

**Feuille de T.D. n°1 — Rentrer dans la «norme»****Exercice 1 : La vie Réelle**

1. Connaissez-vous une norme sur  $\mathbb{R}$  ?
2. C'est quoi une boule ouverte de  $\mathbb{R}$  ? Et une boule fermée ? Et un ouvert ? Et un fermé ?
3. Donner un exemple de partie de  $\mathbb{R}$  qui n'est ni fermée ni ouverte.
4. À votre avis les sous-ensembles  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Q}$  sont-ils un fermés ou ouverts dans  $\mathbb{R}$  ?
5. Même question pour  $\{1/n, n \geq 1\}$  puis  $\{1/n, n \geq 1\} \cup \{0\}$ .

**Exercice 2 : Un bon plan**

On se place dans le plan  $\mathbb{R}^2$  et on pose :

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

1. Montrer que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  définissent des normes sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Mais non nous n'allons pas abandonner la (future) norme  $\|\cdot\|_2$ . C'est seulement que pour celle-ci une des propriétés résiste n'est-ce pas ?
  - a. Vérifier les deux propriétés faciles.
  - b. Pour la dernière il faut tenir compte du fait que la norme  $\|\cdot\|_2$  est **euclidienne**, c'est-à-dire qu'elle provient d'un produit scalaire  $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{\langle(x, y), (x, y)\rangle}$  où  $\langle(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$ . Identifier la propriété du produit scalaire qui fait marcher le truc et prouver le truc.
3. Dessiner les boules unité pour chacune de ces normes.
4. Montrer qu'elles sont toutes les trois équivalentes.

**Exercice 3 : Activité dessin**

On considère les applications  $N_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , définies par :

$$N_1(x, y) = \max(|x - y|, |x + y|), \quad N_2(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|), \quad N_3(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x + ty|,$$

$$N_4(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + ty}{1 + t + t^2} \right|, \quad N_5(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + ty}{1 + t^2} \right|.$$

1. Montrer que chaque  $N_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , définit une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Dessiner les boules unités de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1 pour chacune de ces normes.
3. Ces normes sont-elles équivalentes ?

**Exercice 4 : «Fermé» à toute «Ouverture» !**

Représenter graphiquement chacune des parties suivantes de  $\mathbb{R}^2$  puis pour chacune d'entre elles, dire si elles sont ouvertes ou fermées.

- |  |  |
|--|--|
| (1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,  x  \neq 1 \text{ et }  y  \neq 1\}$ ,                   | (2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,  x  \neq 1 \text{ ou }  y  \neq 1\}$ , |
| (3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,  x  = 1 \text{ et }  y  \neq 1\}$ ,                      | (4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \text{ et } y = 0\}$ ,        |
| (5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x < 1\}$ ,  | (6) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,  x  < 1 \text{ et }  y  \leq 1\}$ ,    |
| (7) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < 1\}$ ,  |  |
| (8) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 \text{ et } y = 1/x^2\}$ ,                      | (9) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 - xy > 0\}$ ,                        |
| (10) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \geq 0 \text{ et } x > 0\}$ ,                     | (11) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ ,                    |
| (12) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$ , |  |
| (13) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 \text{ et } y = \frac{\sin x}{x}\}$ ,          | (14) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sin(x^2 + y^2) \geq 0\}$ .           |

### Exercice 5 : Quand on remplace «finie» par «infinie»

Plaçons nous dans  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1. Montrer qu'une intersection ou une réunion **finie** d'ouverts est encore un ouvert.
2. En déduire qu'on a le même type de propriété pour les fermés.
3. À votre avis, les deux assertions précédentes restent-elles vraies si les intersections ou réunions sont **infinies** ? Vous séchez ? Etudier les réunions et intersections :

$$\bigcap_{n \geq 1} \left] \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right[ \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \geq 1} \left[ -1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$$

puis conclure.

4. Parfois une réunion infinie de fermés peut être fermé : soit  $F$  un fermé de  $E$  et  $r > 0$ , montrer que  $\bigcup_{x \in F} \mathcal{B}'(x, r)$  est encore fermé, où  $\mathcal{B}'(x, r)$  est la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

### Exercice 6 : Mais non toutes les normes...

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace des applications continues de  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose pour  $f \in E$  :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0, 1]\} \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

1. Vérifier que  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  définissent chacune une norme sur  $E$ .
2. Établir que  $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$  pour toute fonction  $f \in E$ .
3. Les deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont-elles pour autant équivalentes ? Pas d'idées ? Examiner donc les fonctions  $f_n \in E$  définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ -nx + 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

calculer leurs deux normes respectives et conclure.

4. Que peut-on en déduire sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  ?

### Exercice 7 : ... ne sont pas équivalentes !!!

Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ . On pose pour  $f \in E$  :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0, 1]\}, \quad N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad N_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que ces trois applications définissent chacune une norme sur  $E$ .
2. a. En considérant les fonctions  $x \mapsto x^n$ , décider si oui ou non les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $N_1$  sont équivalentes.  
b. Que peut-on en déduire sur  $E$  ?
3. a. Montrer qu'en revanche les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes.  
b. Que peut-on en déduire sur  $E$  ?

### Exercice 8 : Enormément de normes

On se place dans  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $\alpha \in [0, 1]$  et  $f \in E$ , on pose :

$$N_\alpha(f) = \int_0^\alpha |f(x)| dx + \max_{x \in [0, \alpha]} |f(x)|.$$

1. Montrer que les applications  $N_\alpha$  définissent des normes sur  $E$ .
2. On suppose que  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ .  
a. Montrer que  $N_\beta \leq (\beta + 1)N_\alpha$ .

b. Soit  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n & \text{si } x \in [0, \alpha], \\ \left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right)^n & \text{si } x \in [\alpha, \beta], \\ 0 & \text{si } x \in [\beta, 1]. \end{cases}$$

Calculer les normes  $N_\alpha(f_n)$  et  $N_\beta(f_n)$ .

c. Que peut-on en déduire concernant les normes  $N_\alpha$  et  $N_\beta$  ?

### Exercice 9 : Les polynômes aussi rentrent dans la danse, euh la norme

Plaçons nous  $\mathbb{R}[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes et posons pour  $P \in \mathbb{R}[X]$  :

$$\|P\|_1 = \sup\{|P(x)| \mid x \in [0, 1]\} \quad \text{et} \quad \|P\|_2 = \sup\{|P(x)| \mid x \in [1, 2]\}.$$

1. Montrer que les applications  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  définissent des normes sur  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Posons  $P_n(X) = \left(1 - \frac{X}{2}\right)^n$  pour tout  $n \geq 1$ . Déterminer  $\|P_n\|_1$  et  $\|P_n\|_2$ .
3. Les deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont-elles équivalentes ?

### Exercice 10 : Ce spectacle n'est pas complet

Pour  $P(X) = c_n X^n + \dots + c_0 \in \mathbb{R}[X]$ , on pose :

$$\|P(X)\| = \sum_{i=0}^n |c_i|.$$

1. Montrer que  $\|\cdot\|$  définit une norme sur  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Prouver que la suite de polynômes  $\left(\frac{X^n}{n}\right)_{n \geq 1}$  converge vers 0.
3. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on définit l'application  $ev_a : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$  via  $P(X) \mapsto P(a)$  (**indication** : tenir compte du fait que  $ev_a$  est linéaire).
  - a. Montrer que  $ev_a$  est continue si  $|a| \leq 1$ .
  - b. Montrer que  $ev_a$  n'est pas continue si  $|a| > 1$ .
4. Soit  $(P_n(X))_{n \geq 1}$  la suite de polynômes  $P_n(X) = \sum_{i=0}^n \frac{X^i}{2^i}$ .
  - a. Montrer qu'elle est de Cauchy.
  - b. On suppose qu'elle converge vers un polynôme  $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ . En déduire que  $P(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(a)$  pour tout  $|a| \leq 1$  puis que  $(2 - X)P(X) = 2$ .
  - c. C'est normal docteur ? Qu'en déduisez-vous ?

### Exercice 11 : Tout compact

Soit  $A$  un compact de  $\mathbb{R}$  et soit  $N_A : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $P \mapsto \max_{a \in A} |P(a)|$ .

1. A quelle condition sur  $A$ , l'application  $N_A$  est-elle une norme sur  $\mathbb{R}[X]$  ?
2. Si  $A$  et  $B$  sont deux compacts distincts pour lesquels  $N_A$  et  $N_B$  sont des normes. Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes. **Indication** : s'il existe  $a \in A$  tel que  $a \notin B$ , montrer qu'il existe  $M > 0$  tel que  $A \cup B \subset [a - M, a + M]$  puis faire intervenir les polynômes  $P_n = (M^2 - (X - a)^2)^n$ .

### Exercice 12 : Poser ses conditions !

1. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $N_\lambda(x, y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}$ . Trouver les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles la fonction  $N_\lambda$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. On se place dans l'espace  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  que l'on muni de la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$ . Pour  $g \in E$  fixée et  $f \in E$ , on pose  $\|f\|_g = \|fg\|_\infty$ .
  - a. Montrer que  $\|\cdot\|_g$  définit une norme sur  $E$  si et seulement si  $g$  ne s'annule sur aucun intervalle  $]a, b[ \subset [0, 1]$ .
  - b. On suppose la condition de la question précédente vérifiée. Montrer que les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_g$  sont équivalentes si et seulement si  $g$  ne s'annule pas sur  $[0, 1]$ .

### Exercice 13 : Des suites dans les idées

On se place dans  $\mathbb{R}^2$  muni d'une de ses norme  $\| \cdot \|$  — à vous de choisir celle qui vous satisfait le plus — et on considère  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^2$ .

1. En singeant la définition de la convergence d'une suite réelle, caractériser le fait que la suite  $(x_n, y_n)_n$  soit convergente de limite  $(l, m)$ .

2. Montrer que  $(x_n, y_n)_n$  converge dans  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si les deux suites  $(x_n)_n$  et  $(y_n)_n$  convergent dans  $\mathbb{R}$ .

3. **Application :** soit  $I$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Montrer que le graphe de  $f$ , c'est-à-dire  $\{(x, f(x)), x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ , est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice 14 : Pour ou contre l'uniforme ?

Soit  $\mathcal{B}$  l'espace vectoriel des fonctions bornées de  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}$  celui des fonctions continues de  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  et enfin  $\mathcal{D}$  celui des fonctions dérivables de  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . On munit ces trois espaces de la norme infinie définie par  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} \{|f(x)|\}$  pour toutes  $f \in \mathcal{B}, \mathcal{C}$  ou  $\mathcal{D}$ .

1. Quelles sont les inclusions reliant ces trois espaces ?

2. Soit  $(f_n)_n$  une suite d'éléments de  $\mathcal{B}$ .

a. Qu'est-ce que cela veut dire que la suite  $(f_n)_n$  est bornée ?

b. Qu'est-ce que cela veut dire que la suite  $(f_n)_n$  converge vers la fonction  $f \in \mathcal{B}$ .

3. Le sous-espace  $\mathcal{C}$  est-il fermé ou ouvert ou ni l'un ni l'autre dans  $\mathcal{B}$  ?

4. Le sous-espace  $\mathcal{D}$  est-il fermé dans  $\mathcal{B}$  ?

5. Dans  $\mathcal{C}$  on considère le sous-ensemble  $\mathcal{C}_{\neq 0}$  constitué des fonctions qui ne s'annulent pas.

a. Est-ce un ouvert, un fermé, de  $\mathcal{C}$  ?

b. Quelle est l'adhérence de  $\mathcal{C}_{\neq 0}$  dans  $\mathcal{C}$  ?

### Exercice 15 : Matrices

On se place dans  $M_n(\mathbb{R})$  l'espace des matrices carrées  $n \times n$  (avec  $n \geq 1$ ) que l'on muni de la norme :

$$\|(a_{ij})\| = \max\{|a_{ij}|, 1 \leq i, j \leq n\}.$$

1. a. Arrêtez de me croire sur parole ! Cette norme que je propose en est bien une ?

b. Ce choix de norme est-il d'une importance capitale ?

2. Les ensembles suivants sont-ils des fermés de  $M_n(\mathbb{R})$  :

a. les matrices diagonales ; triangulaires ,

b. les matrices inversibles ;

c. les matrices de déterminant 1 ;

d. les matrices dont le carré vaut l'identité.