Licence M.A.S.S. $2^{\text{ème}}$ année Analyse S4 (MI0A12Y)

Feuille de T.D. n°5 — Fourier c'est fou !

emmanuel bureau 1698 tél : 05 61 50 48 93 hallouin@univ-tlse2.fr www.math.univ-toulouse.fr/~hallouin/eh-mass2.html hallouin

Exercice 1 : Un hyper méga top classique

1. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique dont la restriction à $[-\pi,\pi]$ vaut $|x|$.
2. Montrer que cette série converge.
3. En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ puis celle de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Exercice 2 : Un simplement hyper classique

1. Déterminer la série de Fourier de la fonction impaire 2π-périodique dont la restriction à $[0,\pi]$ vaut $x(\pi-x)$.
2. Montrer que cette série converge.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
4. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$ puis $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$.

Exercice 3 : Des sommes à gogo !

1. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique dont la restriction à $[-\pi,\pi]$ vaut x^2.
2. Montrer que cette série converge.
3. En déduire les valeurs des sommes suivantes :

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, **(c)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, **(d)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$, **(e)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

Ca dépote non ? ! ? !

Exercice 4 : Coin-Coin !

1. Soit f la fonction 2π-périodique impaire égale à $\frac{\pi-x}{2}$ sur $[0,\pi]$.
a. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
b. Calculer la série de Fourier de f et montrer qu'elle converge.
c. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}$.

2. Soit g la fonction 2π-périodique impaire et définie sur $[0,\pi]$ par :

$$g(x)=\begin{cases} xf(1) & \text{si } x\in[0,1]\\ f(x) & \text{si } x\in[1,\pi]\end{cases}$$

a. Reprendre les deux premières questions précédentes.
b. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2}$.

3. Quelle relation avez-vous trouvée entre $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n)}{n^2}$. Ca vous en bouche un coin non ?

Exercice 5 : Morceaux de choix

1. Soit f la fonction 2π-périodique telle que sur $[-\pi,\pi]$, on ait $f(t)=1$ si $|t|\leqslant 1$ et $f(t)=0$ si $1<|t|\leqslant\pi$.
a. Calculer les coefficients de Fourier de f.
b. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}$.

2. Soit g la fonction 2π-périodique dont la restriction à $[0,2\pi]$ est donnée par $g(t)=t^2-2\pi t$. Calculer les coefficients de Fourier de g.
3. Calculer les produits scalaires $\langle f,f\rangle$, $\langle g,g\rangle$ et $\langle f,g\rangle$.
4. En déduire les valeurs des séries :

(**a**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2$, (**b**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$, (**c**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n^3}$.

Exercice 6 : Ne soyez pas trop fuMax !

Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \max(\cos x, 0)$.

1. Tracer le graphe des fonctions cos et f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f ; on rappelle la relation :

$$2\cos(nx)\cos(x) = \cos\left((n+1)x\right) + \cos\left((n-1)x\right).$$

3. Écrire la série de Fourier de f puis en déduire la valeur de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.