

## Feuille de T.D. n°3 — Temps variable

emmanuel bureau 1698 tél : 05 61 50 48 93 hallouin@univ-tlse2.fr www.math.univ-toulouse.fr/~hallouin/eh-mass2.html hallouin

**Exercice 1 : Il s'en passe des choses en  $(0, 0)$** Étudier la continuité des fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , définies par :

$$(1) \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, f(0, 0) = 0; \quad (2) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, f(0, 0) = 0;$$

$$(3) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, f(0, 0) = 0; \quad (4) \quad f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}, f(0, 0) = 0;$$

$$(5) \quad f(x, y) = \frac{1 - e^{x^4 + y^4}}{x^4 + y^4}, f(0, 0) = -1; \quad (6) \quad f(x, y) = \frac{1 - e^{x^4 + y^4}}{(x^2 + y^2)^2}, f(0, 0) = -1$$

$$(7) \quad f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f(0, 0) = 0; \quad (8) \quad f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{x^2 + y^2}, f(0, 0) = 0;$$

$$(9) \quad f(x, y) = \frac{\sin x - y}{x - \sin y}, f(0, 0) = 0; \quad (10) \quad f(x, y) = \frac{\sin(x^4) + \sin(y^4)}{\sqrt{x^4 + y^4}}, f(0, 0) = 0.$$

Calculer les dérivées partielles de ces fonctions, là où c'est possible. Ces fonctions sont-elles de classe  $\mathcal{C}^1$  sur leur domaine de continuité.**Exercice 2 : Le point  $(0, 0, 0)$  étant jaloux des faveurs accordées au point  $(0, 0)$ ...**Étudier la continuité en  $(0, 0, 0)$  de la fonction définie par :

$$f(0, 0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y, z) = \frac{xy + yz + xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

**Exercice 3 : Quand la droite  $y = x$  joue les frontières**Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} \quad \text{si } x \neq y.$$

Dans la suite, on note  $I_{x,y}$  l'intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $x$  et  $y$  (si bien que  $I_{x,x} = \{x\}$ ).1. Montrer l'existence d'une application  $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$c(x, y) \in I_{x,y} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \cos(c(x, y)).$$

2. Calculer pour  $a \in \mathbb{R}$  la  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} c(x, y)$ ; en déduire la continuité de  $f$  en tout point  $(a, a)$  puis vérifier qu'il en est de même sur  $\mathbb{R}^2$ .**Exercice 4 : Cette fois c'est la droite  $y = 0$  qui fait des siennes**On considère une fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, on pose  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  et on définit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  via  $f(x, y) = (x + y)\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ .1. Montrer que  $f$  est continue sur  $D$ .2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\varphi$  pour que  $f$  soit prolongeable par continuité à tout  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice 5 : Sensations extrêmes

Déterminer les extrema locaux des fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  suivantes :

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2, \quad (3) \quad f(x, y) = x^3 + y^3,$$

$$(4) \quad f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y, \quad (5) \quad f(x, y) = 4x^2 - 2xy + 7y^2 + 4,$$

$$(6) \quad f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4, \quad (7) \quad f(x, y) = \frac{xy}{1 + 3x^2 + y^2}, \quad (8) \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2.$$

Ces extrema locaux sont-ils globaux ?

### Exercice 6 : Modèles compacts

1. Etudier les extrema locaux et globaux de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x, y) = xy\sqrt{1 - x - y}$$

sur le domaine  $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0\}$ . On commencera par représenter graphiquement ce domaine.

2. Mêmes questions avec la fonction  $g$  définie par :

$$g(x, y) = 7xy + 4(x^3 - y^3) + x - y$$

sur le domaine  $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, |y| \leq x\}$ .

### Exercice 7 : Modèles moins compacts

1. Etudier les extrema locaux et globaux de la fonction  $f(x, y) = \cos(x)\sin(y) + \sin^2(x)$  sur le domaine  $]0, \pi[ \times ]-\pi, \pi[$ .

2. Même question avec la fonction  $g(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$  sur le domaine  $]0, 1[ \times ]0, 1[$ .

### Exercice 8 : Faire valser les frontières

Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$F(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

1. a. Déterminer les points critiques de  $F$  sur  $\mathbb{R}^2$ .  
b. Pour chacun de ces points, décider s'il s'agit d'un extremum local de  $F$ .
2. On considère le domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
  - a. Dessiner  $D$  et montrer que c'est un compact de  $\mathbb{R}^2$ .
  - b. Justifier le fait la restriction de  $F$  à  $D$  admette un minimum  $m$  et un maximum  $M$ .
  - c. Montrer que ces extrema se trouvent forcément sur la frontière  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .
  - d. En étudiant la fonction  $\theta \mapsto F(\cos(\theta), \sin(\theta))$ , déterminer les valeurs de  $m$  et  $M$ .

### Exercice 9 : La frontière de l'aube

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$ .

1. a. Déterminer les points critiques de  $f$ .  
b. Pour chacun d'entre eux décider si ce point est un minimum local ou un maximum local ou ni l'un ni l'autre.
2. La fonction  $f$  possède-t-elle des extrema globaux sur  $\mathbb{R}^2$  ? Justifier.
3. On restreint maintenant la fonction au domaine :

$$\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

- a. Dessiner ce domaine.
- b. Pourquoi la fonction  $f$  admet-elle forcément un minimum et un maximum global sur ce domaine ?
- c. Calculer ces valeurs minimale et maximale ainsi que les points où elles sont atteintes.