\mathcal{Y})$.
On en déduit que $\sigma_1(\sigma_2(\zeta_{\omega(\mathcal{U})}({\sigma_1}^{-1}))) = -\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_1)$. Ainsi $\sigma_1(\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_2)) = \zeta_{\omega(\mathcal{U})}(\sigma_1\sigma_2{\sigma_1}^{-1})$ appartient bien à W.

Proposition 2.9 *L' image sous ω de l'objet minimal de $\mathbf{V}(\mathcal{Y},\mathcal{U})$ coïncide avec l'image sous $\zeta_{\omega(\mathcal{U})}$ de R_u.*

Démonstration
Notons $\mathcal{V}$ l'objet minimal de $\mathbf{V}(\mathcal{Y},\mathcal{U})$, et V son image sous ω. Alors, $G_{\mathcal{U}}$ agit sur $\omega(\mathcal{U}/\mathcal{V})$ à travers $G_{\mathcal{Y}}$ (puisque $\mathcal{U}/\mathcal{V}$ est une extension triviale de $\mathbf{1}$ par un quotient de $\mathcal{Y}$). Donc la projection de $f = s(1)$ sur $\omega(\mathcal{U})/V$ est invariante sous R_u, et l'orbite $\{\sigma f - f;\ \sigma \in R_u\}$ est incluse dans V. Ainsi, $\zeta_{\omega(\mathcal{U})}(R_u) := W \subset V$.
Réciproquement, l'image W de R_u sous $\zeta_{\omega(\mathcal{U})}$ est, d'après le lemme 2.8, un sous-$G_{\mathcal{Y}}$-module de $\omega(\mathcal{Y})$ et est donc de la forme $\omega(\mathcal{W})$ avec $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$. Montrons que $\mathcal{W}$ est un élément de $\mathbf{V}$. Il est clair que $Stab(\mathcal{Y})$ agit trivialement sur $\omega(\mathcal{U}/\mathcal{W})$ puisque pour tout $\sigma \in R_u = Stab(\mathcal{Y})/Stab(\mathcal{U})$ et $x \in \omega(\mathcal{U})$, $\sigma(x)-x \in W = \omega(\mathcal{W})$. Donc $\omega(\mathcal{U}/\mathcal{W})$ est une représentation de $G_{\mathcal{Y}}$ et c'est une extension de 1_C par $\omega(\mathcal{Y}/\mathcal{W})$. Comme $G_{\mathcal{Y}}$ est réductif, cette extension se scinde comme extension dans la catégorie $Rep_{G_{\mathcal{Y}}}$. D'après le théorème 2.6, l'extension $\mathcal{U}/\mathcal{W}$ est donc triviale dans $Ext_{\mathbf{T}}(\mathbf{1},\mathcal{Y}/\mathcal{W})$, et $\mathcal{W} \in \mathbf{V}$, d'où $V \subset W$ par minimalité. Ceci conclut la preuve du la proposition, et du théorème 2.1.

Démonstration du corollaire 2.2
Pour toute extension $\mathcal{U}$ de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{Y}$, et tout $\alpha \in \Delta$, on désigne par $\alpha_*\mathcal{U}$ le *pushout* de $\mathcal{U}$ par α ; c'est ainsi que l'on définit la structure de Δ-module de $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1},\mathcal{Y})$.

L'extension $\mathcal{E}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{E}_n$ de $\mathbf{1}^n$ par $\mathcal{Y}^n$ et son *pull-back* $\mathcal{E} \in Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1},\mathcal{Y}^n)$ par l'application diagonale de $\mathbf{1}$ dans $\mathbf{1}^n$ engendrent dans $\mathbf{T}$ la même sous-catégorie tannakienne, et admettent donc le même groupe de Galois $G_{\mathcal{E}_1\oplus...\oplus\mathcal{E}_n} = G_{\mathcal{E}}$. Supposons que le radical unipotent de ce groupe ne remplisse pas $\omega(\mathcal{Y}^n) = \omega(\mathcal{Y})^n$ tout entier.
D'après le théorème 2.1, il existe un sous-objet $\mathcal{V}$ non trivial de $\mathcal{Y}^n$ tel que le quotient de $\mathcal{E}_1\oplus...\oplus\mathcal{E}_n$ par $\mathcal{V}$ soit une extension triviale de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{Y}^n/\mathcal{V}$. L'objet $\mathcal{Y}^n$ étant complètement réductible, il existe un élément $\phi \in Hom(\mathcal{Y}^n,\mathcal{Y})$ non nul dont le noyau $\mathcal{H}$ contienne $\mathcal{V}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y}^n \arrow[d] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \mathcal{Y}^n/\mathcal{V} \arrow[r] & \mathcal{Y}^n/\mathcal{H} \simeq \mathcal{Y}. \end{tikzcd}$$

Ecrivons $\phi(X_1, ..., X_n) = \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n$, avec $\alpha_i \in End(\mathcal{Y})$. Alors $\phi_*(\mathcal{E}) = \alpha_{1*}\mathcal{E}_1 + \alpha_{2*}\mathcal{E}_2 + ... + \alpha_{n*}\mathcal{E}_n$ est un quotient de $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ donc une extension triviale de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{Y}$.
Ainsi l'extension $\alpha_1\mathcal{E}_1 + ... + \alpha_n\mathcal{E}_n \in Ext^1(\mathbf{1}, \mathcal{Y})$ est triviale. Or les extensions $\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n$ sont Δ-linéairement indépendantes dans $Ext^1_{\mathbf{T}}(\mathbf{1}, \mathcal{Y})$, d'où la contradiction attendue.

2.3 Lien avec la transcendance

Pour préparer aux notations de la partie suivante, on désigne ici par C' le corps noté C précédemment. Rappelons qu'on ne le suppose pas algébriquement clos. Comme dans l'introduction, on considère un corps aux différences, noté cette fois (K', σ), de corps des σ-constantes $C_{K'} := C'$. On désigne par $Diff(K', \sigma)$ la catégorie des $K'[\sigma, \sigma^{-1}]$-modules de dimension finie sur K'. C'est une catégorie tannakienne C'-linéaire, qu'on suppose neutre dans l'énoncé qui suit.

Proposition 2.10 *Soit (K', σ) un corps aux différences de corps des constantes $C_{K'} = C'$ de caractéristique nulle.*
On suppose donnée une extension F de corps aux différences de K', de corps des constantes $C_F = C'$ vérifiant la propriété suivante : tout système aux σ-différences à coefficients dans K' admet une matrice fondamentale de solutions à coefficients dans F.
On note ω le foncteur fibre de $Diff(K', \sigma)$ à valeurs dans $Vect_{C'}$ correspondant.

Soit $\mathcal{M} \in Diff(K', \sigma)$ et U une matrice fondamentale de solutions à coefficients dans F. On note $G = Gal(\mathcal{M})$ le groupe de Galois de $\mathcal{M}$ relativement à ω.
Alors
$$degtr(K'(U)/K') = dim_{C'}G.$$

Démonstration
La preuve qui suit étend la démonstration de [13] p. 38 au cas d'un corps de constantes non algébriquement clos.

Notons $< \mathcal{M} >$ la catégorie tannakienne engendrée par $\mathcal{M}$ dans $Diff(K', \sigma)$, de sorte que G est le C'-groupe algébrique $Aut^{\otimes}(\omega| < \mathcal{M} >)$. Soient $M \subset \mathcal{M} \otimes_{K'} F$ le C'-espace vectoriel $\omega(\mathcal{M})$, et v un élément de $M(C')$. Alors, M est une C'-représentation de G, et nous noterons $G(v)$ l'image schématique du morphisme de G dans M attaché v (voir [21] p. 28). L'annulateur de v dans $\mathcal{M}^*$ (dual de $\mathcal{M}$) est un sous-objet $\mathcal{W}$ de $\mathcal{M}^*$ dans la catégorie $< \mathcal{M} >$, et $W := \omega(\mathcal{W})$ est un sous-G-module du C'-dual M^* de M. Comme $W \subset \mathcal{W} \otimes_{K'} F$

annule v et est G-stable, il doit annuler $G(v)$. Ainsi, W est contenu dans l'annulateur S de $G(v)$ dans V^*. Comme S est stable sous G, il lui correspond par équivalence de catégories un sous-objet $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}^*$ dans la catégorie $< \mathcal{M} >$. Comme S annule v, il en est de même de $\mathcal{S} \subset S \otimes_{C'} F$, et on a $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$. Mais $W \subset S$, donc $\mathcal{S} = \mathcal{W}$. Ainsi, la dimension sur C' de l'espace des formes linéaires sur V annulant $G(v)$ est égale à la dimension sur K' de l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{M}$ qui annulent v.
En appliquant ce résultat au vecteur $\oplus_{i \leq n} Symm^i(v)$ et à l'objet $\oplus_{i \leq n} Symm^i(\mathcal{M})$ de $< \mathcal{M} >$, on obtient que le degré de transcendance de $K'(v)$ sur K' est égale à la dimension sur C' de $G(v)$.
Enfin, appliquons ce dernier résultat à l'objet $\mathcal{M}' := \underline{Hom}(M \otimes K', \mathcal{M})$ de $< \mathcal{M} >$. Sa fibre $\omega(\mathcal{M}')$ s'identifie à $End(M)$ et G y agit par translation à gauche. La matrice fondamentale de solutions U de $\mathcal{M}$ correspond à un élément de $\omega(\mathcal{M}')$ dans $Gl(M)(C')$. Comme G agit librement sur $Gl(M)/_{C'}$, on en déduit que

$$degtr(K'(U)/K') = dim_{C'} G.$$

3 Changement de base

Dans cette troisième partie, C désigne un corps *algébriquement clos* de caractéristique nulle, et C' une extension *quelconque* de C. En particulier, on ne suppose pas que le corps C' soit algébriquement clos.

Soient (K, σ) un corps aux différences de corps des constantes C, et (K', σ) une extension aux différences de K, de corps des constantes C'. On désigne par $\mathcal{D}_K = K[\sigma, \sigma^{-1}]$ (resp. $\mathcal{D}_{K'} = K'[\sigma, \sigma^{-1}]$) l'anneau des opérateurs polynomiaux en σ et σ^{-1} à coefficients dans K (resp. K') et par $Diff(K, \sigma)$ (resp. $Diff(K', \sigma)$) la catégorie des $\mathcal{D}_K$ (resp. $\mathcal{D}_{K'}$) modules de dimension finie sur K (resp. K').
On suppose qu'il existe un foncteur fibre ω (resp. ω') de la catégorie tannakienne $Diff(K, \sigma)$ (resp. $Diff(K', \sigma)$) vers la catégorie $Vect_C$ (resp. $Vect_{C'}$) ; en d'autres termes, que chacune de ces catégories tannakiennes est neutre. Les principaux cas qui nous intéresseront sont développés dans la partie 4 (q-différences) et dans la partie 5 (τ-différences), où l'on verra que les hypothèses suivantes sont satisfaites.

Hypothèse 3.1 *1. On suppose qu'il existe un morphisme de groupes injectif i d'un sous-groupe Γ du groupe $G_C = Aut(C'/C)$ (groupe des automorphismes de C' sur C laissant C invariant) dans $G_K = Aut(K'/K)$ et on fixe un tel i. On se permet d'identifier Γ à son image $i(\Gamma)$.*

2. i fournit un prolongement de l'action naturelle de Γ sur C' à K' et on suppose que cette action commute à l'action de σ sur K' ; en particulier, C' (resp. C'^*) est un sous-Γ-module de K' (resp. K'^*).

3. *On suppose que le corps des invariants de K' sous l'action de Γ est le corps K lui-même : $K'^{\Gamma} = K$; en particulier $C'^{\Gamma} = C$.*
4. *On suppose enfin que pour tout entier $n \geq 1$, l'application naturelle $H^1(\Gamma, Gl_n(C')) \to H^1(\Gamma, Gl_n(K'))$ est injective.*

Le résultat principal de cette partie 3 sera démontré au paragraphe 3.2. Il énonce :

Théorème 3.2 *On suppose les hypothèses 3.1 satisfaites. Soit $\mathcal{Y}$ un objet de $Diff(K,\sigma)$. L'application naturelle de $Ext^1_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}, \mathcal{Y})$ dans $Ext^1_{Diff(K',\sigma)}(\mathbf{1}, \mathcal{Y} \otimes K')$ est un morphisme de groupe injectif.*

3.1 Extension du corps des constantes

On reprend les notations du début de la partie 3 et on suppose désormais que *les corps K et K' satisfont les hypothèses 3.1.*

3.1.1 Stabilité des objets complétement réductibles

Lemme 3.3 *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_K$-module irréductible. Alors le $\mathcal{D}_{K'}$-module $\mathcal{M} \otimes K'$ est complètement réductible.*

Démonstration
Notons tout d'abord que si $\mathcal{N}$ est un K-sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{N} \otimes K'$ soit stable sous σ, alors $\mathcal{N}$ l'est aussi. En effet, $\sigma(\mathcal{N} \otimes 1) \subset (\mathcal{M} \otimes 1) \cap (\mathcal{N} \otimes K') = \mathcal{N} \otimes 1$.
Avec les conventions de l'hypothèse 3.1.1, considérons l'action semilinéaire de Γ sur $\mathcal{M} \otimes K'$ définie par $\tau \to id \otimes \tau$. Soient $\mathcal{C}$ une composante isotypique maximale de $\mathcal{M} \otimes K'$ dans $Diff(K,\sigma)$ et τ un élément de Γ. Alors $\tau(\mathcal{C})$ est à nouveau une composante isotypique maximale de $\mathcal{M} \otimes K'$ car l'action de Γ et celle de σ commutent. L'ensemble des composantes isotypiques maximales de $\mathcal{M} \otimes K'$ étant de cardinal fini, l'orbite de $\mathcal{C}$ sous Γ est finie. Notons $(\tau_i(\mathcal{C}))_i$ les éléments de cette orbite ; comme ce sont des composantes isotypiques maximales, elles sont linéairement indépendantes. Posons alors $\mathcal{N}' = \bigoplus \tau_i(\mathcal{C}) = \sum_{\tau \in \Gamma} \tau(\mathcal{C})$. Le module $\mathcal{N}'$ est un sous-$\mathcal{D}_{K'}$-module de $\mathcal{M} \otimes K'$ stable sous l'action de Γ. D'après l'hypothèse 3.1.3, il est défini sur K, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{N} \otimes K'$ où $\mathcal{N}$est un K-sous espace vectoriel de $\mathcal{M}$, donc d'après la remarque préliminaire, un $\mathcal{D}_K$-sous-module de $\mathcal{M}$. Le $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{M}$ étant irréductible, $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. Donc $\mathcal{M} \otimes K' = \bigoplus \tau_i(\mathcal{C})$, somme directe de composantes isotypiques, est complétement réductible.

Corollaire 3.4 *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_K$-module complétement réductible. Alors $\mathcal{M} \otimes K'$ est un $\mathcal{D}_{K'}$-module complètement réductible.*

Démonstration
$\mathcal{M}$ est somme directe de $\mathcal{D}_K$-modules irréductibles $\mathcal{M}_i$. Donc $\mathcal{M} \otimes K' = \bigoplus \mathcal{M}_i \otimes K'$. D'après le lemme 3.3, $\mathcal{M}_i \otimes K'$ est complétement réductible, donc somme directe de $\mathcal{D}_{K'}$-modules irréductibles $\mathcal{M}_i^j$. Donc $\mathcal{M} \otimes K' = \bigoplus \mathcal{M}_i^j$ est bien somme directe d'objets irréductibles de $Diff(K', \sigma)$.

3.1.2 Compatibilité des Hom

Definition 3.5 *Soit $\mathcal{M}$ un objet de $Diff(K, \sigma)$. On dit que $\mathcal{M}$ est trivial sur K s'il est isomorphe à une somme directe de copies de $\mathbf{1}$. Tout objet $\mathcal{M}$ admet un plus grand sous-objet $\mathcal{N}$ trivial sur K, et l'on a : $\mathcal{N} \simeq Hom(\mathbf{1}, \mathcal{M}) \otimes_C K$.*

On montre dans ce paragraphe que sous les hypothèses 3.1, le plus grand sous-objet de $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \otimes_K K'$ trivial sur K' (c'est-à-dire au sens de $Diff(K', \sigma)$) provient par extension des scalaires de K à K' du plus grand sous-objet de $\mathcal{M}$ trivial sur K ou, de façon équivalente, que $Hom(\mathbf{1}, \mathcal{M}) \otimes_C C' = Hom(\mathbf{1}, \mathcal{M}')$. De façon générale, on peut énoncer :

Lemme 3.6 *On suppose que les hypothèses 3.1 sont satisfaites. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux objets de $Diff(K, \sigma)$. Alors :*

$$Hom_{Diff(K,\sigma)}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \otimes_C C' \simeq Hom_{Diff(K',\sigma)}(\mathcal{A} \otimes_K K', \mathcal{B} \otimes_K K')$$

Démonstration
Posant $\mathcal{V} = \underline{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, on se ramène à prouver que l'application naturelle ι de $Hom_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}, \mathcal{V}) \otimes_C C'$ dans $Hom_{Diff(K',\sigma)}(\mathbf{1} \otimes_K K', \mathcal{V} \otimes_K K')$, qui est une injection C'-linéaire, est également surjective.
Notons ϕ_σ l'action de σ sur $\mathcal{V}$ et posons

$$N' = Hom_{Diff(K',\sigma)}(\mathbf{1} \otimes_K K', \mathcal{V} \otimes_K K') = \{g \in \mathcal{V} \otimes K' \text{ tels que } \phi_\sigma(g) = g\},$$

de sorte que $\mathcal{N}' = N' \otimes K'$ le plus grand sous-objet de $\mathcal{V} \otimes_K K'$ trivial sur K'. Comme Γ et σ commutent, $\mathcal{N}'$ est de plus un sous-module de $\mathcal{V} \otimes K'$ stable sous l'action de Γ. D'après l'hypothèse 3.1.3, $\mathcal{N}'$ est donc défini sur K, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{N} \otimes_K K'$, où $\mathcal{N}$ un sous-$\mathcal{D}_K$-module de $\mathcal{V}$. On a :

$$\mathcal{N}'^{\phi_\sigma} = N' = (\mathcal{N} \otimes_K K')^{\phi_\sigma}$$

Soient n la dimension de $\mathcal{N}$ sur K, et $\sigma(Y) = RY$ $(*)$ une équation aux différences représentant $\mathcal{N}$ avec $R \in Gl_n(K)$. Par définition de N', il existe une matrice fondamentale

$U \in Gl_n(K')$ de solutions de $(*)$.
Pour tout $\tau \in \Gamma$, $\tau(U)$ est une solution de $(*)$. Ainsi :

$$\forall \tau \in \Gamma,\ \exists R_\tau \in Gl_n(C') \text{ tel que } \tau(U) = UR_\tau.$$

Il est clair que $\tau \mapsto R_\tau$ est un cocycle de Γ à valeur dans $Gl_n(C')$, trivial dans $H^1(\Gamma, Gl_n(K'))$.

D'après l'hypothèses 3.1.4 : $H^1(\Gamma, Gl_n(C')) \hookrightarrow H^1(\Gamma, Gl_n(K'))$, il existe donc un élément β de $Gl_n(C')$ tel que pour tout élément τ de Γ, $B_\tau = \beta^{-1}\tau(\beta)$. Alors :

$$\forall \tau \in \Gamma, \tau(U\beta^{-1}) = U\beta^{-1}.$$

Donc $U\beta^{-1}$ est un élément de $Gl_n(K)$ solution de $(*)$. En d'autres termes, il existe un C-sous-espace vectoriel N de dimension n de $Hom_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}, \mathcal{V})$ tel que $N' = N \otimes_C C'$. Ainsi, $\mathcal{N} = N \otimes_C K$ est un sous-module de $\mathcal{V}$ trivial sur K. Comme ι est injective et que $N' = Hom_{Diff(K',\sigma)}(\mathbf{1} \otimes_K K', \mathcal{V} \otimes_K K')$ est lui-même de dimension n sur C', on a nécessairement $N = Hom_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}, \mathcal{V})$. La relation $N \otimes_C C' = N'$ exprime alors la surjectivité de l'application ι.

3.2 Injection des groupes d'extensions

3.2.1 Démonstration du théorème 3.2

Soit $0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{i} \mathcal{U} \xrightarrow{p} \mathbf{1} \longrightarrow 0$ une extension de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{X}$ dans la catégorie $Diff(K, \sigma)$. On note ϕ_σ l'action de σ sur $\mathcal{U}$.
Dire que l'extension $\mathcal{U}$ se trivialise dans K' (c'est-à-dire qu'elle appartient au noyau de l'application naturelle de $Ext^1_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}, \mathcal{Y})$ dans $Ext^1_{Diff(K',\sigma)}(\mathbf{1}, \mathcal{Y} \otimes K')$) signifie qu'il existe un élément $f \in \mathcal{U} \otimes K'$ tel que

$$\phi_\sigma(f) = f \text{ et } p(f) \neq 0. \tag{6}$$

Posons $N' = \{g \in \mathcal{U} \otimes K' \text{ tels que } \phi_\sigma(g) = g\}$, de sorte que $\mathcal{N}' = N' \otimes K'$ est le plus grand sous-objet de $\mathcal{U} \otimes K'$ trivial sur K'. D'après le lemme 3.6, $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \otimes K'$, où $\mathcal{N}$ est le plus grand sous-objet de $\mathcal{U}$ trivial sur K.

Ainsi, l'existence d'un élément $f \in \mathcal{N}'$ tel que $p(f) \neq 0$ et $\phi_\sigma(f) = f$ assure l'existence d'un élément g de $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}$ tel que $p(g) \neq 0$ et $\phi_\sigma(g) = g$. L'extension $\mathcal{U}$ est donc alors triviale dans $Ext^1_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}, \mathcal{Y})$.

3.2.2 Illustrations

Joint au théorème 3.2, le corollaire 2.2, appliqué à la catégorie $Diff(K', \sigma)$, entraîne immédiatement :

Corollaire 3.7 *Soient $\mathcal{Y}$ un objet complétement réductible de $Diff(K, \sigma)$, Δ l'anneau $End(\mathcal{Y})$ et $\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n$ des extensions de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{Y}$, qu'on suppose Δ-linéairement indépendantes dans $Ext^1_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}, \mathcal{Y})$. Alors le radical unipotent de $G_{(\mathcal{E}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{E}_n) \otimes K'}$ est isomorphe à $(\omega(\mathcal{Y}) \otimes C')^n$.*

Voici une illustration concrète de la façon de vérifier les hypothèses de ce corollaire. Rappelons que pour $\mathcal{Y} = \mathbf{1}$, on a $End_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}) = C$ et $End_{Diff(K',\sigma)}(\mathbf{1}) = C'$.

Proposition 3.8 *Soient $b_1, ..., b_n$ des éléments de K, et pour tout $i = 1, ..., n$, $\mathcal{E}_i$ l'extension de $\mathbf{1}$ par $\mathbf{1}$ dans la catégorie $Diff(K, \sigma)$, de représentation matricielle donnée par $\begin{pmatrix} 1 & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) les extensions $\mathcal{E}_i$ sont C-linéairement indépendantes dans $Ext^1_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$;

ii) les éléments b_i sont C-linéairement indépendants modulo $(\sigma_q - id)(K)$;

iii) les extensions $\mathcal{E}_i \otimes K'$ sont C'-linéairement indépendantes dans $Ext^1_{Diff(K',\sigma)}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$;

iv) le groupe de Galois $G_{(\mathcal{E}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{E}_n) \otimes K'}$ est isomorphe à $\mathbf{G}_a^n/_{C'}$.

Plus généralement, soit δ la dimension du C-sous espace vectoriel engendré par $b_1, ..., b_n$ dans $K/(\sigma - 1)(K)$. Alors, $G_{(\mathcal{E}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{E}_n) \otimes K'} \simeq \mathbf{G}_a^\delta/_{C'}$.

Démonstration

L'équivalence de (i) et (iii) résulte du théorème 3.2. Pour celle de (i) et (ii), noter que pour tout n-uplet $\alpha_1, ..., \alpha_n$ d'éléments de C, l'extension $\alpha_1 \mathcal{E}_1 + ... + \alpha_n \mathcal{E}_n$ admet pour représentation matricielle $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $b = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n$. Une telle extension correspond à l'équation aux différences non homogène $\sigma y - y = b$, et est triviale dans $Ext^1_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ si et seulement si b appartient à l'image de K sous l'opérateur $\sigma - 1$.
Puisque $\mathcal{Y} = \mathbf{1}$ est ici trivial, le groupe de Galois $G_{(\mathcal{E}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{E}_n) \otimes K'}$ coïncide avec son radical unipotent, et l'implication (i) (ou (iii)) $\Rightarrow$ (iv) découle du corollaire 3.7. La réciproque se déduit de l'énoncé plus précis fourni par la proposition 2.9.
Soit enfin $\{b_{i_1}, ..., b_{i_\delta}\}$ un système maximal extrait de $\{b_1, ..., b_n\}$ et formé d'éléments C-linéairement indépendants modulo $(\sigma - 1)(K)$. Alors, $\mathcal{E}_{i_1} \oplus ... \oplus \mathcal{E}_{i_\delta}$ engendre la sous-catégorie $< \mathcal{E}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{E}_n >$ de $Diff(K, \sigma_q)$, et la dernière assertion découle des équivalences précédentes, appliquées à ces δ extensions.

3.3 Comparaison des groupes de Galois aux différences

Ce paragraphe ne sera pas utilisé par la suite. On y donne une nouvelle démonstration du corollaire 3.7, par le biais d'un énoncé plus intrinsèque (théorème 3.9), qui permet de limiter les calculs des radicaux unipotents R_u des groupes de Galois à ceux de la catégorie **T**. Ce théorème 3.9 est, pour l'essentiel, un cas particulier du théorème de comparaison général établi dans [6], en vertu duquel, pour tout objet $\mathcal{M}$ de $Diff(K,\sigma)$ et tout couple de foncteurs fibres ω, ω' de $Diff(K,\sigma), Diff(K',\sigma)$ sur C, C' (notations du début du paragraphe 3), on a, sous certaines conditions sur l'extension K'/K :

$$Aut^{\otimes}(\omega| < \mathcal{M} >) \otimes_C \overline{C'} \simeq Aut^{\otimes}(\omega'| < \mathcal{M} \otimes K' >) \otimes_{C'} \overline{C'} \tag{7}$$

où $\overline{C'}$ désigne une clôture algébrique de C'.

On se place maintenant sous les hypothèses 3.1.

Théorème 3.9 *On suppose que les hypothèses 3.1 sont satisfaites. Soient $\mathcal{Y}$ un objet complétement réductible de $Diff(K,\sigma)$ et $\mathcal{U}$ une extension dans $Diff(K,\sigma)$ de* **1** *par $\mathcal{Y}$. Alors*

$$R_u(Aut^{\otimes}(\omega| < \mathcal{U} >)) \otimes C' \simeq R_u(Aut^{\otimes}(\omega'| < \mathcal{U} \otimes K' >)).$$

Grâce à cet énoncé, le corollaire 3.7 devient une conséquence immédiate du corollaire 2.2, appliqué cette fois à la catégorie $Diff(K,\sigma)$: en effet, selon ce dernier, $R_u(G_{\mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_n}) \simeq \omega(\mathcal{Y})^n$; le théorème 3.9 entraîne alors que $R_u(G_{(\mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_n) \otimes K'}) \simeq \omega(\mathcal{Y})^n \otimes C'$.

Remarque 3.10 *La principale hypothèse sur K'/K faite dans [6] est que $K' = K(C')$; tout comme les hypothèses 3.1, cette hypothèse sera remplie dans les exemples des parties 4 et 5. On notera par ailleurs que la comparaison des groupes de Galois de [6] impose de passer à la clôture algébrique de C'. Dans le cas des groupes unipotents, on peut toutefois, en utilisant la proposition* 14.2.7 *de [21], redescendre l'isomorphisme (7) jusqu'à C'.*

Démonstration du théorème 3.9
D'après le théorème 2.1, le radical unipotent du groupe de Galois de $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U} \otimes K'$) est égal au groupe vectoriel $\omega(\mathcal{V})$ (resp. $\omega'(\mathcal{V}')$), où $\mathcal{V}$ (resp.$\mathcal{V}'$) est le plus petit sous-objet de $\mathcal{Y}$ dans $Diff(K,\sigma)$ (resp. de $\mathcal{Y} \otimes K'$ dans $Diff(K',\sigma)$) possédant la propriété suivante : le quotient de l'extension $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U} \otimes K'$) par $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}'$) est une extension scindée. On en déduit que le quotient de l'extension $\mathcal{U} \otimes K'$ par $\mathcal{V} \otimes K'$ dans la catégorie $Diff(K',\sigma)$ est une extension scindée. Par conséquent, $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \otimes K'$.

Réciproquement, considérons l'action semilinéaire de Γ ($\tau \rightarrow id \otimes \tau$) sur $\mathcal{U} \otimes K'$. Cette action permute les sous $\mathcal{D}_{K'}$-modules de $\mathcal{U} \otimes K'$. Soit $\tau \in \Gamma$. Le quotient de l'extension $\mathcal{U} \otimes K'$ par $\tau(\mathcal{V}')$ est une extension scindée. Donc $\mathcal{V}' \subset \tau(\mathcal{V}')$ pour tout $\tau \in \Gamma$; comme les dimensions sur K' de ces deux modules sont égales, on a $\tau(\mathcal{V}') = \mathcal{V}'$. L'hypothèse 3.1.3

entraîne alors que $\mathcal{V}'$ est défini sur K, et il existe un sous $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{W}$ de $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{V}' = \mathcal{W} \otimes K'$. En particulier, l'extension $(\mathcal{U} \otimes K')/\mathcal{V}'$ de $\mathbf{1}$ par $(\mathcal{Y} \otimes K')/\mathcal{V}'$ se déduit par changement de base de K à K' de l'extension $\mathcal{U}/\mathcal{W}$ de $\mathbf{1}$ par $\mathcal{Y}/\mathcal{W}$, et on déduit du théorème 3.2 que cette dernière est scindée dans la catégorie $Diff(K, \sigma)$. Ainsi $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$.

On a donc
$$\mathcal{V}' = \mathcal{W} \otimes K' = \mathcal{V} \otimes K'.$$
D'après le théorème 2.1, $R_u(Aut^{\otimes}(\omega| < \mathcal{U} >)) \simeq \omega(\mathcal{V})$ et $R_u(Aut^{\otimes}(\omega'| < \mathcal{U} \otimes K' >)) \simeq \omega'(\mathcal{V}') = \omega'(\mathcal{V} \otimes K')$. Comme $\omega(\mathcal{V}) \otimes C'$ et $\omega'(\mathcal{V} \otimes K')$ ont même dimension sur C', cela termine la démonstration du théorème 3.9.

4 Hypertranscendance des solutions d'équations aux q-différences

Soit $q \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe de module différent de 1. On désigne par $K = \mathbb{C}(z)$ le corps des fractions rationelles à coefficients complexes, par $F = \mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ et par σ_q l'automorphisme de F qui à $f(z) \in F$ associe $f(qz)$. Comme dans l'introduction, on note C_E l'ensemble des fonctions de F fixées par σ_q, et $K_E = C_E(z)$ le compositum de C_E et de K dans F. Les corps K, F et K_E sont des corps aux différences relativement à σ_q, admettant respectivement pour corps des σ_q-constantes $\mathbb{C}, C_E$ et C_E, et C_E s'identifie au corps des fonctions rationnelles sur la courbe elliptique $E = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$.

On désigne par $\mathcal{D}_K = K[\sigma_q, {\sigma_q}^{-1}]$ (resp. $\mathcal{D}_{K_E} = K_E[\sigma_q, {\sigma_q}^{-1}]$) l'anneau des opérateurs polynomiaux en σ_q et ${\sigma_q}^{-1}$ à coefficients dans K (resp. dans K_E), et par $Diff(K, \sigma_q)$ (resp. $Diff(K_E, \sigma_q)$) la catégorie tannakienne $\mathbb{C}$-linéaire (resp. C_E-linéaire) des $\mathcal{D}_K$ (resp. $\mathcal{D}_{K_E}$) modules de dimension finie sur K (resp. K_E).

Dans [20], M.F. Singer et M. van der Put construisent un foncteur fibre ω de la catégorie $Diff(K, \sigma_q)$ à valeur dans la catégorie $Vect_{\mathbb{C}}$ des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Ce foncteur fibre attache à tout module aux q-différences $\mathcal{M}$ sur K une $\mathbb{C}$-base de solutions symboliques et munit $Diff(K, \sigma_q)$ d'une structure de catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{C}$.

Dans [17], C. Praagman démontre que toute équation aux q-différences à coefficients méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ admet une C_E-base de solutions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$. Ceci permet de construire un foncteur fibre ω_E de $Diff(K_E, \sigma_q)$ à valeur dans $Vect_{C_E}$, qui attache à tout module aux q-différences sur K_E le C_E-espace vectoriel de ses solutions dans $F = \mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ et de munir $Diff(K_E, \sigma_q)$ d'une structure de catégorie tannakienne neutre sur le corps (non algébriquement clos) C_E. Comme on l'a dit au début de l'article, c'est ce foncteur fibre que nous privilégierons, car contrairement à celui de [20], il conduit naturellement à des extensions de corps aux différences *différentiels*.

Plus précisément, l'automorphisme σ_q et la dérivation $\partial = zd/dz$ munissent le corps $F = \mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ et ses sous-corps K_E et K de structures de corps aux différences différentiels, puisque $\sigma_q\partial = \partial\sigma_q$ (en effet, pour tout $f \in F$, on a $\sigma_q\partial f(z) = \sigma_q(z\frac{d}{dz}(f(z)) = qz\frac{d}{dz}(f)(qz) = z(\frac{d}{dz}f)(qz)) = \partial\sigma_q f(z)$). Il en est de même du sous-corps de F engendré sur K_E par toutes les dérivées $\partial^m Y, m \geq 0$ de la solution Y de l'équation (1) considérée dans l'introduction. À l'exception de K, ces corps admettent chacun C_E comme corps de σ_q-constantes. L'accent portera donc ici sur le corps aux différences différentiel $(K_E := C_E(z), \sigma_q, \partial = z\frac{d}{dz})$, et sur la catégorie $Diff(K_E, \sigma_q)$. En particulier, les groupes de Galois aux différences $G = Gal_{\omega_E}$ calculés plus bas sont relatifs au foncteur fibre ω_E de Praagman, et sont donc des groupes algébriques sur C_E.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1.1. On démontrera ce théorème dans le cadre particulier d'un objet de $Diff(K_E, \sigma_q)$ de rang 1 au théorème 4.12 et dans son cadre ; :m général au théorème 4.18.

Notations 4.1 *Si $\mathcal{M}$ est un objet de $Diff(K, \sigma_q)$, on notera $\mathcal{M}_E = \mathcal{M} \otimes_K K_E$ l'objet de $Diff(K_E, \sigma_q)$ qu'on en déduit par changement de base, et $Gal_{\omega_E}(\mathcal{M})$ le groupe de Galois de $\mathcal{M}_E$ relativement au foncteur fibre ω_E. Enfin, on notera $K_E(\mathcal{M})$ le corps de définition des éléments de $\omega_E(\mathcal{M}_E) \subset \mathcal{M}_E \otimes_{K_E} F$ relativement à la K_E-structure de $\mathcal{M}_E$, c'est-à-dire le corps de définition noté $K_E(U)$ à la proposition 2.10 d'une matrice fondamentale de solutions U de $\mathcal{M}_E$ dans F.*

4.1 Vérification des hypothèses 3.1

On se propose de vérifier ces hypothèses pour le couple de corps aux différences formé de $K = \mathbb{C}(z)$ et de son extension $K' = K_E = C_E(z)$. On note $G_E = \mathrm{Aut}(C_E/\mathbb{C})$ (resp. $G_K = Aut(K_E/K)$) le groupe des automorphismes de l'extension $C_E/\mathbb{C}$ (resp. K_E/K), et $C_E(X)$ le corps des fractions rationnelles en une variable à coefficients dans C_E. Pour tout élément a de $E(\mathbb{C})$, la translation par a définit un automorphisme de la courbe E ; on note $\gamma_a \in G_E$ l'automorphisme correspondant de l'extension $C_E/\mathbb{C}$, ainsi que son prolongement canonique au corps $C_E(X)$, défini par son action sur les coefficients. L'ensemble $\Gamma = \{\gamma_a, a \in E(\mathbb{C})\}$ forme un sous-groupe de G_E, isomorphe à $E(\mathbb{C})$.

Lemme 4.2 *Avec ces notations,*

1. *il existe un isomorphisme canonique ϕ de $C_E(X)$ sur K_E, induisant un isomorphisme de $\mathbb{C}(X)$ sur K ;*

2. *soit a un point de la courbe elliptique E. Par transport de structure par ϕ, l'automorphisme γ_a de $C_E(X)$ définit un automorphisme g_a de l'extension K_E/K, et l'application $i : \gamma_a \mapsto g_a$ est un homomorphisme injectif de Γ dans G_K ;*
3. *$C_E^\Gamma = \mathbb{C}$, et $K_E^\Gamma = K$;*
4. *l'application naturelle $H^1(\Gamma, Gl_n(C_E)) \to H^1(\Gamma, Gl_n(K_E))$ est injective ;*
5. *l'action de Γ sur K_E commute à celle de σ_q.*

Démonstration

1. Pour tout $f(X) \in C_E[X]$, posons $\phi(f) = f(z)$, vu comme une fonction méromorphe en $z \in \mathbb{C}^*$. Alors , ϕ est un morphisme de $C_E[X]$ sur K_E. Par ailleurs, les sous-corps C_E et $\mathbb{C}(z)$ de F sont linéairement disjoints sur $\mathbb{C}$ (voir [10], p. 5). Par conséquent, toute relation de dépendance dans $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$:
$$\sum c_i(z)k_i(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}^* \tag{8}$$
avec $c_i \in C_E$ et $k_i \in K$ entraîne :
$$\sum c_i(z)k_i(X) = 0, \forall z \in \mathbb{C}^*. \tag{9}$$
L'application ϕ est donc injective. Ainsi, ϕ s'étend au corps des fractions $C_E(X)$, et son image est K_E tout entier. Remarquons que, par définition de ϕ, $\mathbb{C}(X)$ s'envoie isomorphiquement sur K.

2. Ceci découle de la définition de l' action de Γ sur K_E. Comme Γ agit trivialement sur $\mathbb{C}(X)$, son action sur K est aussi triviale.

3. Une fonction elliptique invariante par toutes les translations est constante, donc $C_E^\Gamma = \mathbb{C}$. Par conséquent, $C_E(X)^\Gamma = \mathbb{C}(X)$, et $K_E^\Gamma = K$.

4. Soit $a \mapsto c_a$ un cocycle de $\Gamma \simeq E(\mathbb{C})$ à valeurs dans $Gl_n(C_E)$ trivial dans $H^1(\Gamma, Gl_n(K_E))$. Alors, il existe
$$A(z) = (P_{i,j}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{n_{i,j}} c_{i,j}^k(z) z^k}{\sum_{k=0}^{n'_{i,j}} c'^k_{i,j}(z) z^k})_{i,j}$$
avec $c_{i,j}^k, d_{i,j}^k, c'^k_{i,j}, d'^k_{i,j} \in C_E$, et $A(z) \in Gl_n(K_E)$ tels que :
$$\forall a \in E(\mathbb{C}), c_a(z) = A(z)^{-1} A(az). \tag{10}$$
Posons
$$P_{i,j}(z, X) = \frac{\sum_{k=0}^{n_{i,j}} c_{i,j}^k(z) X^k}{\sum_{k=0}^{n'_{i,j}} c'^k_{i,j}(z) X^k}$$

et $A(z,X) = (P_{i,j}(z,X))_{i,j} \in GL_n(C_E(X))$
L'application ϕ étant injective, la relation (10) implique que :

$$\forall a \in E(\mathbb{C}),\ c_a(z) = A(z,X)^{-1}A_2(az,X). \tag{11}$$

Les fractions rationnelles $P_{i,j}(z,X), det(A(z,X)) \in C_E(X)$ n'ayant qu'un nombre fini de zéros et de pôles, il existe un nombre complexe t_0 tel que pour tout i,j, et tout a dans $E(\mathbb{C})$,

$$P_{i,j}(az,t_0), det(A(az,t_0)) \neq 0,\ \infty \text{ dans } C_E.$$

L'action de g_a sur $K_E \simeq C_E(X)$ commutant avec la spécialisation en t_0, on déduit que

$$\forall a \in E(\mathbb{C}), c_a(z) = A(z,t_0)^{-1}A(az,t_0). \tag{12}$$

Cette dernière relation exprime que le cocycle c_a est un cobord à valeurs dans $Gl_n(C_E)$, ce qui termine la démonstration.

5. Soit k un entier naturel et $f(X) = cX^k$ avec $c \in C_E$. Alors

$$\tau(\sigma(f)) = \tau(cq^kX^k) = \tau(c)q^kX^k = \sigma(\tau(f))$$

pour tout $\tau \in \Gamma$. Ainsi, l'action de Γ commute avec σ sur $C_E[X]$. Ces deux actions commutent donc sur $C_E(X) \simeq K_E$.

Extension des scalaires et q-différences

Le couple (K,K_E) vérifie les hypothèses de la partie 3. On peut donc appliquer le théorème 3.2 au cas des q-différences. On obtient, en reprenant les notations 4.1 :

Théorème 4.3 *Soit $\mathcal{Y}$ un objet de $Diff(K,\sigma_q)$. L'application naturelle de $Ext^1_{Diff(K,\sigma_q)}(\mathbf{1},\mathcal{Y})$ dans $Ext^1_{Diff(K_E,\sigma_q)}(\mathbf{1},\mathcal{Y}_E)$ est un morphisme de groupe injectif.*

De même la proposition 3.8 entraîne, pour les groupes de Galois attachés au foncteur fibre ω_E de $Diff(K_E,\sigma_q)$:

Corollaire 4.4 *Soient $b_1,...,b_n$ des éléments de K, et pour tout $i = 1,...,n$, $\mathcal{E}_i$ l'extension de $\mathbf{1}$ par $\mathbf{1}$ dans la catégorie $Diff(K,\sigma)$, de représentation matricielle donnée par $\begin{pmatrix} 1 & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors le groupe de Galois $G_{\omega_E}(\mathcal{E}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{E}_n)$ est isomorphe à $\mathbf{G}_a^\delta/_{C_E}$, où δ désigne la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $b_1,...,b_n$ dans $K/(\sigma_q-1)(K)$. .*

4.2 Equations du premier ordre

Definition 4.5 *Soit $a \in K^* = \mathbb{C}(z)^*$. On dira que a est standard ([20] chap.2) si, pour tout $c \in \mathbb{C}^*$ dans le support du diviseur de a, et tout entier m non nul, $q^m c$ n'apparaît pas dans le diviseur de a.*

Lemme 4.6 *Soit a un élément de K^*.*

1. *Il existe un couple $(g, \overline{a})$, avec $g \in K^*$ et $\overline{a}$ standard, tel que $a = \overline{a}\frac{\sigma_q(g)}{g}$. Une telle décomposition est dite forme standard de a.*
2. *Soient f (resp. $\overline{f}$) une solution méromorphe sur $\mathbb{C}^*$ de $\sigma_q(f) = af$ (resp. $\sigma_q(\overline{f}) = \overline{a}\overline{f}$). Pour tout $n \geq 0$, les corps $K(\partial^i(f); 0 \leq i \leq n)$ et $K(\partial^i(\overline{f}); 0 \leq i \leq n)$ coïncident.*

Démonstration
Pour le premier point, voir [20] qui le traite dans le cadre des τ-différences.La démonstration est la même pour les q-différences. Le deuxième résulte du fait que l'élément g induit des changements de jauges rationnels entre les systèmes itérés par dérivation relatifs à a et à $\overline{a}$.

Remarque 4.7 *Supposons que $|q| < 1$. Si on se restreint aux fonctions a sans zéro ni pôle en 0, il en sera de même de $\overline{a}$. Si on impose alors au support du diviseur de $\overline{a}$ d'appartenir à la couronne $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}^*, q < |z| \leq 1\}$, la décomposition de a sous forme standard est unique. En revanche si o appartient au support du diviseur de a, la relation $\frac{\sigma_q(z^n)}{z^n} = q^n$ montre que $\overline{a}$ ne peut être défini défini qu'à multiplication par un élément de $q^{\mathbb{Z}}$.*

Lemme 4.8 *Soit $a \in K^*$. S'il existe un entier $n \neq 0$, un élément $h \in K^*$ et un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}^*$ tels que $a^n = \mu\frac{\sigma_q h}{h}$. Alors il existe un élément $g \in K^*$ et un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $a = \lambda\frac{\sigma_q g}{g}$ et $\lambda^n \in \mu q^{\mathbb{Z}}$.*

Démonstration
Il suffit d'écrire les factorisations de h et de a en monômes, la relation sur a^n, de comparer les deux formes standards de a^n auxquelles on aboutit et d'appliquer enfin la remarque 4.7.

Definition 4.9 *Soient $a \in \mathbb{C}(z)^*$. On appelle diviseur elliptique de a l'image $div_E(a)$ de la partie première à 0 du diviseur de a par l'application naturelle de $Div(\mathbb{C}^*)$ dans $Div(E) = Div(\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}})$.*

Autrement dit, si $a(z) = \lambda z^r \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*}(z-\alpha)^{n_\alpha}$, on a $div_E(a) = \sum_{\overline{\alpha} \in \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}}(\sum_{\alpha \equiv \overline{\alpha}} n_\alpha).(\overline{\alpha})$. En écrivant a sous forme standard (lemme 4.6), on voit que :

Lemme 4.10 *Soient $a \in \mathbb{C}(z)^*$. Alors $div_E(a) = 0$ si et seulement si il existe un entier r, un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}$ et $h \in K^*$ tel que $a = \mu z^r \frac{\sigma_q(h)}{h}$.*

4.2.1 Solutions algébriques

Proposition 4.11 *Soit $a \in K^*$ et soit $f \in \mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ une solution non nulle de l'équation $\sigma_q(y) = ay(*)$. Alors, f est algébrique sur K_E si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ d'ordre fini dans $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ et $g \in K^*$ tels que $a(z) = \lambda\frac{\sigma_q(g)}{g}$.*

Démonstration
Considérons le $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{A}$ de rang 1 associé à l'équation $(*)$, et le $\mathcal{D}_{K_E}$-module $\mathcal{A}_E = \mathcal{A} \otimes K_E$. Soit $G = Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$ le groupe de Galois de $\mathcal{A}_E$ relatif à ω_E, et $\rho : G \rightarrow \mathbf{G}_m/_{C_E}$ la représentation correspondante, de degré 1, de G. Si $\rho(G)$ est un sous groupe propre de $\mathbf{G}_m$, alors il existe une entier $n \neq 0$ tel que

$$\rho^{\otimes n}(G) \simeq Gal_{\omega_E}(\mathcal{A}^{\otimes n}) = \{1\}$$

Par équivalence de catégories, le $\mathcal{D}_{K_E}$-module $\mathcal{A}_E^{\otimes n}$ est donc trivial sur K_E (voir aussi [1] lemme 3.2.1.4). D'après le lemme 3.6, $\mathcal{A}^{\otimes n}$ est alors trivial sur K, et il existe $g \in K$ tel que

$$a^n = \frac{\sigma_q(g)}{g}. \tag{13}$$

Le lemme 4.8 permet alors de conclure.
Réciproquement, s'il existe un tel couple $(\lambda \in \mathbb{C}^*, l \in K^*)$, alors $a^n = q^r \frac{\sigma_q(l^n)}{l^n} = \frac{\sigma_q(l^n z^r)}{l^n z^r}$, et $\mathcal{A}^{\otimes n}$ est trivial dans $Diff(K, \sigma)$. Les solutions de $\sigma_q(y) = ay$ vérifient donc $y^n \in K.C_E$, et sont bien algébriques sur K_E.

4.2.2 Hypertranscendance des solutions d'équations d'ordre 1

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 1.1, ou plus exactement, de la version plus précise qu'il en sera donné plus bas (théorème 4.18), jointe à la remarque 4.19. Nous en détaillons néanmoins la démonstration car plusieurs de ses arguments seront repris dans la preuve du théorème général.

Théorème 4.12 *Soit a un élément de $K^* = \mathbb{C}(z)^*$ et f une solution non nulle dans $\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*)$ de l'équation aux q-différences $\sigma_q(f) = af$. Alors*

1. *f et ∂f sont algébriquement dépendantes sur $C_E(z)$ si et seulement si a est de la forme $\mu\sigma_q(g)/g$, où $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $g \in \mathbb{C}(z)^*$.*
2. *f, ∂f et $\partial^2 f$ sont algébriquement dépendantes sur $C_E(z)$ si et seulement si a est de la forme $\mu z^r \sigma_q(g)/g$, $\mu \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{Z}$ et $g \in \mathbb{C}(z)^*$.*
3. *Dans les autres cas, f est hypertranscendante sur $C_E(z)$.*

Si f est algébrique sur K_E, la proposition 4.11 montre que a satisfait bien la condition du point 1) (avec μ d'ordre fini dans $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$). Sans perte de généralité, on peut donc désormais supposer que f est transcendante sur K_E.

Soit n un entier ≥ 1. Notons t_n le degré de transcendance du corps $L_n = K_E(f, \partial f, ..., \partial^n f)$ sur K_E, et δ_n la dimension du $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par $\frac{\partial a}{a}, \partial(\frac{\partial a}{a}), ..., \partial^{n-1}(\frac{\partial a}{a})$ dans $K/(\sigma_q - 1)(K)$.

Lemme 4.13 *On suppose f transcendante sur K_E. Alors, $t_n = \delta_n + 1$.*

Démonstration
On se réfère aux notations 4.1 pour la définition de $K_E(\mathcal{M})$.
Soit f une solution non nulle de l'équation $\sigma_q(f) = af$, $\mathcal{A}$ le $\mathcal{D}_K$-module correspondant, et $\mathcal{M}(n)$ l'objet de $Diff(K, \sigma_q)$ de représentation matricielle $M(n)$

$$\begin{pmatrix} a & n\partial a & \frac{n(n-1)}{2}\partial^2 a & ... & ... & \partial^n(a) \\ 0 & a & (n-1)\partial a & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\partial^2 a & ... & \partial^{n-1}(a) \\ 0 & 0 & a & ... & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \ddots & ... & \vdots \\ 0 & ... & ... & ... & a & \partial a \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Une matrice fondamentale de solutions $U(n)$ en est donnée par

$$\begin{pmatrix} f & \cdots & \cdots & \partial^k f & \cdots & \partial^{n-1} f & \partial^n f \\ 0 & f & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & C_{n-r}^{n-k-r}\partial^{k-r} f & ... & \cdots & \partial^{n-r} f \\ 0 & ... & ... & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & f & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & ... & \ddots & \cdots & \partial^2 f \\ 0 & ... & ... & ... & ... & f & \partial f \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 & f \end{pmatrix} \tag{15}$$

En effet, Pour tout couple d'entiers (k, r), on a $\sigma_q(\partial^{n-k-r} f) = \sum_{l=0}^{n-k-r} C_{n-k-r}^l \partial^l a \partial^{n-k-r-l} f$.
De plus,

$$M(n)U(n)_{(r,k)} = \sum_{l=0}^{n-r} C_{n-r}^l \partial^l a C_{n-k-r}^{n-k-r-l} \partial^{n-k-r-l} f.$$

Par conséquent, on a, pour tout couple d'entiers (k, r) :

$$\sigma_q(C_{n-r}^{n-k-r}\partial^{n-k-r}f) = \sum_{l=0}^{n-k-r} C_{n-r}^{n-k-r}C_{n-k-r}^{l}\partial^l a\partial^{n-k-r-l}f = M(n)U(n)_{(r,k)}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-r} C_{n-r}^{l}\partial^l aC_{n-r-l}^{n-k-r-l}\partial^{n-k-r-l}f = \sum_{l=0}^{n-k-r} C_{n-r}^{l}\partial^l aC_{n-r-l}^{n-k-r-l}\partial^{n-k-r-l}f$$

car $C_{n-r}^{n-k-r}C_{n-k-r}^{l} = C_{n-r}^{l}C_{n-r-l}^{n-k-r-l}$, pour tout entier $l \leq n-k-r$.

Pour tout $i = 0, ..., n-1$, soit par ailleurs $\mathcal{E}_i$ le $\mathcal{D}_K$-module de représentation matricielle $\begin{pmatrix} 1 & \partial^i(\frac{\partial a}{a}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est un élément de $Ext^1_{Diff(K,\sigma_q)}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$, qui correspond à l'équation $\sigma_q(z) - z = \partial^i(\partial a/a)$, dont une solution est donnée par $\partial^i(\frac{\partial f}{f})$. En effet, on a $\frac{\sigma_q f}{f} = a$, d'où $\sigma_q(\frac{\partial f}{f}) - \frac{\partial f}{f} = \frac{\partial a}{a}$, et en dérivant i fois cette équation : $\sigma_q(\partial^i(\frac{\partial f}{f})) - \partial^i(\frac{\partial f}{f}) = \partial^i(\frac{\partial a}{a})$. Ainsi, pour tout $i = 0, ..., n-1$, on a $K_E(\mathcal{E}_i) = K_E(\partial^i(\frac{\partial f}{f}))$

Pour tout entier $k < n$, la relation

$$\frac{\partial^{k+1}(f)}{f} = \frac{\partial^k(\frac{\partial f}{f}.f)}{f} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \partial^j(\frac{\partial f}{f})\frac{\partial^{k-j}f}{f}$$

et une récurrence simple entraînent que le corps $K_u := K_E(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}_i) = K_E(\frac{\partial f}{f}, ..., \partial^{n-1}(\frac{\partial f}{f}))$ est égal au corps $K'_u := K_E(\frac{\partial f}{f}, \frac{\partial^2 f}{f}, ..., \frac{\partial^n f}{f})$. Ce dernier est le corps de définition d'une matrice fondamentale de solutions de $\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^*$. Remarquons que $\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^*$ est une extension itérée de l'objet unité, puisque $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^* \simeq \mathbf{1}$, ou plus concrètement, puisque sa matrice représentative s'obtient en divisant par a chacun des coefficients de celle de $\mathcal{M}(n)$, et n'a donc que des 1 sur la diagonale.

Montrons que $Gal_{\omega_E}(\mathcal{M}(n)) \simeq Gal_{\omega_E}(\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^*) \times Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$. Tout d'abord, les catégories tannakiennes $< \mathcal{M}(n) >$ et $< \mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^* \oplus \mathcal{A} >$ coïncident. En effet, $\mathcal{A}$ étant un sous objet de $\mathcal{M}(n)$ la première inclusion est triviale ; la seconde résulte du fait que $\mathcal{A}$, de rang 1, est trivialisé par tensorisation par son dual. Puisque la catégorie $< \mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^* \oplus \mathcal{A} >$ est engendrée par $\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^*$ et par $\mathcal{A}$, le groupe de Galois $Gal_{\omega_E}(\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^* \oplus \mathcal{A})$ est un sous groupe du produit direct $Gal_{\omega_E}(\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^*) \times Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$ qui s'envoie surjectivement sur chacun des facteurs. Mais $\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^*$ est une extension itérée de l'objet $\mathbf{1}$, donc $Gal_{\omega_E}(\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^*)$ est un C_E-groupe unipotent, tandis que $Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$ est un C_E-groupe semi-simple. Ils n'ont donc pas de quotients non triviaux isomorphes. Par conséquent, $Gal_{\omega_E}(\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^* \oplus \mathcal{A})$ remplit tout le produit direct $Gal_{\omega_E}(\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^*) \times Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$.

Le corps $L_n = K_E(\mathcal{M}(n))$ est le corps de définition d'une matrice fondamentale de solutions à coefficients dans F de l'objet $\mathcal{M}(n)_E$ de $Diff(K_E, \sigma_q)$. De la proposition 2.10, on déduit donc

$$t_n := deg.tr_{K_E} L_n = dim_{C_E} Gal_{\omega_E}(\mathcal{M}(n)) = dim_{C_E} Gal_{\omega_E}(\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^*) + dim_{C_E} Gal_{\omega_E}(\mathcal{A}).$$

Une nouvelle application de la proposition 2.10 montre que :

$$dim_{C_E} Gal_{\omega_E}(\mathcal{M}(n) \otimes \mathcal{A}^*) = deg.tr_{K_E} K'_u = deg.tr_{K_E} K_u = dim_{C_E} Gal_{\omega_E}(\bigoplus \mathcal{E}_i).$$

Par conséquent,

$$t_n = dim_{C_E} Gal_{\omega_E}(\bigoplus \mathcal{E}_i) + dim_{C_E} Gal_{\omega_E}(\mathcal{A}).$$

Comme f est transcendante sur K_E, la dimension de $Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$ est égale à 1. D'après la proposition 3.8, la dimension de $Gal_{\omega_E}(\bigoplus \mathcal{E}_i)$ est égale à la dimension δ_n du $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de K engendré par les éléments $\partial^i(\frac{\partial a}{a})$ $(i = 0, ..., n-1)$ modulo $(\sigma_q - 1)(K)$. Ceci conclut la démonstration du lemme 4.13.

Remarque 4.14 *La méthode décrite dans l'introduction de l'article est ici simplifiée. En rang 1, l'existence d'un isomorphisme entre $Ext^1_{Diff(K,\sigma)}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ et $Ext^1_{Diff(K,\sigma)}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ permet de remplacer l'extension itérée $\mathcal{M}_n$ par la somme directe des extensions simples $\bigoplus \mathcal{E}_i$ et de l'objet $\mathcal{A}$. Le même phénomène se produit pour les sommes directes d'objets de rang 1 (voir le paragraphe 4.3.2 ci-dessous), mais pas dans le cas général.*

Remarque 4.15 *On peut déduire le théorème 4.12 du théorème d'Ishizaki [12], voir aussi [18]. Celui-ci entraîne en effet que pour $a(z)$ de la forme $a_2(z) = \prod(1 - a_i z)^{\alpha_i}$ i.e tel que $div(a_2) \subset \mathbb{C}^*$, les solutions y_2 (non rationnelles) de $\sigma_q(y) = a_2 y$ sont hypertranscendantes. Par ailleurs, si a est de la forme $a_1(z) = \mu z^r$, les solutions y_1 de $\sigma_q(y) = a_1 y$ vérifient $\partial(\frac{\partial y_1}{y_1}) = 0$. Donc, pour $a = a_1 a_2$, $a_2 \neq 1$ les solutions de $\sigma_q(y) = ay$ sont encore hypertranscendantes.*

En revanche, les méthodes d'Ishizaki ne suffisent pas à démontrer le résultat plus général fourni par le théorème 1.1.

Démonstration du théorème 4.12.

D'après le lemme 4.6, on peut écrire a sous la forme $a = \overline{a}\frac{\sigma(f)}{f}$, $f \in K^*$ et $\overline{a}$ standard et les groupes de Galois aux différences associés aux extensions itérées par dérivation déduites de a et $\overline{a}$ sont égaux. On peut donc supposer que a est standard.

Soit donc $a \in K$ standard. Il s'agit maintenant de montrer que le cas (1) : $t_1 = 1$, c'est-à -dire en vertu du lemme 4.13, $\delta_1 = 0$ (resp. (2) : $t_2 = 2$, c'est-à-dire $\delta_2 = 1$) se produit si et seulement si a est de la forme μ (resp. μz^r avec r un entier non nul), et que sinon, c'est-à-dire si a un un zéro ou un pôle non nul, on a : $\delta_n = n$, et donc $t_n = n+1$, pour tout $n \geq 1$.

[preuve du point 1]

Supposons que $\delta_1 = 0$, autrement dit que $\partial(a)/a$ soit un élément de $(\sigma_q - 1)\mathbb{C}(z)$. Alors, il existe $k \in K$, de décomposition en éléments simples $k(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n + \sum_{i=1}^{t} \sum_{l=1}^{\gamma_t} \frac{\nu_i^l}{(z-c_i)^l}$, tel que

$$\frac{\partial a}{a} = \sigma_q(k) - k \tag{16}$$

Ecrivons a sous la forme $a(z) = \mu \prod_{i=1}^{r} (z - a_i)^{\alpha_i}$, où $a_i \neq q^{\mathbb{Z}} a_m$ si $i \neq m$, et $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, et $\mu \in \mathbb{C}$. Puisque $\partial = z\frac{d}{dz}$, l'équation (16) s'écrit :

$$\sum_i \alpha_i + \sum_i \frac{\alpha_i a_i}{(z - a_i)} = \sum_{n=1}^{N} (q^n b_n - b_n) z^n + \sum_i \sum_l \frac{-\nu_i^l}{(z - c_i)^l} + \frac{\nu_i^l / q^l}{(z - c_i/q)^l} \tag{17}$$

Il en résulte que $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum \alpha_i = 0$, et que 0 n'est pas pôle de k. On va montrer que k ne peut avoir de pôle d'ordre supérieur ou égal à 1.

En effet, supposons que k ait un pôle c_{i_0} (non nul) d'ordre $p > 0$, et considèrons l'entier relatif n_0 maximal tel que $q^{-n_0} c_{i_0}$ soit un pôle d'ordre au moins p de k. Comme $q^{-(n_0+1)} c_{i_0}$ est un pôle de $\sigma_q(k)$ et que $q^{-(n_0+1)} c_{i_0}$ n'est pas pôle d'ordre p de $\sigma_q(k) - k$ (a est standard), on en déduit que $q^{-(n_0+1)} c_{i_0}$ doit apparaître comme pôle d'ordre au moins p de k. Ceci est absurde par maximalité de n_0.

On en déduit que $k \in \mathbb{C}$ et que $a = \mu$ est une fonction constante (au sens différentiel).

Réciproquement si a est constante, alors $\partial(a)/a = 0 \in (\sigma_q - 1)\mathbb{C}(z)$, et $\delta_1 = 0$.

[preuve du point 2]

Supposons que $\delta_2 = 1$, i.e. qu'il existe un nombre complexe λ et un élément $k \in K$ tels que

$$\partial(\partial a/a) + (\lambda)\partial a/a = \sigma(k) - k \tag{18}$$

Avec les notations de la démonstration précédente, l'équation (18) s'écrit

$$\lambda \sum_i \alpha_i + (\lambda - 1) \sum_i \frac{\alpha_i a_i}{z - a_i} - \sum_i \frac{\alpha_i a_i^2}{(z - a_i)^2} = \sum_i \sum_l \left(\frac{\nu_i^l / q^l}{(z - c_i/q)^l} - \frac{\nu_i^l}{(z - c_i)^l}\right) + \sum (q^n b_n - b_n) z^n \tag{19}$$

En suivant la démonstration du point 1, on en déduit que :

a) $k \in \mathbb{C}$.
b) le support du diviseur de a est réduit à (0).
c) $\lambda \sum_i \alpha_i = 0$.

De b), il résulte que a est de la forme $a(z) = \mu z^r$ (avec $r = \sum_i \alpha_i$ non nul, sans quoi $\delta_2 = 0$, et donc $\lambda = 0$).

Réciproquement, si $a(z) = \mu z^r$, alors $\partial(\partial a/a) = \partial(r) = 0 \in (\sigma_q - 1)\mathbb{C}(z)$, et $\delta_2 \leq 1$.

[Preuve du point 3]

Lemme 4.16 *Soit $a \in \mathbb{C}(z)^*$ telle que a ait une forme standard et possède un pôle ou un zéro non nul. Alors la famille $\{\partial a/a, ..., \partial^j(\partial a/a), ...\}$ est linéairement indépendante sur $\mathbb{C}$ modulo $(\sigma_q - 1)(\mathbb{C}(z))$.*

Démonstration

Supposons qu'il existe $\lambda_0, ..., \lambda_N$ dans $\mathbb{C}$, $\lambda_N \neq 0$ et $k \in \mathbb{C}(z)$, de la forme $k(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n + \sum_{i=1}^{t} \sum_{l=1}^{\gamma_t} \frac{\nu_i^l}{(z-c_i)^l}$, tels que :

$$\sum_{j=0}^{N} \lambda_j \partial^j(\partial a/a) = \sigma_q(k) - k = \sum_n (q^n b_n(qz) - b_n) z^n + \sum_i \sum_l \left(\frac{q^{-l}.\nu_i^l}{(z - c_i/q)^l} - \frac{\nu_i^l}{(z - c_i)^l}\right). \quad (20)$$

Une récurrence aisée montre que pour tout entier $j \geq 0$

$$\partial^j(\partial a/a) = \sum_i \frac{\alpha_i a_i^j (-1)^{j+1} j!}{(z - a_i)^{j+1}} + \text{ des termes polaires d'ordre } \leq j.$$

Soit alors i_0 tel que $a_{i_0} \neq 0$. Compte tenu des écritures précédentes et de l'unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(z)$, on en déduit que a_{i_0} doit être un pôle d'ordre N de $\sigma_q(k) - k$, c'est-à-dire que soit a_{i_0} soit qa_{i_0} est un pôle d'ordre au au moins N de f. Considérons l'entier relatif n_0 maximal tel que $q^{-n_0} a_{i_0}$ soit un pôle d'ordre au moins N de f. Comme $q^{-(n_0+1)} a_{i_0}$ est un pôle de $\sigma_q(f)$ et que $q^{-(n_0+1)} a_{i_0}$ n'est pas pôle d'ordre N de $\sigma_q(f) - f$ (a est standard), on en déduit que $q^{-(n_0+1)} a_{i_0}$ doit apparaitre comme pôle d'ordre au moins N de f. Or ceci est absurde par maximalité de n_0 et non nullité de a_{i_0}.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $\delta_n = n$ et $degtr_{K_E} K_E(f, \partial f, ..., \partial^n f...) = n + 1$; les fonctions $f, \partial f, ..., \partial^n f$ sont donc algébriquement indépendantes sur K_E et f est bien hypertranscendante sur K_E. Ceci conclut la preuve du théorème 4.12.

Exemples On rappelle ici la définition des fonctions classiques de la théorie des q-différences, qui illustrent chacun des cas du théorème 4.12. On suppose que $|q| < 1$.

On note $\theta(z)$ ([9]) la fonction $\theta(z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} z^n$, qui correspond à la fonction *theta* usuelle de la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Elle est méromorphe sur $\mathbb{C}$, et satisfait l'équation aux q-différences $\sigma_q(\theta)(z) = z^{-1}\theta(z)$.

Pour $c \in \mathbb{C}^*$, on pose $e_{q,c}(z) = \frac{\theta(z)}{\theta(z/c)}$ (voir ([19]) : c'est une solution méromorphe sur $\mathbb{C}^*$ de l'équation aux q-différences $\sigma_q(e_{q,c}) = ce_{q,c}$.

Un des analogues aux q-différences de l'exponentielle est donné par la fonction $exp_q = \prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1-(q-1)q^{-n}z)$, qui est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et satisfait l'équation aux q-différences $exp_q(qz) = (1-(q-1)z)exp_q(z)$.

Exemple 0 : $e_{q,-1}$ satisfait les hypothèses de la proposition 4.11 et vérifie $e_{q,-1}^2 \in C_E$.
Exemple 1 : $e_{q,c}$ satisfait les hypothèses du point 1 et vérifie $\partial(e_{q,c})/e_{q,c} \in C_E$
Exemple 2 : Posons $l = \frac{\partial(\theta)}{\theta}$. La fonction l correspond à la fonction ζ de Weierstrass et vérifie l'équation aux q-différences $\sigma_q(l) = l + 1$. Par conséquent, $\partial\frac{\partial\theta}{\theta} \in C_E$, et la fonction θ vérifie une relation algébro-différentielle d'ordre 2 à coefficients dans $C_E(z)$
Exemple 3 : La fonction exp_q satisfait les hypothèses du point 3. Elle est donc hypertranscendante sur $C_E(z)$.

4.3 Systèmes diagonaux aux différences

4.3.1 Relations algébriques entre solutions

Soient $a_1, ..., a_n$ n éléments de K^* et A la matrice diagonale de taille n ayant comme coefficients diagonaux les a_i. On considère le système aux q-différences

$$\sigma_q Y = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} Y = AY. \tag{21}$$

Proposition 4.17 *Soit* $\Phi = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_n \end{pmatrix} \in Gl_n(\mathcal{M}er(\mathbb{C}^*))$ *une matrice fondamentale de solutions de (21).*

Alors, les fonctions f_i sont algébriquement dépendantes sur K_E si et seulement il existe des entiers $r_1, ...r_n$ non tous nuls, et un élément h de K^* tels que $\prod_i a_i^{r_i} = \frac{\sigma_q(h)}{h}$.

(On notera que les diviseurs elliptiques des a_i sont alors linéairement dépendants sur $\mathbb{Z}$.)

Démonstration

Considérons le $\mathcal{D}_K$-module $\mathcal{A}$ de rang n associé au système (21), et le $\mathcal{D}_{K_E}$-module $\mathcal{A}_E = \mathcal{A} \otimes K_E$. Notons, pour tout $i = 1, ..., n$, $\mathcal{A}_i$ les $\mathcal{D}_K$-module associés aux équations $\sigma_q(y) = a_i y$, de sorte que $\mathcal{A} = \bigoplus_i \mathcal{A}_i$.

Soit $G = Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$ le groupe de Galois de $\mathcal{A}_E$ relatif à ω_E, et ρ la représentation correspondante de G dans $\mathbf{G}_m{}^n/_{C_E}$. Si $\rho(G)$ est un sous-groupe propre de $\mathbf{G}_m{}^n$, il est annulé par un caractère χ non trivial, et il existe des entiers $r_1, ..., r_n$ non tous nuls, tels que

$$\chi \circ \rho(G) \simeq Gal_{\omega_E}(\bigotimes_i \mathcal{A}_i{}^{\otimes r_i}) = \{1\}.$$

Le $\mathcal{D}_{K_E}$-module $\bigotimes_i (\mathcal{A}_i \otimes K_E)^{\otimes r_i}$ est donc trivial. D'après le lemme 3.6, $\bigotimes_i \mathcal{A}_i{}^{\otimes r_i}$ est alors trivial sur K, et il existe $h \in K$ tel que :

$$a_1^{r_1} ... a_n^{r_n} = \frac{\sigma_q(h)}{h} \tag{22}$$

Réciproquement, s' il existe des entiers rationnels $r_1, ..., r_n$ non tous nuls et un élément h de K^* tels que $a_1^{r_1} ... a_n^{r_n} = \frac{\sigma_q(h)}{h}$, alors $\bigotimes_i \mathcal{A}_i{}^{\otimes r_i}$ est trivial dans $Diff(K, \sigma_q)$. Les solutions du système (21) vérifient donc $y_1^{r_1} ... y_n^{r_n} \in K.C_E$, et sont bien algébriquement dépendantes sur K_E.

4.3.2 Hyperindépendance algébrique

Théorème 4.18 *Soient $a_1, ..., a_n$ des éléments non nuls de $\mathbb{C}(z)$ et q un nombre complexe non nul de module différent de 1. Pour tout $i = 1, ..., n$, soit $f_i \neq 0$ une solution méromorphe sur $\mathbb{C}^*$ de l'équation aux q-différences $\sigma_q(f_i) = a_i f_i$. Alors, les fonctions $f_1, ..., f_n$ ainsi que leur dérivées successives sont algébriquement indépendantes sur $C_E(z)$ si et seulement si les diviseurs elliptiques des a_i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$.*

Remarque 4.19 *Si les diviseurs elliptiques sont liés, on a d'après le lemme 4.10, $\prod_i a_i^{r_i} = \mu z^r \sigma_q(h)/(h)$ $(*)$ avec $r_i \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathbb{C}, h \in K^*$. En utilisant les fonctions classiques aux q-différences introduites au paragraphe 4.2.2, on obtient $\prod_i f_i^{r_i} = \lambda \theta^r e_{q,\mu} h$, où $\lambda \in C_E$. En dérivant une fois logarithmiquement, puis (si $r \neq 0$) en dérivant une seconde fois, on obtient une relation de dépendance algébrique non triviale liant sur K_E les f_i et leurs derivées. L'ordre d'hyperalgébricité est encore une fois inférieur ou égal à 2, et inférieur ou égal à 1 si $r = 0$.*

La preuve du théorème 4.18 repose sur la généralisation suivante du lemme 4.13.

Soit N un entier ≥ 1. Notons t_N le degré de transcendance du corps $L_N = K_E(\partial^j f_i; i = 1, ..., n; j = 0, ...N)$ sur K_E, et δ_N la dimension du $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par les fonctions rationnelles $\partial^j(\frac{\partial a_i}{a_i}), (i = 1, ..., n; j = 0, ..., N-1)$ dans $K/(\sigma_q - 1)(K)$.

Lemme 4.20 *Si les fonctions $f_1, ..., f_n$ sont algébriquement indépendantes sur K_E, alors, $t_N = \delta_N + n$.*

Démonstration du lemme 4.20
Comme au paragraphe précédent, on note A (resp. Φ) la matrice diagonale de coefficients $a_1, ..., a_n$ (resp. $f_1, ..., f_n$), et $\mathcal{A}$ l'objet de $Diff(K, \sigma_q)$ de représentation matricielle A, de sorte que $K_s := K_E(\mathcal{A}) = K_E(f_1, ..., f_n)$.

Soit Φ une matrice fondamentatle de solutions de $\sigma_q(Y) = AY$ et $\mathcal{M}(N)$ l'objet de $Diff(K, \sigma_q)$ de représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} A & m\partial A & \frac{m(m-1)}{2}\partial^2 A & \cdots & \partial^m A \\ 0 & A & (m-1)\partial A & \cdots & \partial^{m-1} A \\ \vdots & \vdots & A & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & A \end{pmatrix}, \tag{23}$$

dont une matrice fondamentale de solutions dans F est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \Phi & \cdots & \cdots & \partial^k \Phi & \cdots & \partial^{m-1}\Phi & \partial^m \Phi \\ 0 & \Phi & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & C_{m-r}^{m-k-r}\partial^{k-r}\Phi & ... & \cdots & \partial^{m-r}\Phi \\ 0 & ... & ... & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & \Phi & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & ... & ... & ... & \ddots & \cdots & \partial^2\Phi \\ 0 & ... & ... & ... & ... & \Phi & \partial\Phi \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 & \Phi \end{pmatrix} \tag{24}$$

On a donc $L_N = K_E(\partial^j f_i; i = 1, ..., n; j = 0, ...N) = K_E(\mathcal{M}(N))$.

Soient $\mathcal{E}_{i,j}$ l'extension de $\mathbf{1}$ par $\mathbf{1}$ données par le système :

$$\mathcal{E}_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \partial^j(\frac{\partial a_i}{a_i}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (i = 1, ..., n \ j = 0, ..., N-1),$$

et $\mathcal{E}(N)$ la somme directe $\bigoplus \mathcal{E}_{i,j}$. Ainsi, pour tout $i = 1, ..., n$ et tout $j = 0, ..., N-1$, on a $K_E(\mathcal{E}_{i,j}) = K_E(\partial^j(\frac{\partial f_i}{f_i}))$, et $K_E(\mathcal{E}(N))$ est le compositum de ces Nn corps dans F.

Par récurrence sur l'entier $k < N$, les relations

$$\frac{\partial^{k+1}(f_i)}{f_i} = \frac{\partial^k(\frac{\partial f_i}{f_i})}{f_i} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \partial^j(\frac{\partial f_i}{f_i})\frac{\partial^{k-j} f_i}{f_i}$$

entraînent de nouveau que le corps $K_u := K_E(\mathcal{E}(N)) = K_E(\partial^j(\frac{\partial f_i}{f_i}); i = 1, ..., n; j = 0, ..., N-1)$ coïncide avec le corps $K'_u := K_E(\frac{\partial^j f_i}{f_i}; i = 1, ..., n; j = 1, ..., N)$. Quant au corps L_N, c'est clairement le compositum des corps K_s et K'_u.

En définitive, L_N est le compositum des corps $K_s = K_E(\mathcal{A})$ et $K_u = K_E(\mathcal{E}(N))$, d'où $L_N = K_E(\mathcal{A} \oplus \mathcal{E}(N))$. De la proposition 2.10, on déduit donc que

$$t_N = dim_{C_E} Gal_{\omega_E}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{E}(N)).$$

Le groupe de Galois $Gal_{\omega_E}(\mathcal{E}(N) \oplus \mathcal{A})$ est un sous-groupe du produit direct $Gal_{\omega_E}(\mathcal{E}(N)) \times Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$ qui s'envoie surjectivement sur chacun des facteurs. Comme $\mathcal{E}(N) = \bigoplus_{i,j} \mathcal{E}_{i,j}$ est somme directe d'extensions de $\mathbf{1}$ par $\mathbf{1}$, son groupe de Galois $Gal_{\omega_E}(\mathcal{E}(N))$ est un C_E-groupe unipotent, tandis que $Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$ un C_E-groupe semi-simple. Par conséquent, $Gal_{\omega_E}(\mathcal{E}(N) \oplus \mathcal{A})$ remplit tout le produit direct $Gal_{\omega_E}(\mathcal{E}(N)) \times Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$. Ainsi,

$$t_N = dim_{C_E} Gal_{\omega_E}(\mathcal{A}) + dim_{C_E} Gal_{\omega_E}(\bigoplus \mathcal{E}_{i,j})$$

Comme $f_1, ..., f_n$ sont algébriquement indépendantes sur K_E, la dimension de $Gal_{\omega_E}(\mathcal{A})$ est égale à n. D'après la proposition 3.8, la dimension de $Gal_{\omega_E}(\bigoplus \mathcal{E}_{i,j})$ est égale à la dimension δ_N du $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de K engendré par les éléments $\partial^j(\frac{\partial a_i}{a_i})$ $(i = 1, ..., n; j = 0, ..., N-1)$ modulo $(\sigma_q - 1)(K)$. Ceci conclut la démonstration du lemme 4.20.

Démonstration du théorème 4.18

Pour établir le théorème 4.18, il nous reste, comme au point 3 de la preuve du théorème 4.12, à vérifier la généralisation suivante du lemme 4.16.

Lemme 4.21 *Les fonctions $\partial^j(\partial(a_i)/a_i)$ $(i = 1...n, j \in \mathbb{N})$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{C}$ modulo $(\sigma_q - id)(\mathbb{C}(z))$ si et seulement si les diviseurs elliptiques $div_E(a_1), ..., div_E(a_n)$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Z}$.*

Démonstration
Sans perte de généralité, on peux supposer que les a_i sont standards. On fixe, une fois pour toutes, une collection S de représentants de $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}^*$, notée $S = \{\alpha \in \mathbb{C}^*\}$. On peut alors écrire les a_i sous la forme

$$a_i = \mu_i z^{r_i} \prod_{\alpha \in S} (z - q^{n_{i,\alpha}}\alpha)^{\beta_{i,\alpha}} \tag{25}$$

avec $\beta_{i,\alpha}, r_i \in \mathbb{Z}$.

Supposons que les diviseurs elliptiques des a_i sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Z}$, et soient $l_1, ..., l_n$ des entiers non tous nuls tels que

$$l_1 div_E(a_1) + l_2 div_E(a_2) + ... + l_n div_E(a_n) = 0 \tag{26}$$

dans $Div(\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}})$. On déduit de (26) qu'il existe $r \in \mathbb{Z}$, $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $h \in K^*$ tels que : $\prod_i a_i^{l_i} = \mu z^r \sigma_q(h)/(h)$. En dérivant logarithmiquement l'équation précédente, et en dérivant une seconde fois on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \partial(\frac{\partial a_i}{a_i}) = \sigma_q(\partial(\frac{\partial h}{h})) - \partial(\frac{\partial h}{h}).$$

On vient d'exhiber une liaison sur $\mathbb{C}$ entre les fonctions $\partial^j(\partial(a_i)/a_i)$ $i = 1...n, j \in \mathbb{N}$ (et même : $j = 0, 1, 2$) modulo $(\sigma_q - id)(\mathbb{C}(z))$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une relation de dépendance, qu'on peut choisir d'ordre N minimal relativement à j, liant les $\partial^j(\partial(a_i)/a_i)$ $(i = 1, ..., n, j \in \mathbb{N})$ modulo $(\sigma_q - id)(\mathbb{C}(z)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j^i \partial^j(\partial a_i/a_i) = \sigma_q(f) - f, \tag{27}$$

où les λ_j^i sont des nombres complexes non tous nuls, et f appartient à $\mathbb{C}(z)$. Quitte à faire une permutation sur les indices i , on peut supposer que $\lambda_N^1 \neq 0$.
On va montrer que, pour tout $\alpha \in S$:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \beta_{i,\alpha} = 0 \tag{28}$$

On déduit des équations (28) que les vecteurs $\begin{pmatrix} \beta_{1,\alpha} \\ \vdots \\ \beta_{n,\alpha} \end{pmatrix}$, $\alpha \in S$ de $\mathbb{Z}^n$ sont liés sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{Z}$. Par conséquent, les diviseurs elliptiques des a_i sont liés sur $\mathbb{Z}$. L'équation

(28) vaut avec des coefficients λ_n^i entiers. Dans ces conditions,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i div_E(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i (\sum_{\alpha\in S} \beta_{i,\alpha}(\alpha)) = \sum_{\alpha\in S} (\sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \beta_{i,\alpha})(\alpha) = 0$$

Écrivons la décomposition en éléments simples de f sous la forme $f(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^m + \sum_{l=1}^{p} \sum_{r=1}^{\gamma_t} \frac{\nu_l^r}{(z-d_l)^r}$, et reprenons les expressions

$$a_i = \mu_i z^{r_i} \prod_{\alpha\in S} (z - q^{n_{i,\alpha}}\alpha)^{\beta_{i,\alpha}}$$

données par la formule (25) ; dans la suite, pour alléger les notations, on posera $b_{i,\alpha} = q^{n_{i,\alpha}}\alpha$ pour tout $i = 1, ..., n, \alpha \in S$.

Dans ces conditions, (27) s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{N} \lambda_j^i \partial^j (\partial a_i/a_i) = \sum_m (q^m b_m(qz) - b_m) z^m + \sum_l \sum_r (\frac{q^{-r}.\nu_l^r}{(z - d_l/q)^r} - \frac{\nu_l^r}{(z - d_l)^r}). \quad (29)$$

Une récurrence aisée montre que pour tout entier $j \geq 0$:

$$\partial^j (\partial a_i/a_i) = \sum_{\alpha\in S} \frac{\beta_{i,\alpha}(b_{i,\alpha})^j (-1)^{j+1} j!}{(z - b_{i,\alpha})^{j+1}} + \text{ des termes polaires d'ordre } \leq j.$$

Fixons un élément α de S, et notons I_α l'ensemble d'indice $\{\ i \in \{1, ..., n\},\ \beta_{i,\alpha} \neq 0,\ \lambda_N^i \neq 0\}$.
Tout d'abord, si I_α est vide, la relation (28) est vérifiée car, par définition de I_α, on a alors $\beta_{i,\alpha} = 0$ ou $\lambda_N^i = 0$.

En second lieu , la preuve du point 3 de la démonstration du théorème 4.12 assure que si I_α est non vide, il ne peut être réduit à un élément.

Soit désormais $\alpha \in S$ tel que I_α contient au moins deux éléments. On note $n_1 < n_2 < ... < n_t$ les valeurs distinctes, ordonnées, prises par les $(n_{i,\alpha}),\ i \in I_\alpha$.
Pour tout $l = 1, ..., t$, on pose $I_{\alpha,n_l} = \{\ i \in I_\alpha,\ \text{tels que}\ \ n_{i,\alpha} = n_l\ \}$, .

La partie polaire d'ordre N en la spirale $\alpha q^{\mathbb{Z}}$ du membre de gauche de l'équation (29) est égale à $\sum_{l=1}^{t} \sum_{i\in I_{\alpha,n_l}} \frac{\lambda_N^i \beta_{i,\alpha}(\alpha q^{n_l})^N (-1)^N N!}{(z-\alpha q^{n_l})^N}$.
On écrit la partie polaire d'ordre N en la spirale $\alpha q^{\mathbb{Z}}$ de f sous la forme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\nu_k}{(z-\alpha q^k)}$, les ν_k étant des nombres complexes presque tous nuls.

En identifiant la partie polaire d'ordre N en la spirale $\alpha q^{\mathbb{Z}}$ du membre de gauche de l'équation à celle de $\sigma_q(f) - f$, on obtient la relation suivante :

$$\sum_{l=1}^{t} \sum_{i \in I_{\alpha,n_l}} \frac{\beta_{i,\alpha} \lambda_N^i (\alpha q^{n_l})^N (-1)^N N!}{(z - \alpha q^{n_l})^N} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\nu_{k+1} q^{-N} - \nu_k}{(z - q^k \alpha)^N}. \tag{30}$$

On obtient :

$$\forall m \notin \{n_1, ..., n_t\},\ \nu_{m+1} q^{-N} - \nu_m = 0. \tag{31}$$

$$\forall\ l = 1, ..., t,\ \nu_{n_l+1} q^{-N} - \nu_{n_l} = \sum_{i \in I_{\alpha,n_l}} \lambda_N^i \beta_{i,\alpha} (\alpha q^{n_l})^N (-1)^N N!. \tag{32}$$

L'ensemble des entiers relatifs m tels que ν_m soit non nul est fini. La relation (31) entraine que

1. $\nu_{n_1} = \nu_{n_{t+1}} = 0.$
2. $$\forall\ l = 1, ..., t-1,\ \prod_{m=n_l+1}^{n_{l+1}-1} \frac{\nu_{m+1}}{\nu_m} = \prod_{m=n_l+1}^{n_{l+1}-1} q^N. \tag{33}$$

De l'équation (33) on tire les relations suivantes

$$\nu_{n_l+1} = \nu_{n_{l+1}} q^{(n_{l+1}-n_l-1)N}\ \forall = 1, ..., t-1$$

. Alors, on a en reportant dans (32) que pour tout $l = 1, ..., t-1$:

$$\nu_{n_{l+1}} q^{-n_{l+1}N} - \nu_{n_l} q^{-n_l N} = \sum_{i \in I_{\alpha,n_l}} \lambda_N^i \beta_{i,\alpha} \alpha^N (-1)^N N! \tag{34}$$

et

$$-\nu_{n_t} q^{-n_t N} = \sum_{i \in I_{\alpha,n_t}} \lambda_N^i \beta_{i,\alpha} \alpha^N (-1)^N N!. \tag{35}$$

En sommant toutes ces équations, on obtient :

$$\sum_{l=1}^{t} \sum_{i \in I_{\alpha,n_l}} \beta_{i,\alpha} \lambda_N^i \alpha^N (-1)^N N! = -\nu_{n_1} = 0,$$

d'où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \beta_{i,\alpha} = 0$, puisque $I_\alpha = \bigcup_{l=1}^{t} I_{\alpha,n_l}$. Le lemme 4.21 est donc démontré.

Application Voici une illustration du théorème, pour l'analogue aux q-différences de l'exponentielle (dont la définition a été rappelée à fin du paragraphe 4.2).

Théorème 4.22 *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des nombres complexes non nuls, qu'on suppose deux à deux distincts modulo $q^{\mathbb{Z}}$. Alors, les fonctions $exp_q(\alpha_i z), i = 1, ..., n$ et leurs dérivées successives ne vérifient aucune relation algébrique à coefficients dans K_E.*

Il suffit en effet d'appliquer le théorème 4.18 avec $a_i = 1 - (q-1)\alpha_i z$ pour tout $i = 1, .., n$, de sorte que $div_E(a_i) = (\frac{1}{(q-1)\overline{\alpha_i}})$, où $\overline{\alpha_i}$ désigne la classe de α_i dans C^*/q^Z. Or les diviseurs $(\frac{1}{(q-1)\overline{\alpha_i}})$ ne peuvent être linéairement dépendants sur $\mathbb{Z}$ que si deux d'entre eux au moins coïncident.

5 Hypertranscendance des solutions d'équations aux τ-différences

5.1 Énoncés des résultats

Nous montrons dans cette dernière partie que les résultats s'étendent sans changement majeur (voir toutefois le " point A" infra) à l'étude des τ-différences. Précisons-en tout d'abord le cadre.

Soit $\tau \in \mathbb{C}$ un nombre complexe non nul. On désigne par $K = \mathbb{C}(z)$ le corps des fractions rationelles à coefficients complexes, par $F = \mathcal{M}er(\mathbb{C})$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ et par σ_τ l'automorphisme de F qui à $f(z) \in F$ associe $f(z+\tau)$. On note C_τ le sous-corps de F formé par les fonctions τ-périodiques (c'est-à-dire les éléments fixés par σ_τ), et $K_\tau = C_\tau(z)$ le compositum de C_τ et de K dans F. Les corps K, F et K_τ sont des corps aux différences relativement à σ_τ, admettant respectivement pour corps des σ_τ-constantes $\mathbb{C}, C_\tau$ et C_τ.

L'automorphisme σ_τ et la dérivation $\partial = d/dz$ munissent le corps $F = \mathcal{M}er(\mathbb{C})$ et ses sous-corps K_τ et K de structures de corps aux différences différentiels, puisque $\sigma_\tau \partial = \partial \sigma_\tau$. Ces trois corps admettent $\mathbb{C}$ comme corps de constantes différentielles. Voici, dans ces conditions, les τ-analogues de la proposition 4.11 et du théorème 4.12.

Proposition 5.1 *Soient a un élément de K^* et $f \in \mathcal{M}er(\mathbb{C})$ une solution non nulle de l'équation*

$$\sigma_\tau y = ay. \tag{36}$$

Alors,

0. f est algébrique sur K_τ si et seulement si a est de la forme $\zeta \frac{\sigma_\tau(g)}{g}$, où $g \in K^*$ et ζ est une racine de l'unité dans $\mathbb{C}^*$;

1. f et ∂f sont algébriquement dépendantes sur $C_\tau(z)$ si et seulement si a est de la forme $\mu\sigma_q(g)/g$ où $g \in \mathbb{C}(z)$ et $\mu \in \mathbb{C}^*$;

2. Dans les autres cas, f est hypertranscendante sur $C_\tau(z)$.

Definition 5.2 *Soit $a \in \mathbb{C}(z)^*$. On note $div_\tau(a)$ l'image du diviseur de a par l'application naturelle de $Div(\mathbb{C})$ dans $Div(\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z})$ et on l'appelle diviseur périodique de a.*

Soit A la matrice diagonale $(a_1, ..., a_n)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in Gl_n(K).$$

Les τ-analogues de la proposition 4.17 et du théorème 4.18 s'écrivent :

Théorème 5.3 *Soit $\Phi = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_n \end{pmatrix} \in Gl_n(\mathcal{M}er(\mathbb{C}))$ une matrice fondamentale de solutions de $\sigma_\tau Y = AY$. Alors,*

i) les fonctions $f_1, ..., f_n$ sont algébriquement dépendantes sur K_τ si et seulement si il existe des entiers $r_1, ..., r_n$ non tous nuls et un élément $h \in K^*$ tels que $a_1^{r_1}...a_n^{r_n} = \frac{\sigma_\tau(h)}{h}$.

ii) les fonctions $f_1, ..., f_n$ ne vérifient aucune relation algébro-différentielle à coefficients dans K_τ si et seulement si les diviseurs périodiques des a_i sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants.

5.2 Démonstrations

Les démonstrations de ces énoncés relèvent des mêmes procédés que pour les q-différences. On n'en explicitera donc pas les détails.

A) τ-analogue de 4.61, 4.7, 4.8 et 4.10.

Definition 5.4 *[lemme] Soit $a \in K^*$, on dira que a est standard ([20] chap.2) si, pour tout $c \in \mathbb{C}$ dans le diviseur de a, et tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $c + n\tau$ n'apparait pas dans le diviseur de*

a. Alors,il existe un couple $(g, \overline{a})$*, avec* $g \in K^*$ *et* $\overline{a}$ *sous forme standard, tel que* $a = \overline{a}\frac{\sigma_\tau(g)}{g}$*.*
Une telle décompositionest dite forme standard de a.
Soient f *(resp.* $\overline{f}$*) une solution méromorphe sur* $\mathbb{C}^*$ *de* $\sigma_\tau(f) = af$ *(resp.* $\sigma_\tau(\overline{f}) = \overline{a}\overline{f}$*).*
Pour tout $n \geq 0$*, les corps* $K(\partial^i(f); 0 \leq i \leq n)$ *et* $K(\partial^i(\overline{f}); 0 \leq i \leq n)$ *coïncident.*

Lemme 5.5 *Soit a un élément de* K^**.*

1. *Si on impose au support du diviseur de a d'appartenir à la bande* $C = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < \mathcal{R}e(\frac{z}{\tau}) \leq 1\}$*, la décomposition de a sous forme standard est alors unique.*
2. *Soit* $a \in K^*$*. S'il existe un entier n, un élément* $h \in K^*$ *et un nombre complexe* $\mu \in \mathbb{C}^*$ *tels que* $a^n = (\mu)\frac{\sigma_\tau h}{h}$*, alors il existe un élément* $g \in K^*$ *et un nombre complexe* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ $a = \mu\frac{\sigma_\tau g}{g}$ *avec* λ *racine n-ième de l'unité.*
3. *Soient* $a \in \mathbb{C}(z)^*$*. Alors* $div_\tau(a) = 0$ *si et seulement si il existe un nombre complexe* $\mu \in \mathbb{C}$ *et* $h \in K^*$ *tel que* $a = \mu\frac{\sigma_\tau(h)}{h}$*.*

La raison des différences est que le point (0) n'est plus, contrairement aux q-différences fixé, par l'opérateur σ_τ. Ce phénomène se reflète dans le fait que la partie polaire en 0 de a n'intervient donc dans les critères du paragraphe 5.1. Dans le même esprit, dans le cadre des τ-différence le degré d'hyperalgébricité des solutions est inférieur ou égal à 1, contrairement au cas des q-différences où pour obtenir une relation hyperalgébrique, on peut être amené à considérer les dérivées secondes.

B) Vérification des hypothèses 3.1

Il s'agit de vérifier ces hypothèses pour le couple de corps aux différences formé de $K = \mathbb{C}(z)$ et de son extension $K' = K_\tau = C_\tau(z)$. On note $G_\tau = \mathrm{Aut}(C_\tau/\mathbb{C})$ (resp. $G_K = Aut(K_\tau/K)$) le groupe des automorphismes de l'extension $C_\tau/\mathbb{C}$ (resp. K_τ/K), et $C_\tau(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans C_τ. Pour tout élément u de $\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z}$, la translation par u définit un automorphisme du corps C_τ, dont on note γ_u le prolongement canonique à $C_\tau(X)$, défini par son action sur les coefficients. L'ensemble $\Gamma = \{\gamma_u, u \in \mathbb{C}/\tau\mathbb{Z}\}$ forme un sous-groupe de G_K, isomorphe à $\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z}$. Le lemme 4.2 est alors inchangé, le seul point à vérifier est que l'analogue aux τ-différences du lemme de [10] est toujours valable. La preuve de ce fait repose sur la transcendance de la fonction z sur le corps C_τ.

Lemme 5.6 *Soient* $(c_0, ..., c_N)$ *une famille d'éléments de* C_τ*. On suppose que :*

$$\sum_{i=0}^{N} c_i(z)z^i = 0. \tag{37}$$

Alors, pour tout $i = 0, ..., N$*,* $c_i = 0$*.*

C) τ-analogues de la proposition 4.11 et du théorème 4.12.

Les démonstrations de la proposition 5.1 et du théorème 5.3 sont analogues à ceux de la proposition 4.11 et du théorème 4.12. Les différences qui s'y reflètent résultent du lemme 5.5 de la partie A) et de la remarque qui le suit.

Application
Dans cette application $\tau = 1$.

Corollaire 5.7 *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_k$ des éléments de $\mathbb{C}$ et $n, m \in \mathbb{Z}^*$. Alors :*

1. *Si on suppose que les diviseurs périodiques $(-\overline{\alpha_i}), \sum_{i=0}^{n-1}(-\overline{\frac{i}{n}})$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants et ou que m et n sont multiplicativement indépendants, alors les fonctions $\Gamma(z+\alpha_i)$, m^z et $\Gamma(nz)$ sont algébriquement indépendantes sur K_τ .*
2. *Les fonctions $\Gamma(z+\alpha_i)$ et $\Gamma(nz)$ sont hyperalgébriquement indépendantes sur K_τ si et seulement si les diviseurs périodiques $(-\overline{\alpha_i}), \sum_{i=0}^{n-1}(-\overline{\frac{i}{n}})$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants.*

Démonstration
On a :

1. $\sigma_\tau(\Gamma(z+\alpha_i) = (z+\alpha_i)\Gamma(z+\alpha_i)$,
2. $\sigma_\tau(\Gamma(nz)) = \Gamma(nz)$,
3. $\sigma_\tau(m^z) = mm^z$

1) D'après le théorème 5.3,point i), les fonctions $\Gamma(z+\alpha_i)$, $\Gamma(nz)$, m^z sont algébriquement dépendantes sur K_τ si et seulement si il existe des entiers $r_1, ..., r_k, r, l$ non tous nuls et un élément $h \in K^*$ tels que

$$m^r \prod_{i=0}^{n-1}(nz+i)^l \prod_{i=1}^{k}(z+\alpha_i)^{r_i} = \frac{\sigma_\tau(h)}{h}.$$

Cette relation équivaut au fait que les diviseurs périodiques $(-\overline{\alpha_i}), \sum_{i=0}^{n-1}(-\overline{\frac{i}{n}})$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement dépendants et que $m^r n^{nl} = 1$. Ceci conclut la démonstration.

2) D'après le théorème 5.3, les fonctions $\Gamma(z+\alpha_i)$ et $\Gamma(nz)$ sont hyperalgébriquement indépendantes sur K_τ si et seulement si les diviseurs périodiques $(-\overline{\alpha_i}), \sum_{i=0}^{n-1}(-\overline{\frac{i}{n}})$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants. Ceci conclut la démonstration.

Références

[1] Y. André. Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*,vol. 34, 685–739, 2001.

[2] D. Bertrand. Unipotent radicals of differential Galois groups and integrals of solutions of inhomogeneous equations. *Math. Ann.*, 321(3) :645–666, 2001.

[3] S. B. Bank. Some results on hypertranscendental meromorphic functions. *Monatsh. Math.*, 90(4) :267–289, 1980.

[4] P. H. Berman and M. F. Singer. Calculating the Galois group of $L_1(L_2(y)) = 0$, L_1, L_2 completely reducible operators. *J. Pure Appl. Algebra*, 139(1-3) :3–23, 1999.

[5] Jean-Paul Bézivin. Sur les systèmes d'équations aux différences. *Aequationes Math.*, 60(1-2) :80–98, 2000.

[6] Z. Chatzidatkis, C. Hardouin and M.F. Singer. On the definitions of difference Galois groups.

[7] P. Deligne. *Catégories tannakiennes*, volume 87 of *Progr. Math.* Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 111-195.

[8] P. Deligne, J.S. Milne, A. Ogus and K. Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[9] L. Di Vizio, J.P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang. *Équations aux q-différences*, *Gazette des Mathématiciens*, N° 96, 2003, 20–49.

[10] P. I. Etingof. Galois groups and connection matrices of q-difference equations. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 1(1) :1–9 (electronic), 1995.

[11] C. Hardouin. *Structure galoisienne des extensions itérées de modules différentiels.* Thèse de doctorat de l'université Paris VI, 2006.

[12] K. Ishizaki. Hypertranscendency of meromorphic solutions of a linear functional equation. *Aequationes Math.*, 56(3) :271–283, 1998.

[13] N. M. Katz. Exponential sums and differential equations. *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, vol. 124, 1990.

[14] N. M. Katz. On the calculation of some differential Galois groups. *Invent. Math.*, 87(1) :13–61, 1987.

[15] S. Lang. *Algebra. Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Company, Inc.*,1965.

[16] A. Ovchinnikov. Tannakian categories, linear differential algebraic groups, and parametrized linear differential equations. *Preprint NCSU*, 2006.

[17] C. Praagman. Fundamental solutions for meromorphic linear difference equations in the complex plane, and related problems. *J. Reine Angew. Math.*, 369 :101–109, 1986.

[18] J.-P. Ramis. About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 1(1) :53–94, 1992.

[19] J. Sauloy. Galois theory of Fuchsian q-difference equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*,vol 36, 925–968 (2004).

[20] M. van der Put and M. F. Singer. *Galois theory of difference equations*, volume 1666 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[21] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*,volume 9 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1998.