Licence M.A.S.S. 2$^{\text{ème}}$ année Analyse S4 (MI0A12Y)

Feuille de T.D. n°4 — Allons voir dans le rayon des séries entières

emmanuel bureau 1698 tél : 05 61 50 48 93 hallouin@univ-tlse2.fr www.math.univ-toulouse.fr/~hallouin/eh-mass2.html **hallouin**

Exercice 1 : En savoir (ou pas) un rayon sur le rayon de convergence

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(**a**) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$, (**b**) $\sum_{n\geqslant 0} n!z^n$, (**c**) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$, (**d**) $\sum_{n\geqslant 0} \cos(n)z^n$, (**e**) $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\frac{1}{n}\right)z^n$,

(**f**) $\sum_{n\geqslant 0}(2z)^n$, (**g**) $\sum_{n\geqslant 0}(nz)^n$, (**h**) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!}z^n$, (**i**) $\sum_{n\geqslant 0} ne^{-n}z^{3n}$, (**j**) $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt[n]{n}z^n$,

(**k**) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n3^n}{2^n}z^{3n}$, (**l**) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-2)^n}{n+1}z^{3n+1}$, (**m**) $\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{n^2}$.

Quand cela est possible donner le comportement sur le disque de convergence.

2. Calculer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \sigma_n z^n$ où σ_n désigne la somme des diviseurs (positifs) de n.

3. Calculer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} d_n z^n$ où d_n désigne le n-ème chiffre décimal de $\sqrt{2}$.

4. Calculer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n} z^{2n}$ en fonction du paramètre $\alpha > 0$.

Exercice 2 : Quelles sommes !

Après avoir déterminé le rayon de convergence des séries suivantes, déterminer leur somme :

(**1**) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}x^n$, (**2**) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!}x^n$, (**3**) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$,

(**4**) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}x^n$, (**5**) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\alpha}x^n$,

où $\alpha \in \mathbb{N}$ est un paramètre.

Exercice 3 : La série géométrique et ses dérivées

1. Donner le rayon de convergence et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} x^n$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer sa dérivée.

3. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{(1-x)^{1+\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+\alpha}{n} x^n$$

4. Application. Calculer la somme des séries entières suivantes :

(**a**) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$, (**b**) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}}x^n$, (**c**) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{2n}}x^{2n+1}$.

en précisant, à chaque fois, l'intervalle de convergence.

Exercice 4 : Please Help ! I cannot find any stupid title

1. a. Calculer le rayon de convergence de la série $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
b. En dérivant, donner une expression simple de S.

2. a. Développer la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ en série entière.
b. En déduire que $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ dès que $|x| < 1$.

3. Calculer les séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **(b)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n}}{2n+1}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{n(2n+1)}$

Exercice 5 : Valeur ajoutée

1. Calculer le rayon de convergence puis la somme de la série $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

2. En déduire la valeur de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 6 : Entièrement développable en série entière

Développer les fonctions suivantes en séries entières au voisinage de zéro en précisant à chaque fois l'intervalle de convergence.

(1) $\dfrac{1}{1-x}$, **(2)** $\dfrac{1}{(1-x)^2}$, **(3)** $\dfrac{1}{x-\alpha}$, **(4)** $\dfrac{1}{x^2-x-2}$,

(5) $\ln(x^2+x+1)$, **(6)** $\dfrac{e^x}{1-x}$.

On précisera, pour chaque cas, le rayon de validité de ce développement.

Exercice 7 : Avant le «calcul diff», des «équa diff»

Discuter si OUI ou NON, les équations différentielles suivantes admettent au moins une solution développable en série entière :

(1) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 2,\ y(0) = y'(0) = 0$, **(2)** $xy' - y = \frac{x}{1-x}$, **(3)** $4xy'' + 2y' + y = 0$.

Exercice 8 : Comparaisons flatteuses !

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2 z^n$, **(b)** $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$, **(c)** $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n! a_n}{n^n} z^n$.