

Test n°3 du lundi 5 janvier 2009*Durée : une heure — Sans document ni calculatrice*

1. Parmi les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ suivantes, distinguer les éléments simples des non-éléments simples. Justifier votre réponse.

$$(a) \quad 3X + 1, \quad (b) \quad \frac{2X - 1}{X^2 + X + 1}, \quad (c) \quad \frac{2X - 1}{X^2 - 3X + 2},$$

$$(d) \quad \frac{1}{X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1}, \quad (e) \quad \frac{X + 2}{(X - 1)^2}, \quad (f) \quad \frac{2}{(X^3 + 3X^2 + 1)}.$$

2. a. Combien la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$ de degré strictement négatif dont le dénominateur de degré 9 admet une racine double et deux racines triples compte-telle d'éléments simples au maximum ?

b. Même question avec une fraction rationnelle de degré 2 dont le dénominateur admet deux racines doubles complexes conjuguées et une racine réelle simple.

3. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ suivantes :

$$(a) \quad \frac{1}{X^2 + 4X + 4}, \quad (b) \quad \frac{X^3}{X^2 - 9}, \quad (c) \quad \frac{X^3 + 1}{(X^2 - 2X + 1)(X^2 + 1)}, \quad (d) \quad \frac{X^2 + 1}{X^3(X^2 + X + 1)}.$$