

Feuille de T.D. n°2 — Loi des séries

Exercice 1 : Les séries «normales» n'ont rien d'extraordinaire !

Etudier les convergences simple et normale des séries de fonctions $\sum_n u_n(x)$ pour fonctions u_n suivantes :

$$(1) \quad u_n(x) = x(1-x)^n, \text{ sur } [\alpha, 1] \quad (0 < \alpha < 1) \quad ; \quad (2) \quad u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x}, \text{ sur } [\alpha, +\infty[\quad (\alpha \in \mathbb{R}_+^*) \quad ;$$

$$(3) \quad u_n(x) = \frac{1}{1+x^n}, \text{ sur } [\alpha, +\infty[\quad (\alpha > 1) \quad ; \quad (4) \quad u_n(x) = x^{n+1} \ln x, \text{ sur } [0, 1] \quad ;$$

$$(5) \quad u_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}, \text{ sur } \mathbb{R} \quad ; \quad (6) \quad u_n(x) = \frac{1}{n^2x^2}, \text{ sur } [\alpha, +\infty[\quad (\alpha > 0) \quad ;$$

$$(7) \quad u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}, \text{ sur } \mathbb{R} \quad ; \quad (8) \quad u_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}, \text{ sur } \mathbb{R} \setminus]-\alpha, \alpha[\quad (\alpha > 0) \quad ;$$

Exercice 2 : Attention Déviation... mais non Dérivation

On s'intéresse à la série de fonctions $\sum_n u_n(x)$ avec $u_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum_{n \geq 0} e^{-nx^2}$ est convergente, puis calculer sa somme que l'on notera v .

2. a. Pour tout $\alpha > 0$, montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est normalement convergente sur $]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[$.

b. En déduire que la fonction somme $u : x \mapsto \sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est continue sur \mathbb{R}^* .

3. En reliant les fonctions u et v , déduire une expression simple de u .

Exercice 3 : Intervention musclée... mais non interversion musclée !

On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer la convergence normale de cette série. On note u sa somme.

2. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$.

b. Montrer que u est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

c. Montrer que :

$$\int_0^\pi u(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

C'est dingue non ?

Exercice 4 : Un peu de tendresse dans ce monde cruel

On se penche (tendrement, si, si!!) sur la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour $x \geq 0$.

1. Etudier la convergence simple de cette série sur \mathbb{R}_+ .

2. Montrer que S est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et même de classe \mathcal{C}^1 , la classe !

3. Etablir la jolie, jolie formule $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

4. En déduire un équivalent de S en zéro.

Exercice 5 : Chassez le «naturel», il revient au galop

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+x)}$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie puis qu'elle est continue.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
3. On cherche maintenant un équivalent de f au voisinage de $+\infty$. Pour cela on fait intervenir la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{xn}$.
 - a. Que vaut cette somme ? Pourquoi est-il «naturel» de faire intervenir cette somme ?
 - b. Trouver un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+x)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{xn}$.
 - c. En déduire l'équivalent de f cherché.

Exercice 6 : Zéro pointé (du doigt)

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n(1+nx)}$ et on s'intéresse à la série de fonctions associée : $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$.

1. a. Montrer la convergence simple de la série sur \mathbb{R}_+^* .
b. Et en zéro que se passe-t-il ?
2. Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
 - a. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.
 - b. Montrer que S est décroissante sur $]0, +\infty[$.
3. Pour $N \geq 1$, on pose $S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x)$.
 - a. Montrer que $S(x) \geq S_N(x)$.
 - b. Prouver que $S_N(1/N) \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$.
 - c. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} S(x)$.

Exercice 7 : Concours de la plus belle jolie formule — 1-ère candidate

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(x) = x^2 e^{-nx} \quad \text{et} \quad v_n(x) = \int_0^x u_n(t) dt.$$

1. a. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

On pose $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- b. Montrer que U est continue sur \mathbb{R}_+ .
 - c. Calculer U explicitement.
2. a. Calculer v_n au moyen d'une intégration par parties.
b. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

On pose $V(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$.

3. Exprimer $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x)$ sous la forme d'une série.
4. Montrer que $V(x) = \int_0^x U(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
5. En déduire la très jolie formule :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt.$$

Exercice 8 : Concours de la plus belle jolie formule — 2-ème et 3-ème candidates

Montrer les hyper méga top jolies formules :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \quad \text{et} \quad \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 9 : Avec un paramètre

Intéressons nous à la série de fonctions de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dont le terme général est défini par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n(x) = \frac{x^\alpha}{n + n^2 x^2},$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre.

1. Etudier la convergence simple sur \mathbb{R}_+ .
2. a. Si $\alpha \leq 2$, montrer que la série converge normalement sur \mathbb{R}_+ ;
b. Si $\alpha > 2$, montrer que la série converge normalement sur tout intervalle $[0, X]$ avec $X \geq 0$.
c. Que peut-on dire de la convergence normale sur \mathbb{R}_+ quand $\alpha > 2$?
3. En déduire que pour tout $\alpha > 0$, la somme $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
4. Calculer dans tous les cas la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.

Exercice 10 : La fonction à un million de dollars

Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$; c'est la très célèbre (dans son quartier) *fonction zeta de Riemann*¹.

1. Montrer que la définition de la fonction ζ est bien licite.
2. Montrer que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
3. Montrer qu'elle y est même dérivable et calculer sa dérivée.
4. Montrer que $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$.
5. Mieux on va calculer un équivalent de $\zeta(s)$ au voisinage de 1^+ . Pour cela, suivez le guide.
 - a. Pour $n \geq 2$, comparer $\frac{1}{n^s}$ aux intégrales $\int_{n-1}^n \frac{dt}{t^s}$ et $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}$.
 - b. En déduire que $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$.
 - c. Donner un équivalent simple de ζ quand $s \rightarrow 1^+$.

1. Georg Friedrich Bernhard Riemann est un célèbre mathématicien allemand né en 1826 et décédé quarante ans après en 1866. Il a laissé une oeuvre mathématique gigantesque.