

Test n°3 du lundi 18 janvier 2010

Durée : une heure — Sans document, ni calculatrice, ni ordinateur!!!

Toutes les questions sont indépendantes. Les réponses doivent être justifiées avec soin. Enjoy!

1. Donner la définition d'un élément simple de $\mathbb{R}(X)$.

2. Parmi les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ suivantes, distinguer les éléments simples des non-éléments simples. Justifier votre réponse.

$$(a) \frac{X^2}{(X^2+1)^2}, \quad (b) \frac{1}{(X^2-1)^2}, \quad (c) \frac{1}{X^3+3X^2+3X+1}, \quad (d) \frac{1}{X^3+X+1}.$$

3. Dans chacune des questions suivantes, on donne une fraction rationnelle suivie d'une décomposition en éléments simples. Dire si cette décomposition correspond à la fraction en justifiant votre réponse.

$$(a) \frac{X^{10}}{X^3(X^2+2)^2}, E + \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X^2} + \frac{\lambda_3}{X^3} + \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{(X^2+2)} + \frac{\alpha_2 X + \beta_2}{(X^2+2)^2}, E \in \mathbb{R}[X], \deg(E) = 10.$$

$$(b) \frac{X^5+1}{(X+1)^3(X^3+X^2+X+1)}, \frac{\lambda_1}{(X+1)} + \frac{\lambda_2}{(X+1)^2} + \frac{\lambda_3}{(X+1)^3} + \frac{\lambda_4}{(X+1)^4} + \frac{\alpha X + \beta}{X^2+1}.$$

$$(c) \frac{X^5+1}{(X+1)^3(X^3-6X^2+12X-8)}, \frac{\lambda_1}{(X+1)} + \frac{\lambda_2}{(X+1)^2} + \frac{\lambda_3}{(X+1)^3} + \frac{\lambda_4}{(X+1)^4} + \frac{\mu_1}{(X-2)} + \frac{\mu_2}{(X-2)^2}.$$

4. Décomposer en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles :

$$(a) \frac{X}{(X^2-4)(X^2+1)}, \quad (b) \frac{X^3-3X+1}{(X+1)^2}.$$

5. a. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $R(X) = \frac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}$; montrer qu'il suffit de déterminer trois coefficients pour les connaître tous.

b. Calculer les éléments simples correspondant au pôle en zéro de la fraction rationnelle $S(Y) = \frac{1}{Y^3(Y+2)^3}$.

c. En déduire la décomposition en éléments simples de $R(X)$.