

## Feuille de T.D. n°1 — Esprit de contradiction

**Exercice 1 : Il faut s'impliquer !**

1. Considérons les propositions  $\mathcal{P}$  : «j'ai le droit de vote» et  $\mathcal{Q}$  : «j'ai plus de dix-huit ans».
  - a. A-t-on  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$  ? Et la réciproque  $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$  ?
  - b. Mêmes questions avec la proposition  $\mathcal{P}$  remplacée par : «j'ai le permis de conduire».
  - c. Mêmes questions avec la proposition  $\mathcal{Q}$  remplacée par : «j'ai plus de vingt ans».
2. Dans les implications suivantes, commencer par séparer les vraies des fausses. Ensuite, les nier et vérifier la véracité de ces négations. Commenter.

(a)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0,$

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0,$

(c)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2 \Rightarrow x = y,$

(d)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^3 = y^3 \Rightarrow x = y.$

3. a. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  la condition  $x \geq 0$  est-elle une condition nécessaire au fait que  $x$  soit un carré ? Si oui, cette condition est-elle suffisante ?
- b. Donner une condition nécessaire et suffisante à la nullité de  $\sin(\theta)$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- c. Donner une condition suffisante au fait qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soit croissante ; votre condition est-elle nécessaire ?
- d. Donner une condition nécessaire pour qu'un complexe  $z \in \mathbb{C}$  soit une racine  $n$ -ème de l'unité.

**Exercice 2 : Ensembles c'est tout !**

1. Identifier les ensembles suivants :

(a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\},$

(b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\},$

(c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < -1\},$

(d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\},$

(e)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\},$

(f)  $\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 = -1\},$

2. Même question avec :

(a)  $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z}, n = 2m\},$

(b)  $\{n \in \mathbb{Z} \mid \forall m \in \mathbb{Z}, n = 2m\},$

(c)  $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z}, m = 2n\},$

(d)  $\{n \in \mathbb{Z} \mid \forall m \in \mathbb{Z}, m = 2n\},$

(e)  $\{n \in \mathbb{Z} \mid \forall m \in \mathbb{Z}, n \neq 2m\},$

(f)  $\{n \in \mathbb{Z} \mid \forall m \in \mathbb{Z}, m \neq 2n\}.$

3. Décrire «en langage ensembliste»,

- a. l'ensemble des réels positifs ;
- b. l'ensemble des réels inférieurs ou égal à  $-1$  ou supérieurs ou égal à  $2$  ;
- c. l'ensemble des complexes de module  $1$  ;
- d. l'ensemble des entiers impairs ;

4. Déterminer, dans la liste suivante, les ensembles qui sont identiques :

(a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\},$  (b)  $\mathbb{Q},$  (c)  $\{1 - i, 1 + i\},$  (d)  $\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 - 2x + 2 = 0\},$

(e)  $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, nx \in \mathbb{Z}\},$  (f)  $] - \infty, -2] \cup [2, +\infty[,$  (g)  $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [0, n[ \right\},$

(h)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\},$  (i)  $\{a/b, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\},$  (j)  $\mathbb{R},$  (k)  $\{\pm 1\},$

(l)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$  (m)  $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\right\},$  (n)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0\},$  (o)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq 0\},$

(p)  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$ ,      (q)  $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ ,      (r)  $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$ .

5. Soient  $F$  et  $G$  sont deux sous-ensembles d'un même ensemble  $E$ , par exemple  $E = \mathbb{R}$  pour fixer les idées.

- a. Nier l'inclusion  $F \subset G$ .
- b. Montrer les égalités :

$${}^c(F \cap G) = {}^cF \cup {}^cG, \quad {}^c(F \cup G) = {}^cF \cap {}^cG.$$

**Exercice 3 : Quantité de quantificateurs**

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $x_0$  un réel.
  - a. Traduire «en français» l'assertion mathématique suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad [|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon].$$

b. Traduire en langage mathématique la phrase «aussi grand que je choisisse la borne  $M$ , il existe une autre borne  $B$  à partir de laquelle les valeurs de la fonction  $f$  dépassent  $M$ ».

2. Traduire en langage mathématique la phrase «il existe une infinité de nombres premiers».
3. Soit  $I$  une partie (non vide) de  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], \quad tx + (1 - t)y \in I. \tag{*}$$

- a. Traduire la propriété (\*) en langage courant.
- b. A quoi ressemble une partie de  $\mathbb{R}$  vérifiant (\*) ?

**Exercice 4 : Mais non — Non mais**

1. Donner la négation des assertions suivantes.
  - a. Vous avez tous le baccalauréat.
  - b. L'un d'entre vous à vingt ans.
  - c. Parmi vous, il y a des garçons.
  - d. Au moins deux personnes parmi vous sont nés le même jour.
  - e. Tous les lundi, vous avez quatre heures d'algèbre.
2. Etudier la validité des assertions suivantes ; lorsque qu'elles sont fausses, donner leur négation.

(a)  $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$ ;      (b)  $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$ ;      (c)  $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$ ;  
 (d)  $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$ .

3. Nier les assertions des questions 1 et 3 de l'exercice 3.

**Exercice 5 : d'écriture (comme quand on était p'tit)**

Voici comme promis la liste des lettres de l'alphabet grec :

Nom	Minuscule	Majuscule	Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	$\alpha$		beta	$\beta$	
gamma	$\gamma$	$\Gamma$	delta	$\delta$	$\Delta$
epsilon	$\varepsilon$		zeta	$\zeta$	
eta	$\eta$		theta	$\theta$	$\Theta$
iota	$\iota$		kappa	$\kappa$	
lambda	$\lambda$	$\Lambda$	mu	$\mu$	
nu	$\nu$		xi	$\xi$	$\Xi$
omicron	$o$		pi	$\pi$	$\Pi$
rho	$\rho$		sigma	$\sigma$	$\Sigma$
tau	$\tau$		upsilon	$\upsilon$	$\Upsilon$
phi	$\varphi$	$\Phi$	chi	$\chi$	
psi	$\psi$	$\Psi$	omega	$\omega$	$\Omega$

1. Faire une ligne de chacune des lettres.