

Devoir à la maison n°2 — Pour combler l'insoutenable absence d'algèbre

emmanuel_____bureau 1698_____tél : 05 61 50 48 93_____hallouin@univ-tlse2.fr_____www.math.univ-toulouse.fr/~hallouin/eh-mass1.html_____hallouin

Et si vous profitez de cette semaine sans cours d'algèbre pour définitivement vous débarrasser de vos éventuelles réticences vis-à-vis des complexes ? Voici deux exercices qui, je l'espère, vous réconcilieront avec ces nombres pas si complexes que cela. À rendre au plus tard le **mardi 8 décembre**. Enjoy !

Exercice 1 : Retour aux «racines»

Tout complexe $z \in \mathbb{C}$ admet, nous allons le revoir, deux racines carrées. L'objet de cet exercice est d'apprendre à les calculer.

1. Supposons que le complexe z est donné sous sa «forme exponentielle» $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- Montrer que ses deux racines carrées sont $\pm \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$.
- En déduire les racines carrées des complexes i , $2i$ et j .

2. Supposons que le complexe z est donné sous sa «forme algébrique» $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

a. Commençons par un exemple avec $z = -3 + 4i$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $x + iy$ est une racine carrée de z si et seulement si x, y satisfont le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

Tel quel, ce système ne se laisse pas résoudre facilement ; heureusement on peut lui ajouter l'équation $x^2 + y^2 = 5$; pourquoi ? En déduire les deux racines carrées de $-3 + 4i$.

b. Revenons au cas général, $z = a + ib$. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $x + iy$ est une racine carrée de z si et seulement si x, y satisfont le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Justifier le fait que l'on peut ajouter l'équation $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

c. En déduire qu'une des racines carrées de $z = a + ib$ vaut :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \quad \text{si } b \geq 0, \quad \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \quad \text{si } b < 0.$$

Et l'autre que vaut-elle ?

3. Trouvez les racines complexes des polynômes suivants :

(a) $X^2 - 20i + 21$,

(b) $X^2 + (-3 + 2i)X + 5 - i$.

Pour le second, il vous suffit d'appliquer la méthode usuelle de résolution d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels. En effet, les formules sont encore valables quand le polynôme est à coefficients complexes.

Exercice 2 : Un petit dernier, juste comme ça !

Trouver toutes les racines du polynôme $X^4 + (-5i - 1)X^3 + (6i - 6)X^2 + (-4i + 12)X - 8i - 8$ sachant qu'il admet une racine triple qui est imaginaire pure.