

**Examen du jeudi 15 janvier 2009***Durée : trois heures — Sans document ni calculatrice***Exercice 1 : Des premiers en veux-tu en voilà pour le premier exercice**

1. a. Montrer, avec pour ainsi dire aucun calcul, que 53 est un nombre premier.  
b. Décomposer en premiers l'entier 4770.
2. Soient  $p$  et  $q$  deux premiers distincts. On pose  $n = p^3q$  et  $m = pq^3$ .  
a. Donner la décomposition en premiers de  $\text{pgcd}(m, n)$ .  
b. Montrer que l'on peut retrouver  $p$  et  $q$  à partir de  $m$  et  $n$  en n'enchaînant que des calculs de  $\text{pgcd}$  et des divisions (et donc sans factoriser ni  $m$  ni  $n$ ).
3. Trouver l'entier  $n \in \mathbb{N}$  sachant qu'il est divisible par 108 et que sa factorisation en premiers est de la forme  $p^2q^7 \times 53$  avec  $p, q$  et 53 des premiers distincts.

**Exercice 2 : Divise ? Divise pas ?**

Dans tout cet exercice,  $a$  et  $b$  désignent des entiers.

1. Vrai ou Faux ? Justifier !  
a. Si 11 ne divise pas  $a$  et s'il divise le produit  $ab$  alors il divise  $b$ .  
b. Si 12 divise le produit  $ab$ , alors 12 divise  $a$  ou  $b$ .  
c. Si 13 divise le produit  $ab$ , alors 13 divise  $a$  ou  $b$ .  
d. Si 14 divise  $a$  et  $b$ , alors  $14^2$  divise le produit  $ab$ .  
e. Si  $a$  est multiple de 14 et 15 alors il est multiple de  $14 \times 15$ .
2. a. Montrer l'implication :  $\text{pgcd}(a, b) = 1 \implies \text{pgcd}(a^2 + b^2, ab) = 1$ .  
b. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

**Exercice 3 : A la mod(ulo)**

1. Montrer que  $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$ .
2. a. Montrer que  $\text{pgcd}(61, 50) = 1$  et trouver  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $61u + 50v = 1$ .  
b. En déduire les solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation  $50x \equiv 1 \pmod{61}$ .

**Exercice 4 : Irrésistibles irréductibles**

1. Factoriser en irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$ , puis de  $\mathbb{R}[X]$ , les polynômes :

$$(a) \quad 2X^3 + X^2 - X - 2, \quad (b) \quad X^4 - 1, \quad (c) \quad 2X^4 + 7X^3 + 9X^2 + 7X + 2.$$

2. Factoriser en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $2X^4 + 17X^3 + 45X^2 + 27X - 27$  sachant qu'il admet une racine triple entière.

3. Factoriser en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X + 1$  sachant qu'il est un carré.

**Exercice 5 : Multitude de racines multiples**

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme. Prouver l'équivalence :  $(X^2 + X + 1) \mid P \Leftrightarrow P(j) = 0$ .
2. Quel est le degré d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  qui admet 3 comme racine de multiplicité 4 et  $1 + i$  comme racine de multiplicité 3. Justifier.
3. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme et  $r \in \mathbb{R}$  une de ses racines.

a. Montrer que  $r$  est racine double de  $P$  si et seulement si  $r$  est une racine simple de  $\text{pgcd}(P, P')$ .

b. Supposons que  $r$  soit une racine de  $P$  de multiplicité  $e \geq 2$ . Quelle est la multiplicité de  $r$  dans  $\text{pgcd}(P, P')$ ? Justifier.

c. Quelle est la factorisation en irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  du polynôme  $P$  unitaire, de degré 12, qui s'annule en 3 et tel que  $\text{pgcd}(P, P') = X^3(X+1)^2(X^2+1)$ .

4. Trouver la valeur du paramètre  $p \in \mathbb{R}$  pour lequel le polynôme  $P(X) = X^3 + pX + 2$  admette une racine au moins double.

### Exercice 6 : Simplicité

1. Parmi les fractions rationnelles de  $\mathbb{R}(X)$  suivantes, distinguer les éléments simples des non-éléments simples. Justifier votre réponse.

$$(a) \frac{-2}{X^3 - 6X^2 + 12X - 8}, \quad (b) \frac{3X - 1}{X^4 + 2X^2 + 1}, \quad (c) \frac{2}{X^3 + \frac{3}{2}X^2 + 1}.$$

2. Décomposer en éléments simples de  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles suivantes :

$$(a) \frac{2X-1}{X^2-3X+4}, \quad (b) \frac{X^3-1}{(X+2)(X+3)}, \quad (c) \frac{X+1}{(X^2-2X+1)(X^2+1)}, \quad (d) \frac{2X+1}{X^3(X+1)}.$$