Licence M.A.S.S. 1ère année — Algèbre S1 (MI0B01Y)

**Examen du jeudi 25 janvier 2010**

*Durée : trois heures — Sans document ni calculatrice*

emmanuel hallouin

### Exercice 1 : Parfois c'est FAUX...

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie au fausse, en justifiant votre réponse.

**1.** L'entier 111 est premier.
**2.** L'entier 59 est premier.
**3.** La décomposition primaire de 3080 est $2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$.
**4.** Si 15 divise le produit $ab$, alors 15 divise $a$ ou $b$.
**5.** Si 17 divise le produit $ab$, alors 17 divise $a$ ou $b$.
**6.** Si $a \mid a'$ et $b \mid b'$ alors $\mathrm{pgcd}(a,b) \mid \mathrm{pgcd}(a',b')$.
**7.** Si $a \mid a'$ et $b \mid b'$ alors $\mathrm{pgcd}(a',b') = 1 \Rightarrow \mathrm{pgcd}(a,b) = 1$.
**8.** Si $a$ ne divise pas $b$ alors $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$.
**9.** Si $a$ divise $b$ et $c$ alors $2a$ divise $b + c$.

### Exercice 2 : ... parfois c'est VRAI

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie au fausse, en justifiant votre réponse.

**1.** Un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $\geqslant 2$, n'est jamais irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.
**2.** Un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, de degré $\geqslant 3$, n'est jamais irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
**3.** Le complexe $j$ peut être racine double d'un polynôme de degré 3, à coefficients réels.
**4.** Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui n'a pas de racine réelle est irréductible.

### Exercice 3 : Trou normand congruenciel

**1.** À quelle condition sur $n \in \mathbb{N}$, a-t-on 13 qui divise $2^n - 1$ ?
**2.** En déduire que 13 divise $2^{64} - 3$.

### Exercice 4 : Inamovibles irréductibles

**1.** Décomposer en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$, les polynômes :

**(a)** $X^2 - 6X + 5$, **(b)** $X^3 - 27$, **(c)** $X^3 - X^2 - 8X + 12$.

**2.** Décomposer le polynôme $P(X) = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 8X + 4$ en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, sachant qu'il admet $1 + i$ comme racine.

**3.** Décomposer le polynôme $P(X) = 8X^4 + 4X^3 - 6X^2 - 5X - 1$ en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, sachant qu'il admet une racine triple négative.

**4.** Décomposer le polynôme $P(X) = 6X^5 - 15X^4 + 18X^2 - 6X - 3$ en remarquant que c'est le polynôme dérivé du polynôme $(X-1)^3(X+1)^2(X-2)$.

### Exercice 5 : Tout simplement !

Décomposer en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

**(1)** $\dfrac{3X-1}{X^2+X+5}$, **(2)** $\dfrac{X^5+1}{(X^2+1)^2}$, **(3)** $\dfrac{X^2+3}{(X^2-9)^2}$, **(4)** $\dfrac{X+1}{X^4(X^2+X+1)}$.



**tourner la page s.v.p.**

**Exercice 6 : Retour aux racines**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire dont la factorisation en irréductibles est la suivante :

$$P(X) = (X - r_1)^{e_1} \times \cdots \times (X - r_n)^{e_n}, \qquad r_i \in \mathbb{C},\ e_i \in \mathbb{N}^*,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant n,$$

les complexes $r_i$ étant deux-à-deux distincts.

**1.** a. Quel est le degré de $P$ (en fonction des exposants $e_i$) ?

b. Combien $P$ compte-t-il de racines distinctes ?

**2.** a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $r_i$ soit racine de $\operatorname{pgcd}(P, P')$.

b. Quand $r_i$ est racine de $\operatorname{pgcd}(P, P')$, quelle est sa multiplicité ?

**3.** Établir l'égalité $\deg(\operatorname{pgcd}(P, P')) = \deg(P) - n$.