Licence M.A.S.S. 1ère année Algèbre S1 (MI0B01X)

Feuille de T.D. n°4 — Simplissime !

emmanuel bureau 1698 tél : 05 61 50 48 93 hallouin@univ-tlse2.fr www.math.univ-toulouse.fr/~hallouin/eh-mass1.html **hallouin**

Exercice 1 : Travaux de reconnaissance

1. Parmi les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ suivantes, identifier les (non-)éléments simples :

(**a**) $3X^2$, (**b**) X^2-1, (**c**) $\frac{3}{X+1}$, (**d**) $\frac{2X}{X-2}$, (**e**) $\frac{X}{(X+3)^4}$, (**f**) $\frac{-5}{(X+7)^2}$, (**g**) $\frac{X-1}{X^2-3X+2}$,

(**h**) $\frac{2X+1}{X^2-5}$, (**i**) $\frac{2X+1}{X^2+1}$, (**j**) $\frac{X^3-X+1}{(X^2+X+1)^2}$, (**k**) $\frac{-X+3}{(X^2+X+5)^3}$, (**l**) $\frac{1}{X^3+X+1}$,

(**m**) $\dfrac{-2}{X^3-6X^2+12X-8}$, (**n**) $\dfrac{3X-1}{X^4+2X^2+1}$, (**o**) $\dfrac{2}{X^3+\frac{3}{2}X^2+1}$.

2. Voici une liste de fractions rationnelles :

(**a**) $\frac{X^3+X+1}{(X-1)^2(X+1)}$, (**b**) $\frac{X^4+X+1}{(X-1)^2(X+1)}$, (**c**) $\frac{X^4+1}{X^5+X^6}$, (**d**) $\frac{X^4+1}{X^3(X^2+X+1)}$,

(**e**) $\frac{X^4+1}{X^3(X^2+X+1)^2}$, (**f**) $\frac{X^2-2}{X^3-1}$, (**g**) $\frac{X^3-2}{X^3-1}$.

Trouver leur décomposition en éléments simples dans la liste suivante :

(**a**) $1-\frac{1/3}{X-1}+\frac{X/3+2/3}{X^2+X+1}$, (**b**) $\frac{2}{X}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X^3}-\frac{1}{X^4}+\frac{1}{X^5}-\frac{2}{X+1}$,

(**c**) $-\frac{1/3}{X-1}+\frac{4X/3+5/3}{X^2+X+1}$, (**d**) $-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{X^3}+\frac{X+1}{X^2+X+1}$, (**e**) $1+\frac{5/4}{(X-1)}+\frac{3/2}{(X-1)^2}-\frac{1/4}{(X+1)}$,

(**f**) $\frac{1}{X}-\frac{2}{X^2}+\frac{1}{X^3}+\frac{-X+1}{(X^2+X+1)}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}$, (**g**) $X+1+\frac{7/4}{(X-1)}+\frac{3/2}{(X-1)^2}+\frac{1/4}{(X+1)}$.

Exercice 2 : A fond la forme !

Soit $R=\frac{N}{D}$ une fraction rationnelle avec $N,D\in\mathbb{R}[X]$ et $D\neq 0$. On suppose que la factorisation en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ de D est de la forme $D_1^{e_1}\times\cdots\times D_r^{e_r}$ où les $D_i\in\mathbb{R}[X]$ sont irréductibles et où $e_i\in\mathbb{N}^*$.

1. a. Combien la décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{R}(X)$ compte-t-elle de termes au maximum ?

b. Quels sont les éléments simples susceptibles d'intervenir dans cette décomposition ?

2. a. Montrer que la partie entière de R est nulle si et seulement si $\deg(R)<0$.

b. De façon générale exprimer le degré de la partie entière de R en fonction de son degré.

Exercice 3 : Des «DES»

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

(**1**) $\frac{1}{(X-1)(X+1)}$, (**2**) $\frac{X^4+1}{(X+1)^2(X+2)}$, (**3**) $\frac{2X^3-11X^2+19X-2}{X^3-4X^2-3X+18}$, (**4**) $\frac{1}{X^3(X-2)^2}$,

(**5**) $\frac{X^6-2X}{(X^2+1)(X^2-1)}$, (**6**) $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$, (**7**) $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$, (**8**) $\frac{2X^2+5}{(X^2-1)^3}$,

(**9**) $\frac{X^5+1}{X^3}$, (**10**) $\frac{X^5+X+1}{(X-2)^3}$, (**11**) $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$, (**12**) $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$, (**13**) $\frac{X^5+2}{(X-1)^2(X+1)^2}$,

(**14**) $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$. (**15**) $\frac{3X^2+X+1}{X^3-X^2-4X+4}$, (**16**) $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$, (**17**) $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$,

$$(\mathbf{18})\quad \frac{2X^3-3X^2+X+1}{X^3(X-1)},\qquad (\mathbf{19})\quad \frac{X^3+X^2-9X+16}{X^2+X-6},\qquad (\mathbf{20})\quad \frac{3X^3+3X^2+2X+1}{(X^2+X+1)(X^2+1)},\qquad (\mathbf{21})\quad \frac{X^3+7X^2+10X+8}{X^3(X+2)},$$

$$(\mathbf{22})\quad \frac{1}{X(X+1)\times\cdots\times(X+n)}.$$

où dans la dernière $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 : Une «DES»

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $\frac{1}{X^n-1}$; indication : pour simplifier les calculs, relier les coefficients à déterminer aux valeurs de la dérivé de $X^n - 1$ en les racines n-èmes de l'unité.

Exercice 5 : D' pas !

Soit $D = (X - r_1) \times \cdots \times (X - r_n)$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ayant n racines distinctes. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{D'}{D}$.