Licence M.A.S.S. 1ère année Algèbre S1 (MI0B01X)

Feuille de T.D. n°2 — Diviser pour mieux régner

emmanuel bureau 1698 tél : 05 61 50 48 93 hallouin@univ-tlse2.fr www.math.univ-toulouse.fr/∼hallouin/eh-mass1.html **hallouin**

Exercice 1 : Restons divisés !

1. Étudier la validité des relations de divisibilité suivantes :

(**a**) $4 \mid 5$, (**b**) $3 \mid 123$, (**c**) $11 \mid 517$, (**d**) $5 \mid 126$, (**e**) $15 \mid 125$, (**f**) $15 \mid 165$.

2. Existe-t-il un entier qui divise tous les entiers. Si oui, en dresser la liste.
3. Existe-t-il un entier qui est divisible par tous les entiers. Si oui, en dresser la liste.
4. Que peut-on dire de a et $b \in \mathbb{Z}$ s'ils vérifient $a \mid b$ et $b \mid a$?
5. a. Étudier la validité des implications suivantes :

$$\begin{aligned}
a \mid b \text{ et } a \mid c &\implies a \mid (b+c),\\
a \mid b \text{ et } a \mid c &\implies 2a \mid (b+c),\\
a \mid b \text{ et } a' \mid b' &\implies (a+a') \mid (b+b'),\\
a \mid b \text{ et } a \mid c &\implies a \mid (b-c),\\
a \mid b \text{ et } a' \mid b &\implies aa' \mid b,\\
a^2 \mid b^2 &\implies a \mid b,\\
a \mid bc &\implies a \mid b \text{ ou } a \mid c,\\
a \mid b+c &\implies a \mid b \text{ ou } a \mid c.
\end{aligned}$$

b. Énoncer les réciproques des implications précédentes et étudier leur validité.

Exercice 2 : Entiers consécutifs

1. Trouver tous les entiers n tels que $n \mid n+1$. Même question avec n et $n+2$.
2. Trouver les entiers $n \geqslant 1$ tels que $n-1$ divise n^2+1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$6 \mid n(n-1)(n+1), \quad 6 \mid n(n^2+5), \quad 24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3), \quad 120 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Exercice 3 : Quelques critères élémentaires de divisibilité

Soit $n \in \mathbb{N}$ dont la décomposition décimale est la suivante :

$$n = n_k \times 10^k + n_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots + n_1 \times 10 + n_0 \qquad n_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

1. À quelle condition sur n_0 l'entier n est-il divisible par 2, par 5 ? Pourquoi, à votre avis, les entiers 2 et 5 ont-ils un rôle si particulier dans la numération décimale ?
2. Montrer que n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres décimaux, $n_k + \cdots + n_0$, l'est.
3. Peut-on donner un critère du même genre avec des entiers autre que 3 ?
4. Donner un critère de divisibilité par 11.
5. Montrer que n est divisible par 4 si et seulement si 4 divise $10n_1 + n_0$ (indication : passer en base 100).
6. Généraliser tous ces critères à l'écriture en base quelconque.

Exercice 4 : Gymnastique euclidienne

1. Calculez (comme vous le voulez) les pgcd suivants :

(**a**) pgcd$(4, 6)$, (**b**) pgcd$(4, 12)$, (**c**) pgcd$(21, -25)$, (**d**) pgcd$(0, 6)$, (**e**) pgcd$(70, 63)$,

(**f**) pgcd$(84, 60)$, (**g**) pgcd$(40034556587867, 40034556587868)$, (**h**) pgcd$(1, 512)$.

2. Calculer le pgcd des entiers 1292 et 798.

3. Demandez à votre voisin qu'il vous fournisse un couple d'entiers à au moins trois chiffres décimaux puis calculer leur pgcd.

Exercice 5 : Ceci est un test... de primalité !

1. a. Soit $n \geqslant 4$ un entier. Montrer les équivalences :

$$\begin{aligned} n \text{ n'est pas un premier} &\iff n \text{ est divisible par un entier } m \text{ vérifiant } 1 < m \leqslant \sqrt{n} \\ &\iff n \text{ est divisible par un premier } p \leqslant \sqrt{n}. \end{aligned}$$

b. Enoncer les contraposées des implications précédentes.

2. a. En déduire l'équivalence :

$$101 \text{ est un nombre premier} \iff 101 \text{ n'est divisible par aucun des entiers } 2, 3, 5, 7.$$

Alors il est premier l'entier 101 ?

b. Et l'entier 667, est-il premier ?

3. En généralisant les exemples précédents, montrer que pour **tester la primalité** d'un entier n, c'est-à-dire répondre à la question de savoir si n est premier ou pas, il suffit d'effectuer au plus $\sqrt{n}$ divisions.

Exercice 6 : Le crible d'Eratosthènes [1]

1. a. Dans le tableau ci-dessous rayez successivement les multiples de 2, puis de 3, puis de 5, puis de 7 (mais ne rayez pas les entiers $2, 3, 5, 7$).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b. Montrer que tous les entiers non rayés sont premiers.

2. Sur le principe précédent, donner une façon systématique et astucieuse de dresser la liste de tous les premiers inférieurs à un entier N donné.

Exercice 7 : Des compositions

1. a. Montrer, avec pour ainsi dire aucun calcul, que 53 est un nombre premier.

b. Décomposer en premiers l'entier 4770.

2. Décomposer en premiers les entiers :

(**a**) 3960, (**b**) 2431, (**c**) 2774, (**d**) 1975509.

1. Eratosthenes est né en 276 avt J.C. en Afrique du nord et décédé à Alexandrie, Egypte en 194 avt J.C.

3. Voici quelques entiers donnés par leurs décompositions primaires.

a	b	a divise b ?	b divise a ?	$\mathrm{pgcd}(a,b)$	$\mathrm{ppcm}(a,b)$
$2^3 \times 3^2 \times 7$	$2^5 \times 3^6 \times 7^5$				
$2^4 \times 5^2 \times 23$	$2^3 \times 5 \times 7 \times 23$				
$7^{123} \times 11^2$	$7^2 \times 5 \times 11^{234}$				
$2 \times 5^6 \times 7^3$	$3^9 \times 11^7 \times 13^{12}$				
$3^2 \times 5^2 \times 7^2$	$3 \times 5 \times 7$				

Compléter les deux premières colonnes vides par oui ou non et les deux dernières colonnes par les décompositions primaires des pgcd et ppcm de a et b.

4. a. Quelle est la plus grande puissance de 6 qui divise $132 \times 64^5 \times 81^9$?.

b. Même question avec 28 et $40 \times 49 \times 385 \times 8^{1222} \times 7^{56}$.

5. a. Combien 294 compte-t-il de diviseurs positifs ?

b. Et $3^\alpha \times 5^\beta$ en fonction de $\alpha, \beta \geqslant 0$?

6. Trouver l'entier $n \in \mathbb{N}$ sachant qu'il est divisible par 108 et que sa factorisation en premiers est de la forme $p^2 q^7 \times 53$ avec p, q et 53 des premiers distincts.

7. Soient p et q deux premiers distincts. On pose $n = p^3 q$ et $m = pq^3$.

a. Donner la décomposition en premiers de $\mathrm{pgcd}(m,n)$.

b. Montrer que l'on peut retrouver p et q à partir de m et n en n'enchaînant que des calculs de pgcd et des divisions (et donc sans factoriser ni m ni n).

Exercice 8 : Pgcd à tout va

1. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les entiers $3n+1$ et $5n+2$ sont premiers entre eux.

b. Donner toutes les valeurs possibles pour $\mathrm{pgcd}(4n+3, 5n+2)$, quand $n \in \mathbb{N}$?

2. a. Soient a et b des entiers. Prouver que $\mathrm{pgcd}(2a+b, a+b) = \mathrm{pgcd}(a,b)$.

b. Montrer les relations de divisibilité suivantes :

$$\mathrm{pgcd}(a,b) \mid \mathrm{pgcd}(3a+b, a+b) \mid 2\,\mathrm{pgcd}(a,b).$$

3. Soient a et b des entiers.

a. Montrer que si a est premier avec b, alors il en est de même de a^n et b quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors il en est de même de a^m et b^n pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.

c. Enfin prouver que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ on a $\mathrm{pgcd}(a^n, b^n) = \mathrm{pgcd}(a,b)^n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

4. Étudier la validité de chacune des assertions suivantes, où a, a', b, b' et c désignent des entiers.

a. Si a ne divise pas b alors $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$.

b. Supposons que $a \mid b$. Alors $\mathrm{pgcd}(b,c) = 1 \implies \mathrm{pgcd}(a,c) = 1$.

c. Supposons que $a \mid b$. Alors $\mathrm{pgcd}(a,c) = 1 \implies \mathrm{pgcd}(b,c) = 1$.

d. Si $a \mid a'$ et $b \mid b'$ alors $\mathrm{pgcd}(a,b) \mid \mathrm{pgcd}(a',b')$.

e. Si $a \mid a'$ et $b \mid b'$ alors $\mathrm{pgcd}(a',b') = 1 \Rightarrow \mathrm{pgcd}(a,b) = 1$.

f. Si a divise c et b divise c alors ab divise $c\,\mathrm{pgcd}(a,b)$.

g. Si b et c sont premiers entre eux, alors on a la formule $\mathrm{pgcd}(a,bc) = \mathrm{pgcd}(a,b)\,\mathrm{pgcd}(a,c)$.

5. a. Soit x, y, a, b, c et d des entiers. Montrer que :

$$\mathrm{pgcd}(x,y) \mid \mathrm{pgcd}(ax+by, cx+dy) \mid (ad-bc)\,\mathrm{pgcd}(x,y).$$

b. En déduire que si $|ad-bc| = 1$ alors $\mathrm{pgcd}(x,y) = \mathrm{pgcd}(ax+by, cx+dy)$; n'est-ce pas là le cas général d'une formule déjà vue ?

Exercice 9 : Il est... FONDAMENTAL ! la-la-la-la-la !

1. Énoncer le lemme de Gauss. Le prouver en utilisant le théorème fondamental de l'arithmétique.

2. a. Soient a et a' deux entiers premiers entre eux et b un entier divisible par a et a'. Que peut-on dire du produit aa' ?

b. Le montrer avec le théorème fondamental de l'arithmétique.

3. a. Soient a, b et b' trois entiers tels que a est premier avec b et b'. Que peut-on dire du produit bb' ?

b. Le montrer avec le théorème fondamental de l'arithmétique.

Exercice 10 : Histoire de couples

Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = 60$ et $\text{ppcm}(a, b) = 3600$.

Exercice 11 : Encore une histoire de couples

Le but de cet exercice est de trouver tous les entiers $m, n \geqslant 1$ tels que $m + n = 581$ et tels que le quotient de $\text{ppcm}(m, n)$ par $\text{pgcd}(m, n)$ soit égal à 240. Pour cela on introduit $d = \text{pgcd}(m, n)$ et $m', n' \in \mathbb{N}$ tels que $m = dm'$, $n = dn'$.

1. Factoriser en premiers les entiers 240 et 581.

2. Quelles sont les valeurs possibles pour le couple $(d, m' + n')$?

3. a. Pourquoi m' et n' sont-ils de parités distinctes ?

b. Prouver que $m'n' = 240$.

c. En supposant, par exemple, que m' est pair, énumérer tous les couples (m', n') tels que $m'n' = 240$.

4. Conclure.

Exercice 12 : Encore des pgcd**, rien que des** pgcd

Soit $n \geqslant 5$ un entier.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $a = 2n + 1$ et $b = n + 3$.

a. Montrer que $\text{pgcd}(a, b)$ divise 5.

b. Montrer l'équivalence : $\text{pgcd}(a, b) = 5 \iff 5 \mid n - 2$.

3. On pose $c = n^3 - n^2 - 12n$ et $d = 2n^2 - 7n - 4$.

a. Vérifier que c et d sont divisibles par $(n - 4)$, puis calculer les quotients respectifs en fonction de n.

b. En déduire, selon les valeurs de n, la valeur de $\text{pgcd}(c, d)$.

Exercice 13 : Somme et produit

Soient a et b deux entiers.

1. Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a + b, b) = \text{pgcd}(a - b, b)$.

2. Montrer l'implication $\text{pgcd}(a, b) = 1 \implies \text{pgcd}(ab, a + b) = 1$.

3. a. Montrer de même que $\text{pgcd}(a, b) = 1 \implies \text{pgcd}(a^2 + b^2, ab) = 1$.

b. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

4. Montrer si a et b sont premiers entre eux alors on a :

$$(\mathbf{a}) \quad \text{pgcd}(a + b, a - b) \in \{1, 2\}, \qquad (\mathbf{b}) \quad \text{pgcd}(a + b, a^2 + b^2) \in \{1, 2\},$$

$$(\mathbf{c}) \quad \text{pgcd}(2a + b, a + 2b) \in \{1, 3\}.$$

Exercice 14 : Tête au carré

Soient a et b deux entiers, d leur pgcd et soient α, β les quotients respectifs des divisions de a et b par d. On cherche à déterminer $\text{pgcd}(a^2 - b^2, (a - b)^2)$.

1. Montrer l'égalité :

$$\text{pgcd}(a^2 - b^2, (a - b)^2) = (a - b)d\,\text{pgcd}(\alpha + \beta, \alpha - \beta).$$

2. a. Au fait, que peut-on dire de α et β ?

b. Prouver que $\text{pgcd}(\alpha-\beta, \alpha+\beta) = 1$ ou 2.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β pour que le précédent pgcd valle 1. Même question pour que le pgcd valle 2.

3. En déduire (avec pour ainsi dire aucun calcul) la valeur de $\text{pgcd}(169280, 52900)$; ah j'oubliais, on a $169280 = 483^2 - 253^2$! ! !

Exercice 15 : Cubisme

Soit a et b des entiers. On note $d = \text{pgcd}(a, b)$ et on introduit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $a = d\alpha$ et $b = d\beta$. Le but de l'exercice est de calculer $\text{pgcd}(a^3 - b^3, (a-b)^3)$.

1. Montrer que $a - b$ divise $a^3 - b^3$.

2. Montrer que $\text{pgcd}(a^3 - b^3, (a-b)^3) = (a-b)d^2 \,\text{pgcd}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, (\alpha-\beta)^2)$.

3. a. Prouver que $\text{pgcd}(\alpha - \beta, \alpha\beta) = 1$.

b. En déduire que $\text{pgcd}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, (\alpha-\beta)^2) \in \{1, 3\}$, puis donner la condition sur α, β permettant de séparer les deux cas.

4. Conclure.

Exercice 16 : True or False, that is the question

Dans tout cet exercice, toutes les «inconnues» sont des entiers. Étudier la validité de chacune des affirmations suivantes ; établir la propriété si elle est vraie, fournir un contre-exemple sinon.

1. Si $5 \mid n^2$ alors $25 \mid n^2$.

2. Si $25 \mid n^2$ alors $5 \mid n$.

3. Si $12 \mid n^2$ alors $4 \mid n$.

4. Si n est multiple de 14 et 15 alors il est multiple de 14×15.

5. Si 11 ne divise pas a et s'il divise le produit ab alors il divise b.

6. Si 12 divise le produit ab, alors 12 divise a ou b.

7. Si 13 divise le produit ab, alors 13 divise a ou b.

8. Si 14 divise a et b, alors 14^2 divise le produit ab.

9. Si $d = au + bv$ alors $d = \text{pgcd}(a, b)$.

10. Si a ne divise pas b et si b ne divise pas a alors a et b sont premiers entre eux.

11. Si a est premier avec b et b avec c alors a est premier avec c.

12. Si n divise un produit ab alors il divise l'un des entiers a ou b.

13. Soit $p \in \mathbb{Z}$ un premier. Si p^γ (avec $\gamma > 0$) divise le ppcm de a et b alors p^γ divise a ou b.

Exercice 17 : Bezout a des problèmes existentiels

1. Calculer le pgcd de 18480 et 9828 ainsi que les coefficients de Bezout.

2. Existe-t-il des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$11u + 17v = 5, \qquad 12u + 20v = 6, \qquad 12u + 20v = 8, \qquad 101u + 211v = 1.$$

si oui les calculer.

3. Existe-t-il des coefficients $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$12u + 15v = 8, \qquad 12u + 15v = 6, \qquad 21u + 9v = 3.$$

si oui, en exhiber.

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $1665x + 1035y = 45$.

Exercice 18 : Plus on est de fous...

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ des entiers.

1. a. Donner un exemple pour a, b, c de telle sorte que ces entiers soient premiers entre eux dans leur ensemble sans l'être deux-à-deux.

b. Montrer que s'ils sont premiers entre eux deux-à-deux alors ils le sont dans leur ensemble.

c. Mieux montrer que s'ils sont premiers entre eux deux-à-deux, alors les entiers ab, ac et bc sont eux premiers dans leur ensemble.

d. Que peut-on dire de la réciproque de l'implication précédente ?

2. Refaire la question précédente en considérant n entiers $a_1, \dots, a_n$ plutôt que trois entiers.

3. Montrer que $\mathrm{pgcd}(a, b, c) = \mathrm{pgcd}(a, \mathrm{pgcd}(b, c))$.

4. Montrer que $\mathrm{pgcd}(a, b, c, d) = \mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(a, b), \mathrm{pgcd}(c, d))$.

Exercice 19 : Sans titre [2]

1. a. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6 \mid n$ et $10 \mid n$.

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $n \mid 30$ et $n \mid 45$.

2. Soit p un premier. Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}.$$

3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(c, d) = 1$ et que le rationnel $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ est un entier. Montrer que $b = d$.

Exercice 20 : Quand papa Diophante se posait des questions

Le but de cet exercice est de trouver tous les entiers non nuls x, y satisfaisant $2x + 3y = xy$. On pose $d = \mathrm{pgcd}(x, y)$ et on convient que $d > 0$.

1. Montrer que l'équation revient à chercher des entiers x', y' **premiers entre eux** et vérifiant l'égalité $2x' + 3y' = dx'y'$.

2. Montrer que x' divise 3.

3. En déduire toutes les solutions cherchées.

Exercice 21 : Avec des «panneaux d'indications»

Trouver tous les entiers $l, m, n \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux-à-deux tels que la quantité

$$(l + m + n)\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

soit entière.

1. Montrer que le problème se résume à trouver les entiers l, m, n premiers entre eux deux-à-deux tels que $lmn \mid (l + m + n)(lm + ln + mn)$.

Supposons cette condition satisfaite.

2. Montrer que $l \mid mn(m + n)$ puis que $l \mid m + n$.

On peut quitte à échanger les rôles de l, m, n supposer que $l \geqslant m \geqslant n$.

3. Montrer que $m + n \in \{l, 2l\}$.

4. Vérifier qu'un seul triplet est en mesure de satisfaire $m + n = 2l$; le trouver.

5. On se place dans le cas où $m + n = l$.

a. Montrer que le problème se reformule ainsi : il s'agit de trouver tous les entiers $m \geqslant n$ premiers entre eux tels que $mn \mid 2(m + n)^2$.

b. Résoudre ce dernier problème et conclure.

Exercice 22 : Un cas particulier du théorème de Dirichlet [3]

Montrer qu'il existe une infinité de nombre premiers de la forme $4n + 3$ avec $n \in \mathbb{N}$.

2. Question subsidiaire : l'exercice est-il vraiment «sans titre» puisque son titre est précisément «Sans titre» ? Je ne connais pas la réponse à cette question...

3. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet est né en 1805 à Dürer, Allemagne et décédé en 1859 à Göttingen, Allemagne.