

Test n°2 du vendredi 11 décembre 2009*Durée : une heure — Sans document, ni calculatrice, ni ordinateur!!!*

Toutes les questions sont indépendantes. Les réponses doivent être justifiées avec soin. Enjoy!

1. Trouver toutes les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, pour lesquelles le polynôme $X^2 - \alpha X + 1$ divise $X^4 - X + \alpha$.
2. Montrer que les polynômes $X^2 - 1$ et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Décomposer le polynôme $X^4 - 1$ en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer que le complexe j est racine du polynôme $P(X) = X^3 + 6X^2 + 6X + 5$. En déduire les décompositions de P en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$.
5. Décomposer le polynôme $P(X) = X^4 - 7X^3 - 12X^2 + 176X - 320$ en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, sachant qu'il admet une racine triple entière.
6. Donner la décomposition en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ du polynôme P unitaire, de degré 11, qui vérifie $\text{pgcd}(P, P') = (X^2 - 4)^2(X^2 + 4)$ et $P(1) = 0$.
7. a. Énoncer le théorème de D'Alembert.
b. Un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré ≥ 2 , peut-il être irréductible dans $\mathbb{C}[X]$? Justifier.
c. Un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, de degré ≥ 3 , peut-il être irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Justifier.