

**Halte aux complexes sur les complexes !**

emmanuel bureau 1698 tél : 05 61 50 48 93 hallouin@univ-tlse2.fr www.math.univ-toulouse.fr/~hallouin/eh-mass1.html hallouin

Voici un bref résumé (sans aucune preuve) de ce qu'il faut savoir concernant les nombres complexes.

Le corps des **nombres complexes**  $\mathbb{C}$  a été introduit pour résoudre la totalité des équations de degré 2 de la forme  $aX^2 + bX + c = 0$  où  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . On sait, en effet, que si le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  est **strictement négatif**, alors cette équation n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$ . En revanche, et c'est là l'intérêt d'avoir introduit  $\mathbb{C}$ , elle en admet deux dans  $\mathbb{C}$ .

Il a donc fallu ajouter des éléments à  $\mathbb{R}$ . En fait, il suffit d'ajouter l'élément, traditionnellement noté  $i$ , et tel que :

$$i^2 = -1.$$

Assurément, cet élément n'appartient pas à  $\mathbb{R}$  puisque son carré est négatif. Il permet de définir l'ensemble des **nombres complexes**, via :

$$\mathbb{C} = \{a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

avec les lois  $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$  :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') \quad \text{et} \quad (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Pour  $a, b$  non tous-deux nuls, la formule de l'inverse se retrouve ainsi :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe où  $a, b \in \mathbb{R}$ . Le réel  $a$  s'appelle sa **partie réelle** et se note  $\text{Re}(z)$  ; le réel  $b$  s'appelle sa **partie imaginaire** et se note  $\text{Im}(z)$ . On a donc :

$$z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z),$$

et cette écriture est unique et s'appelle l'écriture ou notation «algébrique» de  $z \in \mathbb{C}$ .

On définit le **conjugué** de  $z$ , noté  $\bar{z}$ , par :

$$\bar{z} = a - ib$$

et pour  $z, z' \in \mathbb{C}$ , on vérifie que :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$

On définit aussi le module, noté  $|z|$ , et la trace, notée  $\text{Tr}(z)$ , par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \text{Tr}(z) = z + \bar{z} = 2a = 2 \text{Re}(z).$$

Alors  $|z|$  et  $\text{Tr}(z)$  sont deux réels (le premier étant positif) tels que le polynôme :

$$X^2 - \text{Tr}(z)X + |z|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

s'annule à la fois en  $z$  et en  $\bar{z}$ . Cela permet de faire le lien avec la résolution des équations du second degré à discriminant strictement négatif évoquée comme motivation à la construction de  $\mathbb{C}$ . En effet, si  $aX^2 + bX + c$  est une équations du second degré telle que  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  alors elle admet deux solutions dans  $\mathbb{C}$  qui sont :

$$\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Outre la notation «algébrique»  $z = a + ib$ , il est parfois préférable de choisir la notation «exponentielle» des nombres complexes. Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

On remarque que  $e^0 = e^{2i\pi} = e^{2ik\pi}$  pour tous  $k \in \mathbb{Z}$ , si bien que l'expression  $e^{i\theta}$  ne change pas si l'on change  $\theta$  en lui ajoutant un multiple de  $2\pi$ . On montre que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , il existe, à  $2\pi$  près, un unique  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

On dit que  $\theta$  est un **argument** de  $z$ . Voici quelques complexes avec leur notation exponentielle :

$$-1 = e^{i\pi}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \bar{i} = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Partons de deux complexes en notation exponentielle  $z = \rho e^{i\theta}$  et  $z' = \rho' e^{i\theta'}$  (avec  $\rho, \rho' \in \mathbb{R}_+$  et  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ ), alors :

$$\operatorname{Re}(z) = \rho \cos(\theta), \quad \operatorname{Im}(z) = \rho \sin(\theta), \quad |z| = \rho,$$

et :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}, \quad \bar{z} = \rho e^{-i\theta}, \quad zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}.$$

Cette notation exponentielle permet enfin d'introduire, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , les complexes :

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

On les appelle les **racines  $n$ -èmes de l'unité** car, à la puissance  $n$ , ils valent tous 1 :

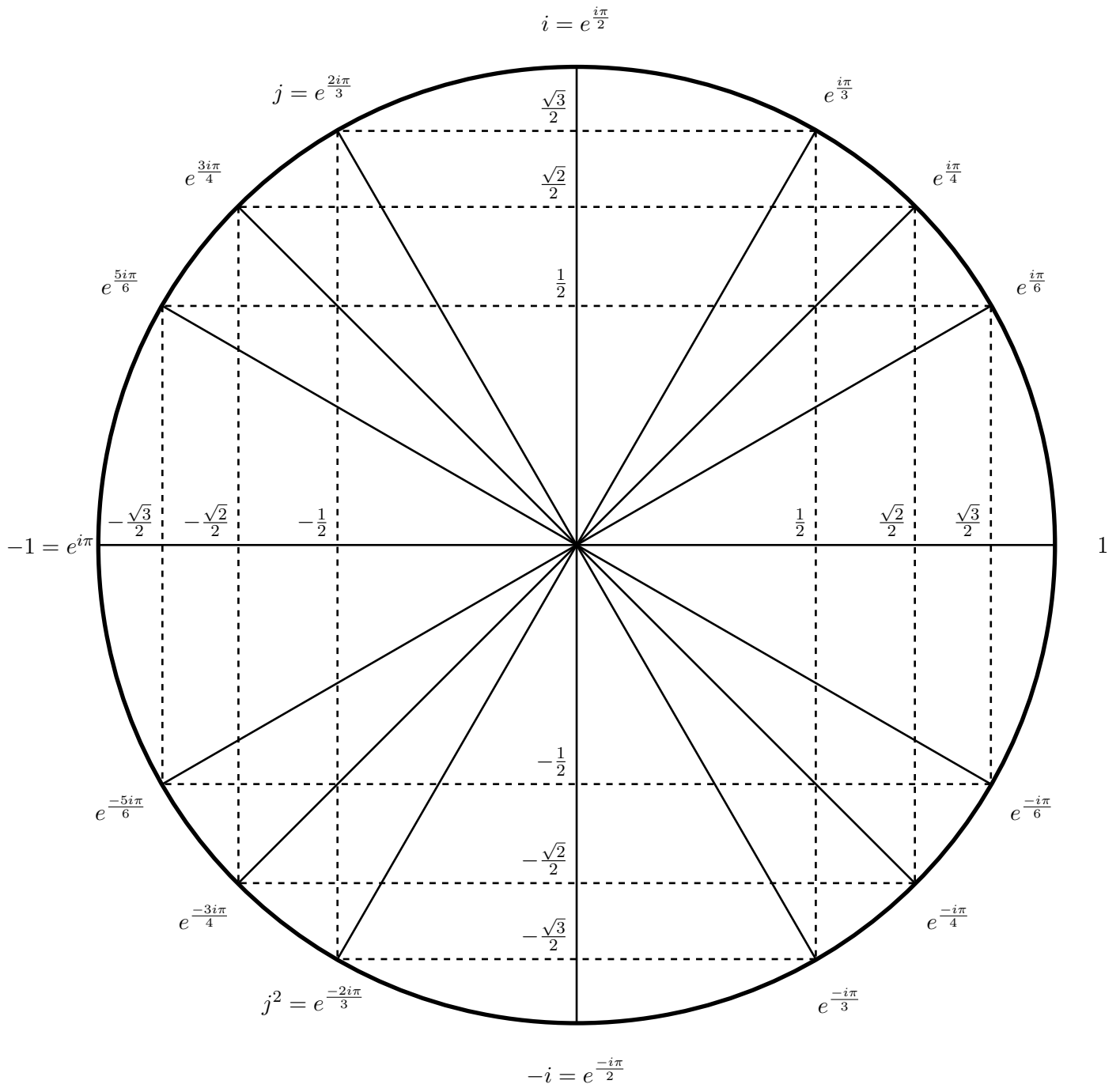
$$\left( e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)^n = e^{n \times \frac{2ik\pi}{n}} = e^{2ik\pi} = 1.$$

Pour  $n = 4$ , on trouve les quatre complexes  $1, -1, i, -i$ .

Pour  $n = 3$ , en posant  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ , on trouve les trois complexes  $1, j$  et  $j^2$ . On vérifie les formules suivantes :

$$j^2 + j + 1 = 0, \quad j^3 = 1, \quad \bar{j} = \frac{1}{j} = j^2.$$

Il convient aussi d'avoir une vision géométrique des nombres complexes. Cela consiste à représenter les nombres complexes sur le plan avec la convention suivante : le complexe  $a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) correspond au point du plan de coordonnées  $(a, b)$ . Les complexes les plus célèbres sont tous de module 1 et leurs représentations se situent sur le «**cerle trigonométrique**» comme ci-dessous.



Pour finir, il faut apprendre à «jongler» avec les nombres complexes. Cela ne peut se faire qu'en pratiquant...