

Devoir à la maison n°1 — Bonnes (studieuses) vacances**Exercice 1 : C'est le facteur (premier)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ dont la décomposition primaire compte exactement trois facteurs $n = p^\alpha \times q^\beta \times r^\gamma$ avec p, q, r premiers et avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler combien n compte de diviseurs positifs.
2. Sachant que l'entier $p \times n$ compte 6 diviseurs de plus que n tandis que l'entier $q^2 \times n$ en compte 24 de plus, trouver toutes les valeurs possibles de α, β, γ .

Exercice 2 : Tête au carré

Soient a et b deux entiers, d leur pgcd et soient α, β les quotients respectifs des divisions de a et b par d . On cherche à déterminer $\text{pgcd}(a^2 - b^2, (a - b)^2)$.

1. Montrer l'égalité :

$$\text{pgcd}(a^2 - b^2, (a - b)^2) = (a - b)d \text{pgcd}(\alpha + \beta, \alpha - \beta).$$

2. a. Au fait, que peut-on dire de α et β ?
b. Prouver que $\text{pgcd}(\alpha - \beta, \alpha + \beta) = 1$ ou 2 .
c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β pour que le précédent pgcd vaille 1. Même question pour que le pgcd vaille 2.
3. En déduire (avec pour ainsi dire aucun calcul) la valeur de $\text{pgcd}(169280, 52900)$; ah j'oubliais, on a $169280 = 483^2 - 253^2$!!!