

Toutes les questions sont indépendantes. Les réponses doivent être justifiées avec soin. Enjoy!

1. a. Calculer $\text{pgcd}(578, 357)$.
b. L'entier 127 est-il premier ?
c. Décomposer 2275 en premiers.
2. Trouver l'entier $n > 0$ vérifiant :

$$\text{pgcd}(n, 2 \times 3^3 \times 5) = 3^2 \times 5 \quad \text{et} \quad \text{ppcm}(n, 2 \times 3^3 \times 5) = 2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7.$$

3. Soient a, b, c des entiers.
 - a. A-t-on : $a \mid b + c \implies a \mid b$ ou $a \mid c$?
 - b. A-t-on : $a \mid bc \implies a \mid b$ ou $a \mid c$?
 - c. Énoncer le lemme de Gauss et prouver le.
 - d. A-t-on : $\begin{cases} a^2 \mid bc \\ \text{pgcd}(a, b) = 1 \end{cases} \implies a^2 \mid c$?
4. a. Soient a et b des entiers. Prouver que $\text{pgcd}(2a + b, a + b) = \text{pgcd}(a, b)$.
b. Montrer les relations de divisibilité suivantes :

$$\text{pgcd}(a, b) \mid \text{pgcd}(3a + b, a + b) \mid 2 \text{pgcd}(a, b).$$