

**Test n°2 du lundi 1er décembre 2008***Durée : une heure — Sans document ni calculatrice*

Toutes les questions sont indépendantes. Have a lot of fun !

**1.** Pour quelles valeurs du paramètre  $a \in \mathbb{R}$  le polynôme  $X^2 + aX + 1$  divise-t-il le polynôme  $X^4 + aX^2 + 1$  ?

**2.** a. Soient  $a$  et  $b$  deux réels **distincts**. Calculer  $\text{pgcd}(X - a, X - b)$ .

b. En déduire  $\text{pgcd}(X^2 - 2aX + a^2, X^2 - 2bX + b^2)$ .

**3.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme et  $r \in \mathbb{R}$  un scalaire.

a. Montrer que si  $(X - r)$  divise  $\text{pgcd}(P, P')$  alors  $r$  une racine au moins double de  $P$ .

b. Énoncer la réciproque de l'implication précédente puis étudier sa validité. Montrer la si elle vraie ou fournir un contre-exemple sinon.

**4.** Décomposer en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :

(a)  $X^3 + 2X^2 - 5X - 10$ ,

(b)  $X^3 - 1$ .

**5.** Décomposer le polynôme  $P(X) = X^4 - 5X^3 - 36X^2 + 272X - 448$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , sachant qu'il admet une racine triple positive.

**6.** Décomposer le polynôme  $P(X) = X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 6X + 9$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , sachant que c'est un carré.