

## Feuille de T.D. n°3 — «Jolie même», euh non «poly nôme»

**Exercice 1 : Gymnastique euclidienne (2-ème)**

Calculer le pgcd des polynômes  $P$  et  $Q$  suivants en complétant au moins un des calculs par la détermination des coefficients de Bezout.

1.  $P = X^4 + 6X^3 + 8X^2 - 6X - 9$ ,  $Q = X^4 + X^3 - X - 1$  ;
2.  $P = X^5 + X^4 + X^3 - X^2 - X - 1$ ,  $Q = X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 5X^2 + 3X - 1$  ;
3.  $P = X^5 + X + 1$ ,  $Q = X^4 + X + 1$ .

**Exercice 2 : Je ne trouve pas de titre débile**

On se place dans  $\mathbb{R}[X]$  l'anneau des polynômes à coefficients réels.

1. Existe-t-il des polynômes qui divisent tous les polynômes ? Si oui en dresser la liste.
2. Existe-t-il des polynômes divisible par tous les polynômes ? Si oui en dresser la liste.
3. Qu'est-ce qu'un inversible de  $\mathbb{R}[X]$ . Qui sont-ils ?
4. a. Montrer que si  $P \mid Q$  et  $\deg(P) = \deg(Q)$  alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $P = \lambda Q$ .  
b. En déduire que si  $P$  et  $Q$  sont de plus unitaires alors la conclusion est  $P = Q$ .  
c. Que peut-on dire de  $P$  et  $Q \in \mathbb{R}[X]$  s'ils satisfont  $P \mid Q$  et  $Q \mid P$  ?

**Exercice 3 : De beaux restes**

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .  
a. Quel est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - a$  ?  
b. Quel est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  quand  $a \neq b$  ?  
c. Même question quand  $a = b$ .
2. Trouver les réels  $a$  pour lesquels le polynôme  $X^4 - X + a$  est divisible par  $X^2 - aX + 1$ .
3. Trouver les réels  $a, b$  tels que  $X^2 + 2$  divise  $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ .
4. Pour  $n \geq 1$ , quel est le reste de la division euclidienne de  $X^n + X + 1$  par  $(X - 1)^2$  ?

**Exercice 4 : Quand une racine en donne une autre**

1. Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels admettant une racine  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , i.e. complexe non réelle.  
a. Vérifier que  $\bar{z}$  est aussi racine de  $P$ .  
b. Montrer que si  $z$  est d'ordre  $e$  alors il en est de même de  $\bar{z}$ .  
c. En déduire que  $(X^2 - 2\Re(z)X + |z|^2)^e \in \mathbb{R}[X]$  divise  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Soit  $P$  un polynôme pair, i.e. sans monôme de degré impair, ou encore de la forme  $c_{2n}X^{2n} + c_{2(n-1)}X^{2(n-1)} + \dots + c_2X^2 + c_0$ . Montrer que si  $r$  est racine de  $P$  alors il en est de même de  $-r$ .
3. Soit  $P(X) = c_dX^d + c_{d-1}X^{d-1} + \dots + c_1X + c_0$  un polynôme de degré  $d$ . Le polynôme **réciroque** de  $P$  est le polynôme  $Q(X) = c_0X^d + c_1X^{d-1} + \dots + c_{d-1}X + c_d$ . Un polynôme  $P$  est dit **symétrique** s'il est égal à son polynôme réciroque. Par exemple  $2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$  et  $5X^3 - 2X^2 - 2X + 5$  sont symétriques.  
a. Montrer que si  $r \neq 0$  est racine de  $P$  alors  $1/r$  est racine de  $Q$  son polynôme réciroque.  
b. Montrer que les racines d'un polynôme symétrique  $P$  sont non nulles, puis que si  $r$  est racine de  $P$  alors  $1/r$  est aussi racine de  $P$ .

**Exercice 5 : Retour aux racines**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme unitaire dont la factorisation en irréductibles est la suivante :

$$P(X) = (X - r_1)^{e_1} \times \dots \times (X - r_n)^{e_n}, \quad r_i \in \mathbb{C}, e_i \in \mathbb{N}^*, \forall 1 \leq i \leq n,$$

les complexes  $r_i$  étant deux-à-deux distincts.

1. a. Quel est le degré de  $P$  (en fonction des exposants  $e_i$ ) ?  
 b. Combien  $P$  compte-t-il de racines distinctes ?
2. a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $r_i$  soit racine de  $\text{pgcd}(P, P')$ .  
 b. Quand  $r_i$  est racine de  $\text{pgcd}(P, P')$ , quelle est sa multiplicité ?
3. Établir l'égalité  $\deg(\text{pgcd}(P, P')) = \deg(P) - n$ .

### Exercice 6 : Square free

Soit  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}$  trois réels deux-à-deux distincts. Considérons le polynôme :

$$P = (X - r_1)(X - r_2)^2(X - r_3)^3 \in \mathbb{R}[X].$$

1. Quelle est la décomposition en irréductibles de  $D = \text{pgcd}(P, P')$  ?
2. En déduire que le produit  $(X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)$  s'obtient grâce à une division euclidienne ne faisant intervenir que  $P$  et  $D$ .
3. Retrouver les facteurs  $(X - r_i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) en enchaînant uniquement des divisions, des dérivations et des pgcd.

### Exercice 7 : Racines du bien

1. Déterminer toutes les racines réelles des polynômes :

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} & X^3 - 3X^2 + 4, & \text{(b)} & X^3 + 2X^2 - 25X - 50, & \text{(c)} & X^4 + X^2 + 1, \\
 \text{(d)} & X^5 - 6X^4 + 10X^3 + 4X^2 - 24X + 16, & \text{(e)} & X^5 - 4X^4 + X^3 + 14X^2 - 20X + 8.
 \end{array}$$

2. Déterminer toutes les racines réelles du polynôme  $8X^4 - 44X^3 + 54X^2 - 25X + 4$  sachant qu'il admet une racine triple.
3. Déterminer toutes les racines dans  $\mathbb{C}$  du polynôme :

$$P(X) = X^4 - (6 + i)X^3 + 6(i + 2)X^2 - 4(2 + 3i)X + 8i$$

sachant qu'il admet une racine réelle **triple**.

### Exercice 8 : Décomposition avancée

1. Décomposer en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$  les polynômes :

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} & X^3 + 2X^2 + 2X + 1, & \text{(b)} & X^4 + X^3 + X^2 + X + 1, & \text{(c)} & 2X^4 - 3X^3 - X^2 - 3X + 2, \\
 \text{(d)} & X^3 - 3, & \text{(e)} & X^4 + 1, & \text{(f)} & X^6 + 1, & \text{(g)} & X^4 - 3X^2 - 4, \\
 \text{(h)} & X^4 + 2X^2 + 1, & \text{(i)} & X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1, & \text{(j)} & X^9 + X^6 + X^3 + 1.
 \end{array}$$

2. Décomposer en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^6 - 3X^5 + 6X^4 - 7X^3 + 6X^2 - 3X + 1$  sachant qu'il compte  $-j$  parmi ses racines.
3. Factoriser en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 4X + 4$  sachant qu'il est un carré.
4. Décomposer en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^6 + 2X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$  sachant que c'est un carré.
5. Décomposer  $P(X) = 8X^3 + 4X^2 - 2X - 1$  en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sachant qu'il admet une racine double.
6. Décomposer en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^5 - 4X^4 - 18X^3 + 72X^2 + 81X - 324$  sachant qu'il admet deux racines doubles.
7. Décomposer le polynôme  $P(X) = 6X^5 - 15X^4 + 18X^2 - 6X - 3$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , en remarquant que c'est le polynôme dérivé du polynôme  $(X - 1)^3(X + 1)^2(X - 2)$ .

8. a. Montrer que  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  est racine du polynôme  $P(X) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$  puis calculer sa multiplicité.
- b. En utilisant la parité de  $P$ , trouver toutes les racines de  $P$ .
- c. En déduire les décompositions de  $P$  en irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$ .
9. Soit  $P(X) = X^4 + X^3 - X^2 + 6$ . Calculer  $P(1+i)$  puis en déduire la décomposition en irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .
10. Posons  $P = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4 \in \mathbb{R}[X]$ .
- a. Calculer  $\text{pgcd}(P, P')$ .
- b. En déduire que  $P$  n'a que des racines doubles puis les calculer.
- c. Décomposer  $P$  en irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  puis  $\mathbb{R}[X]$ .
11. Considérons le polynôme  $P(X) = 2X^5 + 5X^4 + 8X^3 + 7X^2 + 4X + 1$ .
- a. Calculer  $\text{pgcd}(P, P')$ .
- b. En déduire la décomposition en irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
12. Soit  $P(X) = X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1$  dont on note  $r$  une racine.
- a. Montrer que  $r \neq 0$  puis que  $r^2 - 5r + 6 - \frac{5}{r} + \frac{1}{r^2} = 0$ .
- b. Calculer  $(r + \frac{1}{r})^2$  puis en déduire que  $s = r + \frac{1}{r}$  est racine d'un polynôme  $Q$  de degré 2 que l'on déterminera.
- c. Trouver les racines de  $Q$  puis en déduire celles de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ .
13. Décomposer  $X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18$  en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sachant que deux de ses racines ont un produit égal à six.
14. Décomposer en irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $6X^4 + X^3 + (6i + 10)X^2 + (2 + i)X - (4 + 2i)$  sachant qu'il admet des racines réelles.
15. Factoriser en irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $X^4 - 2(i + 2)X^3 + 6(i + 1)X^2 - 4(2i + 1)X + 4i$  sachant qu'il admet une racine triple.

### Exercice 9 : Décomposition très avancée

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^n - 1$ .
- a. Trouver tous les complexes  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $(z + 1)^n = (z - 1)^n$ .
- b. Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $(X + 1)^n - (X - 1)^n$ .

### Exercice 10 : True or False ?

Etudier la validité des affirmations suivantes.

- Si  $P(r) = P'(r) = 0$  alors  $r$  est une racine double de  $P$ .
- Si  $r$  est racine de  $P'$  alors  $r$  est racine double de  $P$ .
- Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Si  $P' \mid P$  alors  $P$  n'a que des racines doubles.
- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Si  $\text{pgcd}(P, P') = 1$  alors  $P$  n'a que des racines simples.
- Deux polynômes unitaires de  $\mathbb{R}[X]$  qui ont les mêmes racines sont égaux.
- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $r \in \mathbb{R}$ . Si  $P'(r) = P''(r) = 0$ , alors  $r$  est une racine au moins triple de  $P$ .
- Une racine d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  qui est une racine double de  $P'$  est une racine triple de  $P$ .
- Le complexe  $1 + j$  peut être racine double d'un polynôme de degré 3, à coefficients réels.
- Un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré 2 est irréductible.
- Un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  qui n'a pas de racine réelle est irréductible.
- Un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ , de degré  $\geq 2$ , n'est jamais irréductible dans  $\mathbb{C}[X]$ .

### Exercice 11 : Un cocktail arithmétique des entiers et des polynômes, si'ous p'lait !

Soit  $P(X) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme de degré 3. On suppose que le rationnel  $r = \frac{a}{b}$  avec  $\text{pgcd}(a, b) = 1$  est racine de  $P$ .

- Montrer que  $a$  divise  $\delta$  puis que  $b$  divise  $\alpha$ .
- a. Rappeler ce que vaut le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - 1$ .
- b. En déduire que  $a - b$  divise  $P(1)$ .

3. Montrer de même que  $a + b$  divise  $P(-1)$ .

4. Sachant que le polynôme  $Q(X) = 3X^3 + 10X^2 + 4X - 7$  admet une racine rationnelle, factoriser ce polynôme.

### Exercice 12 : A la recherche du paramètre perdu

Soit  $t \in \mathbb{R}$  un paramètre et  $P(X) = X^3 - 3X + t$  un polynôme.

1. Pour quelles valeurs de  $t \in \mathbb{R}$  le polynôme  $P$  admet-t-il une racine au moins double ?
2. Pour chacune des valeurs de  $t$  précédentes, décomposer  $P$  en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ .
3. En dehors des valeurs de  $t$  précédentes, que vaut  $\text{pgcd}(P, P')$  ?

### Exercice 13 : Z'avez encore perdu un paramètre !

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  un paramètre et considérons le polynôme  $P(X) = X^4 + (\alpha + 1)X^2 + \alpha$ .

1. a. Montrer que  $i$  est racine de  $P$ .  
b. En déduire que  $X^2 + 1$  divise  $P$  puis calculer le quotient de  $P$  par  $X^2 + 1$ .
2. Donner selon les valeurs de  $\alpha$  la décomposition en irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Pour quelles valeurs de  $\alpha$ , le polynôme  $P$  est-il premier avec  $X^3 - 3X^2 + 2X$  ?

### Exercice 14 : Agent double, mais non racine double

Soit  $p, q$  deux réels avec pour simplifier  $p \neq 0$ . On cherche une condition nécessaire et suffisante sur  $p$  et  $q$  pour que le polynôme  $P(X) = X^3 + pX + q$  ait une racine double.

1. Calculer la suite des restes fournie par l'algorithme d'Euclide avec comme polynômes de départ  $X^3 + pX + q$  et  $3X^2 + p$ .
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que  $P$  admette une racine double.

### Exercice 15 : Étrange équation I

Le but de cet exercice est de trouver tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant l'égalité  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ .

1. Montrer que 1 et  $-1$  sont racines de  $P$ .
2. En déduire qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X) = (X^2 - 1)Q(X)$ .
3. a. Exprimer  $\deg(P(X^2))$  en fonction de  $\deg(P(X))$ .  
b. Montrer que  $Q$  est constant.
4. En déduire la forme des polynômes vérifiant l'équation de départ.

### Exercice 16 : Étrange équation II

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant l'équation  $XP(X - 1) = (X - 2)P(X)$ .

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de  $P$ .
2. Soit  $r \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ .
  - a. Montrer que si  $r \neq 0$  alors  $r - 1$  est encore une racine de  $P$ .
  - b. De même, montrer que si  $r \neq 1$  alors  $r + 1$  est encore une racine de  $P$ .
3. a. En déduire que si  $P$  a une racine  $r \notin \{0, 1\}$ , alors il admet une infinité de racines.  
b. Que peut-on en déduire concernant  $P$  ?
4. Dans cette question, on suppose que  $P$  est non nul.
  - a. Prouver que seuls 0 et 1 sont racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ .
  - b. En déduire que la factorisation de  $P$  en irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  est de la forme  $cX^\alpha(X - 1)^\beta$  avec  $c \in \mathbb{C}^*$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ .
  - c. Trouver tous les polynômes  $P$  non nuls solution de l'équation.

### Exercice 17 : Étranges équations III

1. Trouver tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$ .
2. Trouver tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$ .

### Exercice 18 : Élémentaire ! mes chères fonctions symétriques

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -1 \end{cases}$$

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xy + xz + yz = -20 \\ xyz = -48 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + xz + yz = 1 \\ xyz = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = -5 \\ xy + xz + yz = 3 \\ xyz = 9 \end{cases}$$

3. Soit  $x, y, z \in \mathbb{C}$ . On note  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  les fonctions symétriques élémentaires en  $x, y, z$ , c'est-à-dire :

$$\sigma_1 = x + y + z, \quad \sigma_2 = xy + xz + yz, \quad \sigma_3 = xyz.$$

a. Exprimer les quantités :

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

en fonction de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

b. En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$ , des systèmes d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -1 \end{cases}$$

### Exercice 19 : Quand les coproduits des racines sont racines

Soit  $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  dont on note  $r_1, r_2, r_3$  les trois racines complexes. Déterminer en fonction de  $a, b$  et  $c$  un polynôme  $Q$  ayant pour racines les produits  $r_1r_2, r_1r_3$  et  $r_2r_3$ .

### Exercice 20 : Incorruptible ? Indestructible ? Mais non irréductible !

Dans cet exercice le corps de base  $K$  sera alternativement  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

1. Rappeler la définition d'un polynôme irréductible de  $K[X]$ . Donner la version «écriture mathématique» de cette définition.

2. Caractériser le fait qu'un polynôme de  $K[X]$  n'est pas irréductible.

3. a. Montrer qu'un polynôme de degré 1 est toujours irréductible.

b. Montrer qu'un polynôme de degré 2 est irréductible sur  $K$  si et seulement s'il n'a pas de racine dans  $K$ .

c. Et pour un polynôme de 3, puis 4 ?

4. Donner un exemple de polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  qui est irréductible sur  $\mathbb{R}$  mais qui ne l'est plus sur  $\mathbb{C}$ .

5. Donner un exemple de polynôme de  $\mathbb{Q}[X]$  de degré 3 et irréductible sur  $\mathbb{Q}$ . Le reste-t-il sur  $\mathbb{R}$  ?

### Exercice 21 : J'crois bien qu'j'ai fait un impair

Montrer qu'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré impair admet toujours une racine réelle.