Géométrie différentielle

Vincent GUEDJ

9 décembre 2015

Table des matières

1 Courbes de $\mathbb{R}^n$ **3**
1.1 Isométries et champs de vecteurs 4
1.2 Paramétrisation par longueur d'arc 9
1.3 Courbes planes 15
1.4 Courbes gauches 26
1.5 Propriétés globales 37
1.6 Exercices 44

2 Surfaces de $\mathbb{R}^3$ **53**
2.1 Définitions, Exemples 54
2.2 Plan tangent 62
2.3 Première forme fondamentale 67
2.4 Deuxième forme fondamentale, courbures 71
2.5 Theorema Egregium de Gauss 82
2.6 Distance géodésique 92
2.7 Théorème de Gauss-Bonnet 97
2.8 Exercices 102

3 Variétés **115**
3.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ 116
3.2 Formes différentielles 122
3.3 Variétés abstraites 128
3.4 Groupes de Lie classiques 138
3.5 Classifications 142
3.6 Exercices 146

Bibliography **155**

Introduction

Ce document est le support du cours de Géométrie Différentielle dispensé par l'auteur dans le cadre du Master 1 de Mathématiques Fondamentales de l'Université Paul Sabatier (Toulouse, France) entre septembre 2013 et décembre 2015.

Le syllabus du module était le suivant :

1. Courbes dans le plan et dans l'espace de dimension 3
   - Repère de Frenet, courbure, torsion, classification locale ;
   - Nombre d'enroulement, invariance par homotopie ;
   - Propriétés globales des courbes planes : inégalité isopérimétrique ;
2. Surfaces dans $\mathbb{R}^3$
   - Surfaces paramétrées régulières, exemples ;
   - Plan tangent, première forme fondamentale, notion d'aire ;
   - Application de Gauss, seconde forme fondamentale, courbures ;
   - Théorème Egregium de Gauss ;
   - Courbe paramétrée sur une surface, courbure normale, géodésique ; transport parallèle ;
   - Théorème de Gauss-Bonnet ; champs de vecteurs ;
3. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$
   - Définition, exemples, espace tangent, champs de vecteurs ;
   - Formes différentielles, théorème de Stokes ;
   - Variétés abstraites, exemples.

Il existe de nombreuses références qui traitent de ce sujet classique. Je me suis librement inspiré des livres indiqués dans la bibliographie, je vous recommande tout particulièrement le livre de DoCarmo.

Je vous encourage à faire des dessins le plus souvent possible et à utiliser également l'un des nombreux sites qui recensent les propriétés remarquables des courbes et des surfaces tels http ://www.mathcurve.com/

Le texte contient très probablement de nombreuses coquilles (typos, erreurs ou imprécisions). Merci d'avance de me les signaler en m'écrivant à vincent.guedj@math.univ-toulouse.fr

Bonne lecture !

Chapitre 1

Courbes de $\mathbb{R}^n$

Introduction

Dans ce premier chapitre nous nous intéressons à l'étude des courbes plongées dans $\mathbb{R}^n$. Nous étudions plus particulièrement les *courbes planes* ($n = 2$) et les *courbes gauches* ($n = 3$).

Nous commençons par rappeler quelques propriétés des isométries de $\mathbb{R}^n$, des champs de vecteurs, ainsi que les propriétés fondamentales du produit vectoriel. Nous expliquons ensuite que toute courbe peut être localement paramétrée par longueur d'arc : toutes les courbes de $\mathbb{R}^n$ sont donc localement isométriques, mais nous allons dégager des propriétés de rigidité globale.

Nous introduisons la courbure des courbes planes. Son importance est illustrée par le "Théorème fondamental" (Théorème 1.3.9) qui affirme que deux courbes planes qui ont même courbure sont images l'une de l'autre par une isométrie globale de $\mathbb{R}^2$. C'est un formidable résultat sur lequel il faut vous arrêter un moment et vous émerveiller : une information de nature locale (la courbure) suffit à classifier les courbes à équivalence *globale* près.

Pour les courbes gauches, les concepts fondamentaux sont ceux de courbure et de torsion (la nouveauté par rapport aux courbes planes). Ils sont introduits par l'intermédiaire d'un repère mobile, le *repère de Frenet*, qui est bien adapté à l'étude des courbes gauches. L'importance de ces concepts est mise en évidence par le Théorème 1.4.14 : deux courbes gauches ont même courbure (non nulle) et même torsion si et seulement si elles sont images l'une de l'autre par une isométrie globale de $\mathbb{R}^3$.

Je vous incite à consulter le site http ://www.mathcurve.com sur lequel vous trouverez la représentation graphique de nombreuses courbes que nous rencontrerons dans ce texte (et bien d'autres encore). Vous êtes vivement encouragés à produire le plus de dessins possibles au fil de votre lecture.

Les exercices sont regroupés en fin de chapitre, y compris ceux que nous avons laissé au fil du texte (démonstration d'une proposition ou vérification d'une formule).

1.1 Isométries et champs de vecteurs

1.1.1 Isométries

Nous rappelons ici la définition des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Il s'agit des applications qui préservent la norme :

Définition 1.1.1. *Une application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si elle préserve la norme,*

$$\|F(p) - F(q)\| = \|p - q\|, \text{ pour tout } p, q \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 1.1.2. *Une application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si et seulement si c'est la composée d'une translation et d'une transformation orthogonale, c'est à dire qu'elle préserve le produit scalaire.*

Une isométrie est donc constituée d'une partie linéaire (isométrie dite vectorielle, qui fixe l'origine) et d'une translation (sa partie affine). Attention à ne pas oublier la partie affine !

Rappelons qu'une transformation orthogonale admet pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ un élément $A \in M(n, \mathbb{R})$ tel que ${}^tA = A^{-1}$. Son déterminant vérifie donc $\det A = \pm 1$. Elle préserve l'orientation ssi son déterminant est 1.

Démonstration. Notons $v = F(0)$. Quite à remplacer F par $G = F - F(0)$, on se ramène au cas où $F(0) = 0$ (on vient de mettre de côté la partie translation).

Par hypothèse pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|F(X) - F(Y)\|^2 = \|X - Y\|^2,$$

en particulier $||F(X)||^2 = ||X||^2$ puisque l'on s'est ramené au cas où $F(0) = 0$. Comme

$$\|F(X) - F(Y)\|^2 = \|F(X)\|^2 + \|F(Y)\|^2 - 2\langle F(X), F(Y)\rangle$$

et

$$\|X - Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\langle X, Y\rangle$$

on en déduit que

$$\langle F(X), F(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle.$$

Soit $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base orthonormée. La relation précédente assure que $(F(e_j))_{1\leq j\leq n}$ est également une base orthonormée. On peut donc décomposer le vecteur $F(X)$ dans cette base : il vient

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} \langle F(e_j), F(X)\rangle F(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, X\rangle F(e_j),$$

ce qui montre que $F(X)$ dépend linéairement de X. Ainsi $F(X) = AX$ où $A \in O(n, \mathbb{R})$ est une matrice orthogonale puisqu'elle vérifie

$$\langle {}^tAAX, Y\rangle = \langle AX, AY\rangle = \langle X, Y\rangle, \text{ pour tout } X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

d'où ${}^tA = A^{-1}$. □

Rappelons succintement quelques propriétés des isométries dont nous n'aurons pas nécessairement besoin, mais qu'il est bon que vous connaissiez :

- l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^n$ forment un groupe ;
- les isométries *positives* (celles qui préservent l'orientation, c'est à dire dont le déterminant de la partie linéaire est positif) forment un sous-groupe, elles sont parfois appelées "déplacements" ;
- le groupe orthogonal $O(n, \mathbb{R})$ est compact (pour la topologie induite par une norme sur $\mathbb{R}^{n^2} \simeq M(n, \mathbb{R}) \supset O(n, \mathbb{R})$) ;
- le sous-groupe $O^+(2, \mathbb{R})$ des matrices orthogonales positives en dimension deux est isomorphe et homéomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, en particulier il est commutatif ;
- le sous-groupe $O^+(n, \mathbb{R})$ est connexe ;
- les réflexions engendrent le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$.

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Isométries de $\mathbb{R}^2$:

- une isométrie plane est soit une translation, soit une rotation (affine), soit une réflexion, soit une symétrie glissée ;
- une symétrie ($s \circ s = Id$) est soit une rotation d'angle 0 ou π, soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite (réflexion) ;
- la composée de deux rotations affines est soit une translation, soit une rotation affine.

Notons ici qu'une *rotation affine* signifie rotation non nécessairement centrée à l'origine. Une symétrie glissée est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite engendrée par un vecteur v et d'une translation par un vecteur multiple de v.

Isométries de $\mathbb{R}^3$. Les isométries de $\mathbb{R}^3$ sont de six types :

- les translations ;
- les réflexions affines ;
- les symétries glissées orthogonales (composée d'une réflexion et d'une translation par un vecteur du plan de la réflexion) ;
- les rotations (d'axe affine) ;
- les vissages (ou déplacement hélicoidal, i.e. la composée d'une rotation et d'une translation par un vecteur de l'axe de la rotation) ;
- les antirotations (composée d'une rotation et d'une symétrie).

1.1.2 Champs de vecteurs

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.3. *Un champ de vecteurs*

$$X : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto (X_1(x), \dots, X_n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

est une application (lisse) qui à un point x de l'ouvert Ω associe un vecteur $X(x)$. On le note traditionnellement

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Dérivations

Cette notation provient de ce que X définit une *dérivation* :

Définition 1.1.4. *Une dérivation D sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un endomorphisme de l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ qui vérifie la règle de Leibnitz*[1]*, i.e. tel que pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, on a*

$$D(fg) = fD(g) + gD(f).$$

On note L_X la dérivation associée à un champ de vecteurs X (appelée dérivée de Lie du champ X), elle est définie par

$$L_X : f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}).$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une dérivation. Réciproquement :

Proposition 1.1.5. *Soit D une dérivation sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique champ de vecteurs X tel que $D = L_X$.*

Démonstration. On peut supposer sans perdre de généralité que Ω est convexe. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Rappelons que

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(x-y)+y)dt = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) h_{i,y}(x)$$

avec

$$h_{i,y} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad h_{i,x} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Soit D une dérivation et posons $X_i := D(x_i)$. Comme D annule les fonctions constantes, il vient

$$\begin{aligned} Df(x) = D(f - f(y))(x) &= D\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) h_{i,y}(x)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i(x) h_{i,y}(x) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) D h_{i,y}(x). \end{aligned}$$

1. Gottfried Wilhelm Leibniz, philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand (1646-1716).

En particulier pour $y = x$ on obtient

$$Df(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) h_{i,x}(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = L_X f(x).$$

□

Remarque 1.1.6. *Notez que la composée de deux dérivations n'est pas une dérivation (donnez un exemple).*

Crochet de Lie [2]

Soit X, Y deux champs de vecteurs. Observez que $L_X(L_Y f)$ et $L_Y(L_X f)$ ne sont pas nécessairement égaux. Le crochet de Lie $[X, Y]$ mesure ce défaut de commutativité. L'observation remarquable est que le crochet de Lie est encore un champ de vecteurs (i.e. une dérivation) :

Lemme 1.1.7. *L'application $L_X L_Y - L_Y L_X$ est une dérivation. On note $[X, Y]$ le champ de vecteurs correspondants.*

Démonstration. L'application

$$f \mapsto L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f)$$

est clairement un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Il s'agit de montrer qu'il vérifie la règle de Leibnitz.

Soit f, g deux fonctions lisses. On calcule

$$L_X(L_Y(fg)) = f L_X(L_Y g) + L_X f L_Y g + L_X g L_Y f + g L_X(L_Y f)$$

et

$$L_Y(L_X(fg)) = f L_Y(L_X g) + L_Y f L_X g + L_Y g L_X f + g L_Y(L_X f)$$

d'où

$$(L_X L_Y - L_Y L_X)(fg) = f(L_X(L_Y g) - L_Y(L_X g)) + g(L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f)),$$

ce qui montre que $L_X L_Y - L_Y L_X$ est une dérivation. □

Voici l'expression en coordonnées du crochet de Lie :

$$(L_X L_Y - L_Y L_X) = \sum_i \sum_k \left(X_k \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} - Y_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Autrement dit

$$[X, Y]_i = \sum_k \left(X_k \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} - Y_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right).$$

Nous en laissons la preuve au lecteur à titre d'exercice.

2. Sophus Lie, mathématicien norvégien (1842-1899).

Exemple 1.1.8. *Si X et Y sont à coefficients constants alors $[X, Y] = 0$ (on dit que les champs de vecteurs commutent).*

Pour $X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x_2}$ on obtient

$$[X, Y] = -\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Identité de Jacobi [3]

Proposition 1.1.9. *Soit X, Y, Z trois champs de vecteurs. Alors*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] = 0.$$

Démonstration. La preuve (fastidieuse) est une simple vérification en adoptant le point de vue dérivation, vous y arrivez ? □

1.1.3 Produit vectoriel

Nous rappelons ici quelques propriétés du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ qui nous seront utiles dans la suite du cours.

Définition 1.1.10. *Le produit vectoriel $u \wedge v$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ caractérisé par la formule*

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w), \text{ pour tout } w \in \mathbb{R}^3.$$

On peut donner une formule en coordonnées. Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ alors $w = u \wedge v$ est le vecteur de coordonnées (w_1, w_2, w_3) définies par

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \; w_2 = \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \text{ et } w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Les propriétés suivantes résultent immédiatement de la définition, la preuve est laissée en exercice (voir Exercice 2) :

- $u \wedge v = -v \wedge u$;
- $u \wedge v$ dépend linéairement de u et v ;
- $u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont linéairement dépendants ;
- $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.

Proposition 1.1.11. *Soit $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$. Alors*

$$\langle u \wedge v, x \wedge y \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle u, x \rangle & \langle v, x \rangle \\ \langle u, y \rangle & \langle v, y \rangle \end{bmatrix}.$$

3. Carl Gustav Jakob Jacobi, mathématicien allemand (1804-1851).

Démonstration. Nous la laissons en exercice (Exercice 1). Observer que tout dépend linéairement de u, v, x, y... □

Il résulte de cette identité que

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2\theta) = A^2,$$

où θ est l'angle entre u et v et A est l'aire du parallélogramme engendré par u et v. Observons également que

$$\det(u, v, u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 \geq 0$$

avec inégalité stricte dès lors que u et v sont linéairement indépendants. Dans ce cas les vecteurs $\{u, v, u \wedge v\}$ forment donc une base *directe* (i.e. qui a la même orientation que la base canonique).

Le produit vectoriel n'est pas associatif. Si u, v, w sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u.$$

On en déduit l'identité de Jacobi,

$$u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$$

que vous vérifierez en Exercice 3.

Nous rappelons enfin comment dériver un produit vectoriel.

Lemme 1.1.12. *Soit $t \mapsto u(t), v(t) \in \mathbb{R}^3$ deux familles lisses de vecteurs. Alors*

$$\frac{d}{dt}\left[u(t) \wedge v(t)\right] = \frac{du}{dt} \wedge v(t) + u(t) \wedge \frac{dv}{dt}.$$

Démonstration. A faire en Exercice 4. □

1.2 Paramétrisation par longueur d'arc

1.2.1 Courbes paramétrées

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$ une application. On peut l'écrire en coordonnées

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)).$$

L'application φ sera dite *lisse* lorsque chacune des fonctions coordonnées φ_j est infiniment dérivable.

Définition 1.2.1. *On appelle courbe paramétrée de $\mathbb{R}^n$ la donnée d'une application lisse $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$. L'image $\Gamma = \varphi(I)$ s'appelle la courbe géométrique associée.*

On dit qu'un point $\varphi(t_0) \in \Gamma$ est régulier si $\varphi'(t_0) \neq 0$, c'est à dire si φ est une immersion au voisinage de t_0. Un point $\varphi(t_0)$ de Γ tel que $\varphi'(t_0) = 0$ est appelé un point singulier de Γ.

Il est important de distinguer les propriétés de la paramétrisation de Γ, c'est à dire de la donnée du couple (φ, Γ), des propriétés géométriques de Γ qui sont indépendantes du choix de la paramétrisation. De fait Γ est définie à un changement admissible de paramétrisation près :

Définition 1.2.2. *Un changement admissible de paramétrisation de la courbe géométrique $\Gamma = \varphi(I)$ est la donnée d'une application lisse $\alpha : J \to I$ telle que $\alpha'(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$.*

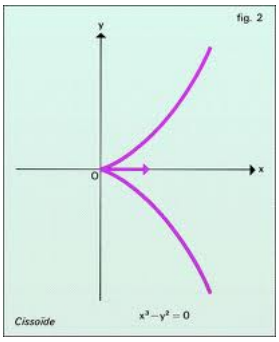
Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que si α' ne s'annule pas sur l'intervalle J alors soit $\alpha'(t) > 0$ pour tout $t \in J$, dans ce cas on dit que α préserve l'orientation (et que φ et $\varphi \circ \alpha$ définissent le même sens de parcours de Γ), soit $\alpha'(t) < 0$ pour tout $t \in J$, dans ce cas $\alpha'(t)$ change l'orientation.

Exemples 1.2.3.

1) L'application $\varphi : I = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (t, t^2)$ a pour courbe géométrique associée la parabole d'équation $y = x^2$. Cette paramétrisation est régulière.

Observons que $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 \in \mathbb{R}$ est un changement non admissible de paramétrisation (puisque $\alpha'(0) = 0$). Cela signifie que la courbe géométrique Γ_2 donnée par la paramétrisation $t \in \mathbb{R} \to (t^3, t^6)$ est un objet géométrique différent de Γ, bien que le support de ces deux courbes soit le même.

2) L'application $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ définit une paramétrisation de la courbe Γ d'équation $y^2 = x^3$. Cette courbe présente un point singulier en $(0, 0)$ appelé point de rebroussement de première espèce ou "cusp" (en anglais) : on dit aussi que Γ est une cubique cuspidale. En voici une représentation :



On vérifiera dans l'Exercice 9 qu'il n'existe pas de courbe géométrique régulière (i.e. sans point singulier) qui a le même support que Γ.

3) L'application $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ définit une paramétrisation du cercle unité $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$ parcouru dans le sens trigonométrique. L'application $\alpha : t \in \mathbb{R} \to -t \in \mathbb{R}$ est un changement admissible de paramétrisation qui inverse l'orientation : $\varphi \circ \alpha$ parcourt le cercle unité dans le sens des aiguilles d'une montre

Tangente. Soit $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$ une application lisse et $\Gamma = \varphi(I)$ la courbe géométrique associée. Soit $p = \varphi(t_0) \in \Gamma$ un point régulier de Γ ($\varphi'(t_0) \neq 0$). Lorsque deux paramètres $t \neq t'$ convergent vers t_0, les droites passant par $\varphi(t), \varphi(t')$ convergent vers une droite limite appelée *tangente* à Γ au point p. On vérifie aisément qu'elle a pour vecteur directeur le vecteur $\varphi'(t_0)$ et pour équation paramétrique

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (t - t_0)\varphi'(t_0) + \varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Courbe fermée. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée telle que $\varphi(a) = \varphi(b)$. On dit dans ce cas que $\Gamma = \varphi([a, b])$ est une *courbe fermée.*

Définition 1.2.4. *Une courbe fermée $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est simple si elle n'a pas d'autres auto-intersections, i.e. $\varphi(a) = \varphi(b)$ mais $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ pour $t, s \in [a, b[$ avec $t \neq s$.*

Quitte à dilater et translater, on peut supposer que $a = 0$ et $b = 2\pi$ et prolonger φ par 2π-périodicité. En identifiant le cercle unité S^1 au quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ via l'exponentielle complexe $\theta \mapsto e^{i\theta}$, on obtient une paramétrisation

$$f : S^1 \to \mathbb{R}^n$$

de la courbe fermée Γ.

Cette paramétrisation sera dite lisse si les dérivées $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b)$ coincident à tout ordre $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas (et seulement dans ce cas) l'application induite $f : S^1 \to \mathbb{R}^n$ est lisse.

1.2.2 Paramétrisation par longueur d'arc

Longueur d'un arc

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée lisse et $A = \varphi(J) \subset \Gamma = \varphi(I)$ un arc fermé de la courbe géométrique Γ (i.e. J est un intervalle fermé).

Définition 1.2.5. *La longueur de l'arc A est*

$$\ell(A) := \int_J ||\varphi'(t)||dt,$$

où $|| \cdot ||$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

On vérifie sans peine que la longueur est égale à la limite des longueurs des lignes polygonales inscrites dans l'arc lorsque le maximum de la longueur de chaque segment de la ligne polygonale tend vers zéro. Ce deuxième point de vue permet de définir la longueur d'arcs non lisses que nous ne considérons pas dans ce cours.

Proposition 1.2.6. *La longueur de l'arc A est indépendante de la paramétrisation. Elle est invariante par isométrie.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule de changement de variables. □

Abscisse curviligne

Soit $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée *régulière* c'est à dire telle que $\varphi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Soit $L \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ la longueur de la courbe géométrique $\Gamma = \varphi(I)$ (c'est à dire le supremum des longueurs des arcs fermés de Γ). Alors l'application

$$h : t \in I \mapsto \int_{t_0}^{t} ||\varphi'(x)||dx \in [0, L]$$

est lisse et strictement croissante, de dérivée

$$\frac{dh}{dt} = ||\varphi'(t)|| \neq 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

Sa bijection inverse est donc lisse également. La paramétrisation

$$\psi := \varphi \circ h^{-1} : [0, L] \to \mathbb{R}^n$$

est une paramétrisation admissible de Γ qui s'appelle *paramétrisation par l'abscisse curviligne* (ou *par longueur d'arc*). Observons que le vecteur $\psi'(t)$ est unitaire quelque soit t, en effet

$$||\psi'(t)|| = \left\| \varphi'(h^{-1})(t) \frac{1}{||\varphi'(h^{-1}(t)||} \right\| = 1.$$

On dira ainsi également que Γ est paramétrée à vitesse unité.

Cette propriété caractérise la paramétrisation par longueur d'arc :

Proposition 1.2.7. *Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ deux paramétrisations d'une courbe géométrique Γ telles que $\varphi'(t), \psi'(x)$ sont des vecteurs unitaires pour tout $t, x \in I, J$. Alors $J = \alpha(I)$ où $\alpha(t) = \pm t + t_0$.*

Démonstration. Observons que $\psi = \varphi \circ \alpha$ pour un changement admissible α de paramétrisation. Le caractère unitaire de φ', ψ' assure que $|\alpha'(t)| = 1$ pour tout t. Il s'ensuit par connexité que soit $\alpha' \equiv 1$, soit $\alpha' \equiv -1$, d'où le résultat. □

1.2.3 Exemples

Exemple 1.2.8. *La paramétrisation*

$$\varphi : t \in [0, 2\pi R] \mapsto (R\cos(t/R), R\sin(t/R)) \in \mathbb{R}^2$$

est la paramétrisation par longueur d'arc du cercle centré à l'origine et de rayon R. Comme nous l'indique la proposition précédente, cette paramétrisation est unique une fois que l'on fixe le point $\varphi(0)$ (ici le point $(R, 0)$) et le sens de parcours (ici le sens trigonométrique).

La paramétrisation par longueur d'arc est un outil théorique important, mais il est en général impossible de l'exprimer à l'aide de "fonctions classiques" (il faut savoir intégrer la fonction longueur, puis inverser). Le cas du graphe d'une fonction est déjà éloquent (voir Exercice 14). Cependant, vous allez rencontrer des exemples "sur mesure" pour lequels on saura exprimer les choses et vous faire faire des calculs.

Observons que la paramétrisation de l'Exemple 1.2.8 s'exprime au moyen des fonctions transcendantes $\sin, \cos$. C'est le cas de la plupart des courbes (exceptées les droites bien entendu). L'Exercice 12 donne un exemple historique pour lequel la longueur d'arc est une fonction algébrique.

Exemple 1.2.9. *Soit $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3$. C'est une courbe algébrique de $\mathbb{R}^3$ appelée cubique twistée (tordue) donnée par les équations algébriques*

$$y = x^2 \text{ et } z = x^3.$$

Observons que ses projections sur les plans de coordonnées donnent respectivement les courbes d'équation $y = x^2$ (parabole du plan (Oxy)), $z = x^3$ (cubique lisse du plan (Oxz)) et $z^2 = y^3$ (cubique cuspidale du plan (Oyz)).

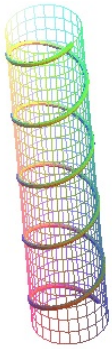
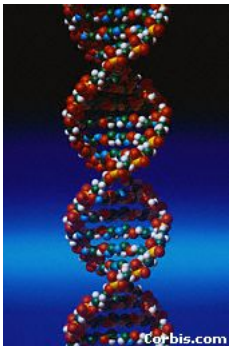
Exemple 1.2.10. *L'hélice circulaire de $\mathbb{R}^3$ est la courbe paramétrée*

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt) \in \mathbb{R}^3.$$

C'est une courbe traçée sur le cylindre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = a^2\}$ que nous étudierons plus en détail dans la section 1.4.6. Sa paramétrisation par longueur d'arc est donnée par (cf Exercice 26)

$$\psi(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

En voici quelques représentations :

Fin C1 2015

1.2.4 Courbes géométriques

Il existe de nombreux points de vue équivalents pour décrire une courbe géométrique, comme nous l'expliquons ici dans le cas des courbes planes :

Proposition 1.2.11. *Les propriétés suivantes sont localement équivalentes :*

i) $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *est le graphe d'une fonction d'une variable.*

ii) $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *est une courbe paramétrée régulière ;*

iii) il existe un difféomorphisme $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tel que* $\Phi(\{x = 0\}) = \Gamma$;

iv) Il existe une submersion lisse $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que* $\Gamma = F^{-1}(0)$.

Nous renvoyons le lecteur au début du chapitre 3 pour une description similaire en toute dimension.

Démonstration. Si $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = f(x)\}$ est le graphe d'une fonction lisse, alors $x \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation régulière de Γ, donc (i) implique (ii). Réciproquement si $\Gamma = \varphi(I)$ admet la paramétrisation régulière $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, on se place au voisinage d'un point tel que $x'(t) \neq 0$ (quitte à interchanger les rôles de x et y). Le théorème d'inversion locale assure que la fonction x est inversible au voisinage de ce point. On peut donc réaliser Γ comme le graphe de la fonction $y \circ x^{-1}$, d'où $(ii) \Rightarrow (i)$.

Soit $\varphi : t \in I \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ une paramétrisation régulière de Γ. Le vecteur tangent $\varphi'(t)$ est non nul en tout point, on se place au voisinage d'un point tel que $y'(t) \neq 0$ (on peut s'y ramener quitte à composer par le difféomorphisme $(x, y) \mapsto (y, x)$). Alors $\Phi : (s, t) \mapsto (s + x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme (local) tel que $\Phi(\{s = 0\}) = \Gamma$. Ainsi $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Réciproquement si $\Gamma = \Phi(\{s = 0\})$ est l'image de l'axe $\{s = 0\}$ par un difféomorphisme $\Phi(s, t) = (\alpha(s, t), \beta(s, t))$ alors Γ admet la paramétrisation régulière $\varphi : t \mapsto (\alpha(0, t), \beta(0, t))$, donc $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Considérons l'ensemble des points (x, y) d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ tels que $F(x, y) = 0$, où $F : U \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse. On suppose que la différentielle dF ne s'annule pas en un point $(x_0, y_0) \in U$. L'une au moins des deux dérivées partielles ne s'annule pas, disons $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ pour fixer

les idées. Par continuité, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$ ne s'annule pas pour (x,y) dans un petit voisinage V de (x_0,y_0). Le théorème des fonctions implicites assure alors l'existence d'un voisinage $V' \subset V$ de (x_0,y_0) tel qu'il existe une fonction lisse f telle que

$$\{(x,y) \in V' \,/\, F(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in V' \,/\, y = f(x)\}.$$

Cela montre l'implication $(iv) \Rightarrow (i)$.

Réciproquement si Γ est le graphe d'une fonction f, alors $\Gamma = F^{-1}(0)$ où $F(x,y) = y - f(x)$ est une submersion, donc $(i) \Rightarrow (iv)$. □

Remarque 1.2.12. *Ces propriétés ne sont pas globalement équivalentes : par exemple le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ peut s'exprimer comme l'image réciproque $F^{-1}(0)$ par la submersion $F : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mapsto x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R}$, mais il ne peut pas s'exprimer comme le graphe d'une (seule) fonction.*

1.3 Courbes planes

1.3.1 Courbure

Soit $s \in I \mapsto \varphi(s) \in \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par son abscisse curviligne. Alors le vecteur vitesse trace une courbe $s \mapsto \varphi'(s)$ sur le cercle unité. Celle-ci possède un vecteur vitesse $\varphi''(s)$, appelé accélération. Au signe près, la courbure est la norme de l'accélération. Le signe est bien défini, car l'accélération est orthogonale au vecteur vitesse, et on donne le signe (+) (resp. (-)) si l'accélération pointe vers la gauche (resp. la droite) de la vitesse.

Définition 1.3.1. *La courbure de la courbe géométrique $\Gamma = \varphi(I)$ paramétrée par sa longueur d'arc au point $\varphi(s)$ est*

$$\kappa(s) := \varepsilon(s)||\varphi''(s)||,$$

où le signe $\varepsilon(s) \in \{-1,+1\}$ est positif si $(\varphi'(t), \varphi''(t))$ est une base directe de $\mathbb{R}^2$, négatif sinon.

Notons que les vecteurs $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$ sont orthogonaux (dérivez la relation $||\varphi'(t)||^2 = 1$ pour vous en convaincre). Une expression utile qui exprime la courbure est donc

$$\kappa(t) = \det(\varphi'(t), \varphi''(t)).$$

La courbure est vue comme une fonction définie le long de la courbe. *Elle ne dépend pas d'un choix de paramétrisation, seulement de l'orientation de la courbe.*

Comme l'abscisse curviligne n'est pas souvent calculable, il est utile d'exprimer la courbure en fonction d'une paramétrisation quelconque :

Proposition 1.3.2. *Soit $\psi : t \in I \to (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ une paramétrisation quelconque d'une courbe géométrique orientée Γ. Alors la courbure $\kappa(t)$ de Γ au point $\psi(t)$ est donnée par*

$$\kappa(t) := \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}} = \frac{\det(\psi'(s), \psi''(s))}{||\psi'(s))||^3}.$$

La valeur absolue de la courbure est invariante par les isométries de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Soit $\varphi : J \to \mathbb{R}^2$ la paramétrisation par longueur d'arc normalisée de sorte que $\varphi(t) = \psi(s)$. Soit $T(t) := \varphi'(t)$ le vecteur unitaire tangent à la courbe et $N(t)$ le vecteur unitaire normal à $T(t)$, c'est à dire que $(T(t), N(t))$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

Comme $||T(t)||^2 = 1$, on obtient en dérivant que $2\langle T'(t), T(t)\rangle = 0$, donc $T'(t)$ est proportionnel à $N(t)$. Le facteur de proportionnalité est précisément la courbure $\kappa(t)$ de la courbe Γ. Autrement dit

$$\varphi''(t) = T'(t) = \kappa(t)N(t).$$

Notons à présent α le changement admissible de paramétrisation tel que $\varphi(t) = \psi \circ \alpha(t)$. Alors

$$\varphi'(t) = \frac{\psi'(s)}{||\psi'(s)||} \text{ avec } s = \alpha(t).$$

Dérivons à nouveau cette expression. Il vient

$$\varphi''(t) = \frac{\psi''(s)}{||\psi'(s)||^2} + b(s)\psi'(s)$$

pour une fonction $b(s)$ que nous ne cherchons pas à calculer. On en déduit

$$\kappa(t) = \det(\varphi'(t), \varphi''(t)) = \frac{1}{||\psi'(s))||^3} \det(\psi'(s), \psi''(s)).$$

La formule annoncée en résulte, en remplaçant ψ' et ψ'' par leurs coordonnées euclidiennes.

Si $F(p) = Ap + v$ et $\tilde{\psi} = F \circ \psi$ est l'image de ψ par une isométrie F, alors $\tilde{\psi}' = A\psi'$ et $\tilde{\psi}'' = A\psi''$. Il vient donc

$$\det(\tilde{\psi}'', \tilde{\psi}') = \det A \cdot \det(\psi'', \psi') = \pm \det(\psi'', \psi')$$

et $||\tilde{\psi}'|| = ||\psi'||$ puisque A est une rotation. Il s'ensuit que $|\tilde{\kappa}| = |\kappa|$. □

Signe de la courbure. Si on change le sens de parcours, la courbure change de signe. Le signe de la courbure dépend aussi de l'orientation du plan. Par conséquent, une isométrie du plan préservant l'orientation (e.g. une translation ou une rotation) préserve la courbure des courbes, une isométrie du plan renversant l'orientation (e.g. une symétrie par rapport à une droite) change la courbure des courbes de signe.

Exemples 1.3.3.

1) La courbure d'un cercle de rayon R est constante. Elle vaut $1/R$ si le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique, $-1/R$ sinon.

2) Au point (0, 0), la courbure de la parabole d'équation $y = x^2$, parcourue dans le sens des x croissants, vaut 2.

3) L'ellipse $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2$ a pour courbure

$$\kappa(t) = \frac{ab}{[a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t]^{3/2}}.$$

Sous l'angle de la géométrie différentielle, les cercles et les droites ont encore un statut particulier comme le montre le résultat qui suit :

Proposition 1.3.4. *Les seules courbes dont la courbure est constante sont les (portions de) droites et les cercles.*

Démonstration. Une preuve un peu trop théorique sera disponible lorsque nous aurons démontré que la courbure caractérise les courbes à isométrie globale près (Théorème 1.3.9) : un cercle et une droite ont une courbure constante (respectivement $\pm 1/R$ ou 0, i.e. on obtient tous les nombres réels) donc une courbe à courbure constante est l'image d'une droite ou d'un cercle par une isométrie globale, c'est donc bien un cercle ou une droite.

Il est sans doute préférable ici d'adopter une démarche plus terre à terre. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe géométrique de courbure constante. On peut paramétrer Γ par sa longueur d'arc $s \mapsto \varphi(s)$. Si la courbure est nulle, il vient $\varphi" \equiv 0$, il s'agit d'une (portion de) droite.

Supposons à présent que κ est une constante non nulle. Soit $T(s) = \varphi'(s)$ le vecteur unitaire tangent et $N(s) = T'(s)/\kappa$ le vecteur normal. Observons que

$$N'(s) = -\kappa T(s).$$

En effet N est unitaire donc N' est orthogonal à N, donc proportionnel à T. La constante de proportionnalité s'obtient en dérivant la relation d'orthogonalité

$$0 = \frac{d}{ds}\langle T, N\rangle = \langle T', N\rangle + \langle T, N'\rangle,$$

d'où $\langle T, N'\rangle = -\kappa$.

Soit $M(s) = \varphi(s) + \frac{1}{\kappa}N(s)$ le "centre de courbure" de Γ au point $\varphi(s)$. Le calcul précédent montre que $M(s) = M_0$ est constant, puisque

$$M'(s) = T(s) + \frac{1}{\kappa}N'(s) = 0.$$

Il s'ensuit que Γ est une portion du cercle de centre M_0 et de rayon $1/|\kappa|$. En effet

$$\|M_0 - \varphi(s)\| = \frac{1}{|\kappa|}\|N(s)\| = \frac{1}{|\kappa|}$$

puisque $N(s)$ est unitaire. □

1.3.2 Cercle osculateur

Soit Γ une courbe géométrique et $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ une paramétrisation. On note $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ les coordonnées euclidiennes.

L'équation d'un cercle $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$ dépend de trois paramètres (α, β, R). On peut fixer la valeur de ces paramètres de sorte que le cercle passe par le point $\varphi(t)$ avec un contact d'ordre 3 au moins. Effectuons un développement de Taylor-Young [4] au point $\varphi(t)$ tel que $(x(t)-\alpha)^2 + (y(t)-\beta)^2 = R^2$, il vient

$$x(s) - \alpha = (x(t) - \alpha) + x'(t)(s-t) + \frac{x''(t)}{2}(s-t)^2 + o((s-t)^2)$$

et on a un développement similaire pour $y(s) - \beta$.

Le cercle a un contact d'ordre au moins 3 avec Γ au point $\varphi(t)$ si

$$(x(s) - \alpha)^2 + (y(s) - \beta)^2 - R^2 = o((s-t)^2).$$

On en déduit que cette condition est satisfaite exactement lorsque

$$\begin{cases} (x(t) - \alpha)^2 + (y(t) - \beta)^2 - R^2 = 0, \\ (x(t) - \alpha)x'(t) + (y(t) - \beta)y'(t) = 0 \\ (x(t) - \alpha)x''(t) + (y(t) - \beta)y''(t) + x'(t)^2 + y'(t)^2 = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations permettent d'exprimer $(x(t)-\alpha)$ et $(y(t)-\beta)$ en fonction de x', y', x'', y'', à condition que $(x'y'' - x''y')(t) \neq 0$, c'est à dire lorsque la courbure de Γ au point $\varphi(t)$ n'est pas nulle, ce que nous supposons dans la suite. On obtient alors

$$x - \alpha = \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} \text{ et } y - \beta = -\frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}.$$

En reinjectant dans la première équation on obtient finalement

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} = \frac{1}{|\kappa(t)|}.$$

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

Proposition 1.3.5. *Si la courbure $\kappa(t) \neq 0$ est non nulle au point $\varphi(t) \in \Gamma$, alors il existe un cercle unique qui a un ordre de contact au moins trois avec Γ au point $\varphi(t)$. Ce cercle "osculateur" a pour rayon l'inverse de la valeur absolue de la courbure.*

Lorsque $\kappa(t) = 0$, on dit que la courbe admet un *point d'inflexion.* Dans ce cas la courbe Γ a un contact d'ordre deux avec sa tangente.

4. Brook Taylor, scientifique anglais (1685-1731) ; William Henry Young, mathématicien anglais (1863-1942).

1.3.3 Convexité

Définition 1.3.6. *On dit qu'une courbe géométrique est localement convexe si elle borde un ensemble convexe au voisinage de chacun de ses points.*

Bien entendu, le bord d'un ensemble convexe (ou concave) "régulier" définit une courbe localement convexe. On pourra vérifier cependant que la spirale

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t) \in \mathbb{R}^2$$

est localement convexe mais ne borde pas d'ensemble convexe (Exercice 17).

Proposition 1.3.7. *Une courbe géométrique est localement convexe en tout point si et seulement si sa courbure garde un signe constant.*

Démonstration. On considère la paramétrisation par longueur d'arc $s \mapsto \varphi(s)$. Au voisinage de $P = \varphi(0)$, dans le repère $(P, T(0), N(0))$ où $T(0)$ est le vecteur unitaire tangent et $N(0)$ le vecteur unitaire normal en P, la courbe est définie par une équation $y = f(x)$ où f est régulière.

Notons $\theta(s)$ l'angle entre $T(0)$ et $T(s)$. Observons que $\theta(s)$ est également l'angle entre $N(0)$ et $N(s)$. On a $T(s) = \varphi'(s)$ et $T'(s) = \kappa(s)N(s)$. En dérivant la relation $\langle N(0), T(s)\rangle = \sin\theta(s)$, il vient

$$\kappa(s)\cos\theta(s) = \langle N(0), T'(s)\rangle = \theta'(s)\cos\theta(s).$$

La courbure s'exprime donc simplement l'aide de la fonction θ,

$$\kappa(s) = \theta'(s).$$

Si $\varphi(s) = (x(s), y(s))$, alors $f'(x(s)) = \tan(\theta(s))$ donc la dérivée f' est croissante si et seulement si θ est croissante. Il s'ensuit que f est convexe si et seulement si la courbure $\kappa(s) = \theta'(s)$ est positive ou nulle.

On vérifie pour conclure que si la courbe $y = f(x)$ borde localement un ouvert, alors celui-ci coïncide (localement) avec $\{y > f(x)\}$ (ou $\{y < f(x)\}$) qui est convexe (resp. concave) ssi f est convexe (resp. concave). □

Remarque 1.3.8. *Retenez la formule $\kappa(s) = \theta'(s)$ liant la courbure à la dérivée de l'angle entre les vecteurs tangents, elle est très utile !*

1.3.4 Invariance par isométries

Nous avons déjà mentionné que les isométries du plan préservent la valeur absolue de la courbure ainsi que la dérivée de la longueur d'arc d'une courbe géométrique. Voici une réciproque importante à cette observation :

Théorème 1.3.9. *Soit Γ_1 et Γ_2 deux courbes géométriques régulières dans $\mathbb{R}^2$ qui ont la même courbure en valeur absolue.*

Alors il existe une isométrie du plan qui transforme Γ_1 en Γ_2.

Démonstration. On peut supposer que Γ_1, Γ_2 sont paramétrées par longueur d'arc φ_1, φ_2. Quitte à changer le sens de parcours de l'une des courbes, on peut supposer de plus que les courbures coincident (plutôt que les valeurs absolues de celles-ci). On a donc

$$\|\varphi_1'(t)\| = \|\varphi_2'(t)\| = 1 \text{ et } \kappa_1(t) = \kappa_2(t) \text{ pour tout } t.$$

Fixons t_0. Soit F l'isométrie du plan $\mathbb{R}^2$ composée d'une rotation qui envoie le vecteur unitaire $\varphi_1'(t_0)$ sur $\varphi_2'(t_0)$ et d'une translation qui envoie $\varphi_1(t_0)$ sur $\varphi_2(t_0)$. On va montrer que $F \circ \varphi_1 \equiv \varphi_2$. Pour cela considérons la fonction

$$f(t) := \|(F \circ \varphi_1)'(t) - \varphi_2'(t)\|^2.$$

On va montrer que $f' \equiv 0$. Comme $f(t_0) = 0$, il s'ensuit que f est identique à zéro, donc l'application $t \mapsto (F \circ \varphi_1 - \varphi_2)(t)$ est constante, donc nulle, puisqu'elle est nulle en t_0.

Il reste donc à calculer la dérivée de f. Rappelons que comme $\varphi_1'(t)$ et $\varphi_2'(t)$ sont des vecteurs unitaires, $\varphi_j'(t)$ et $\varphi_j''(t)$ sont orthogonaux. La différentielle de F est égale à F', sa composante rotationnelle, qui préserve l'orthogonalité. Rappelons enfin que la différentielle d'une application linéaire est égale à l'application linéaire elle même, ainsi $F'' = F'$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\langle (F \circ \varphi_1)''(t) - \varphi_2''(t), (F \circ \varphi_1)'(t) - \varphi_2'(t)\rangle \\ &= -2\langle F' \circ \varphi_1''(t), \varphi_2'(t)\rangle - 2\langle F' \circ \varphi_1'(t), \varphi_2''(t)\rangle. \end{aligned}$$

Soit $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Observons que $J\varphi_1'(t)$ (resp. $J\varphi_2'(t)$) est le vecteur normal direct à $\varphi_1'(t)$ (resp. $\varphi_2'(t)$), ainsi

$$\varphi_1''(t) = \kappa(t) J\varphi_1'(t) \text{ et } \varphi_2''(t) = \kappa(t) J\varphi_2'(t)$$

puisque les deux courbes ont la même courbure. Notons que F' commute avec J et $J +^t J = 0$, il vient donc

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2\kappa\langle F' \circ J\varphi_1', \varphi_2'(t)\rangle - 2\kappa\langle F' \circ \varphi_1'(t), J\varphi_2'(t)\rangle \\ &= -2\kappa\langle (F' \circ J +^t J \circ F')\varphi_1', \varphi_2'\rangle = 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Le théorème précédent fournit un résultat d'unicité : la courbure caractérise les courbes géométriques planes, à isométrie près. On peut également montrer un résultat d'existence :

Théorème 1.3.10. *Étant donnée une fonction lisse $\kappa : I \to \mathbb{R}$, il existe une courbe géométrique plane dont κ est la courbure.*

Démonstration. Nous allons utiliser le lien entre la courbure et la dérivée de l'angle entre les vecteurs tangents. Fixons $s_0 \in I$ et posons

$$\varphi(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos(\theta(t))\, dt, \int_{s_0}^{s} \sin(\theta(t))\, dt \right),$$

où

$$\theta(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(t)\, dt.$$

La courbe plane $\Gamma = \varphi(I) \subset \mathbb{R}^2$ est paramétrée par longueur d'arc puisque

$$\varphi'(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$$

et sa courbure est donnée par $K(s) = \kappa(s)$ puisque

$$\varphi''(s) = \theta'(s)\,(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) = \kappa(s)\,(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s)))\,.$$

□ Fin C2 2015

1.3.5 Etude locale et branches infinies

Position par rapport à la tangente

On s'intéresse ici à l'allure d'une courbe plane paramétrée Γ, $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, près d'un point régulier $p = \varphi(t_0)$, i.e. $\varphi'(t_0) \neq 0$.

Un développement limité de φ à l'ordre 2 en t_0 s'écrit

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\varphi''(t_0) + o((t - t_0)^2).$$

Si $\varphi'(t_0)$ et $\varphi''(t_0)$ sont linéairement indépendants, la courbe est située d'un seul côté de sa tangente, au voisinage de $p = \varphi(t_0)$: elle est contenue dans le demi-plan délimité par la tangente et contenant le vecteur $\varphi''(t_0)$.

Lorsque $\varphi''(t_0)$ est proportionnel à $\varphi'(t_0)$, il faut pousser le développement limité plus loin. Supposons que $\varphi^{(j)}(t_0)$ est proportionnel à $\varphi'(t_0)$ pour tout $1 \leq j \leq s-1$ et $\varphi^{(s)}(t_0)$ ne l'est pas. On effectue alors un développement limité à l'ordre s,

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + P_s(t)\varphi'(t_0) + \frac{(t - t_0)^s}{s!}\varphi^{(s)}(t_0) + o((t - t_0)^s),$$

où $P_s(t)$ est un polynôme de degré $s - 1$ qui s'annule en t_0 et qui s'exprime simplement en fonction du polynôme de Taylor de $\varphi(t)$ en t_0. On en déduit l'allure locale de Γ en fonction de la parité de s :

-si s est pair, la courbe est localement d'un seul côté de sa tangente,

-si s est impair, la courbe traverse sa tangente.

Il reste à comprendre le cas où tous les vecteurs dérivés $\varphi^{(j)}(t_0)$ sont proportionnels à $\varphi'(t_0)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. Si l'application φ est développable en série entière au voisinage de t_0, cela signifie alors que l'application φ s'écrit

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)h(t)\varphi'(t_0),$$

où h est une fonction réelle analytique. Dans ce cas, Γ est tout bonnement la droite passant par $\varphi(t_0)$ et de vecteur directeur $\varphi'(t_0)$!

Lorsque φ est lisse mais n'est pas développable en série entière, on ne peut pas conclure. Les exemples qui suivent montrent deux graphes qui ont cette propriété. Dans un cas la courbe est d'un côté de sa tangente, dans l'autre elle traverse sa tangente.

Exemple 1.3.11. *On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) \ \textit{si } x > 0 \\ 0 \ \textit{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \textit{et} \quad g(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) \ \textit{si } x > 0 \\ 0 \ \textit{si } x = 0 \\ -\exp(-1/x^2) \ \textit{si } x < 0 \end{cases}$$

On peut montrer (cf Exercice 16) que ces fonctions sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ avec toutes leurs dérivées nulles en 0. Elles ne sont donc pas développable en série entière en 0 (pourquoi ?).

Il est alors facile de vérifier que le graphe de f se situe au dessus de sa tangente en 0, tandis que le graphe de g traverse sa tangente en 0 (dans les deux cas cette tangente est l'axe des x).

Points singuliers

Soit Γ une courbe géométrique donnée par une paramétrisation $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$. Nous considérons à présent le cas d'un point singulier $a = \varphi(t_0)$, avec $\varphi'(t_0) = 0$.

Si les vecteurs dérivés $\varphi^{(j)}(t_0)$ sont tous nuls, on ne peut rien dire de plus sauf si φ est développable en série entière, auquel cas φ est une application constante. Supposons donc que $\varphi^{(p)}(t_0)$ est le premier vecteur non nul. Dans ce cas on appelle *tangente* à la courbe Γ en a la droite de vecteur directeur $\varphi^{(p)}(t_0)$ qui passe par le point $a = \varphi(t_0)$.

Si tous les $\varphi^{(j)}(t_0)$ sont proportionnels à $\varphi^{(p)}(t_0)$, soit φ est réelle-analytique et alors Γ est la droite passant par $\varphi(t_0)$ et de vecteur directeur $\varphi^{(p)}(t_0)$, soit on ne peut rien dire de plus, comme en s'on rend compte en modifiant très légèrement l'Exemple 1.3.11.

Supposons à présent qu'il existe $j > p$ tel que les vecteurs $\varphi^{(p)}(t_0)$ et $\varphi^{(j)}(t_0)$ sont linéairement indépendants. On note q le plus petit de ces entiers j. Le comportement local de la courbe Γ dépend alors de la parité de p et q :

Définition 1.3.12. *Si p est impair et q est pair : on parle de point de concavité, dans ce cas la courbe est du côté de la tangente qui contient $\varphi^{(q)}(t_0)$;*

Si p est impair et q est impair : on parle de point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente ;

Si p est pair et q est impair, on parle de point de rebroussement de première espèce, la courbe traverse sa tangente ;

Si p et q sont pairs, on parle de point de rebroussement de seconde espèce, la courbe est d'un côté de sa tangente.

Exemple 1.3.13. *Vous pouvez fabriquer des exemples de chacune des situations évoquées ci-dessus en paramétrant la courbe géométrique définie par*

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^a = y^b\}$$

et en jouant sur la valeur des paramètres $a, b \in \mathbb{N}$.

Branches infinies

Définition 1.3.14. *Si la norme de $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ tend vers l'infini lorsque t tend vers t_0 (t_0 pouvant être infini ou non), on dit que la courbe présente une branche infinie.*

On parle alors de direction asymptotique si les droites $(O\varphi(t))$ tendent vers une droite limite L lorsque $t \to t_0$ (cette notion est indépendante du choix de l'origine O).

Lorsque de plus la distance entre $\varphi(t)$ et une droite affine D parallèle à L tend vers zéro lorsque $t \to t_0$, on dit que Γ admet D pour asymptote.

Attention. Il faut préciser la présence éventuelle de branches infinies, directions asymptotiques et asymptotes lorsque vous étudiez des courbes paramétrées, même si cela ne vous est pas demandé explicitement dans l'exercice !

Exemple 1.3.15. *Etudions la tractrice, courbe de paramétrisation*

$$\varphi : t \in]0, \pi[\mapsto a\left(\sin t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

On calcule

$$x'(t) = a \cos t \quad \text{et} \quad y'(t) = a\left[-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right]$$

On en déduit le tableau des variations de x, y. On observe notamment que $\varphi(\pi/2) = (a, 0)$ est le seul point singulier de la courbe (i.e. $t = \pi/2$ est la seule valeur de t pour laquelle $\varphi'(t)$ est le vecteur nul).

Il faut également étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente, (le signe de) la courbure, les branches infinies. L'axe des ordonnées est une asymptote double à la courbe, lorsque $t \to 0^+$ et lorsque $t \to \pi^-$.

Pour calculer la courbure, on peut utiliser la formule

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Nous avons déjà calculé x', y', on en déduit

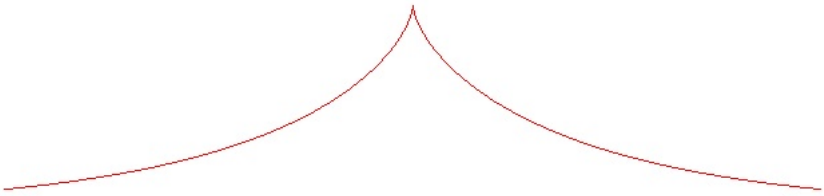
$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = a^2 \cos^2 t + a^2(-\sin t + 1/\sin t)^2 = a^2 \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}.$$

On calcule de même x'', y'' et on obtient

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = -a^2 \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}.$$

La courbure est donc $\kappa(t) = -|\tan t|/a$.

Il reste à tracer la courbe, vous pouvez évaluer en quelques valeurs particulières pour vous aider et obtenir



Equations polaires

De nombreuses courbes paramétrées sont exprimées en coordonnées polaires,

$$\varphi(\theta) = f(\theta)(\cos\theta, \sin\theta),$$

où $f : I \to \mathbb{R}^+$ est une fonction lisse qui représente la distance du point $\varphi(\theta)$ à l'origine. On écrit plus brièvement $r = f(\theta)$. Il est utile de savoir exprimer toutes les notions rencontrées jusqu'ici dans ce système de coordonnées. Nous listons ci-dessous quelques formules que vous devez savoir démontrer et utiliser dans les exercices. Soit pour la suite Γ une courbe de $\mathbb{R}^2$ donnée par une équation polaire $r = f(\theta)$.

Tangente. On note $u(\theta)$ le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$ et $v(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Ces vecteurs forment une base orthonormée dans laquelle il est commode de travailler, mais il ne faut pas oublier de les dériver ! Observer que

$$v(\theta) = u'(\theta) = u(\theta + \pi/2) \text{ et } v'(\theta) = -u(\theta) = u(\theta + \pi).$$

Avec ces notations, le vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ est

$$\varphi'(\theta) = f'(\theta)u(\theta) + f(\theta)v(\theta)$$

La courbe Γ est donc régulière si et seulement si f et f' ne s'annulent pas en même temps.

Abscisse curviligne. La longueur de l'arc joignant $\varphi(\theta_1)$ à $\varphi(\theta_2)$ est

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + f'(\theta)^2} d\theta.$$

C'est une conséquence immédiate de l'expression donnée ci-dessus de $\varphi'(\theta)$ dans la base orthonormée $\{u(\theta), v(\theta)\}$.

Courbure. La courbure de Γ s'exprime en fonction de f par

$$\kappa(\theta) = \frac{f^2(\theta) + 2f'(\theta)^2 - f(\theta)f''(\theta)}{[f^2(\theta) + f'(\theta)^2]^{3/2}}.$$

En effet rappelons que $\varphi' = f'u + fv$ et observons que

$$\varphi''(\theta) = [f''(\theta) - f(\theta)]u(\theta) + 2f'(\theta)v(\theta).$$

Il s'ensuit que

$$\kappa(\theta) = \frac{\det(\varphi'(\theta), \varphi''(\theta))}{\|\varphi'(\theta\|^3} = \frac{1}{[f^2(\theta) + f'(\theta)^2]^{3/2}} \begin{vmatrix} f' & f'' - f \\ f & 2f' \end{vmatrix},$$

ce qui donne la formule annoncée.

Exemple 1.3.16. *Considérons la lemniscate de Bernoulli*[5] *dont l'équation dans le plan de coordonnées* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *est donnée par*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2d^2(x^2 - y^2) = 0.$$

La paramétrisation de cette courbe en coordonnées polaires est

$$f(\theta)^4 = 2d^2 f(\theta)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta),$$

d'où

$$f(\theta) = d\sqrt{2}\sqrt{\cos(2\theta)}.$$

Il faut que le cosinus considéré soit positif. On mène l'étude de cette courbe pour les angles $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$*, puis on complète le dessin par symétries par rapport aux axes de coordonnées. On calcule*

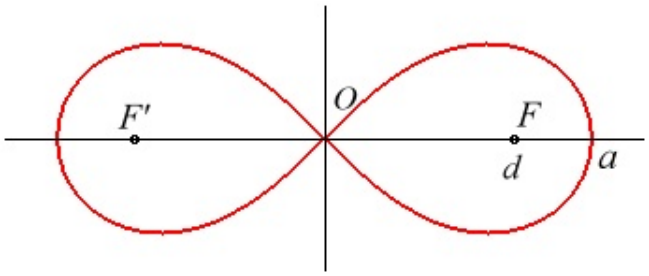
$$f^2 + (f')^2 = \frac{2d^2}{\cos(2\theta)} \quad \textit{et} \quad ff'' = -2d^2\left[2\cos(2\theta) + \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}\right].$$

5. Jakob Bernoulli, mathématicien et physicien suisse (1654-1705), frère de Jean Bernoulli et oncle de Daniel Bernoulli et Nicolas Bernoulli.

On en déduit la courbure de la lemniscate,

$$\kappa(\theta) = \frac{3\sqrt{\cos(2\theta)}}{2d^2}$$

On étudie la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi/4]$ (f y décroît, s'annule en $\pi/4$, on calcule les tangentes aux extrémités correspondantes) avant de tracer le graphe de la lemniscate dont une représentation est



Observez que cette lemniscate est le lieu des points M du plan tels que

$$|MF| \cdot |MF'| = d^2 \text{ où } F' = (-d, 0), F = (d, 0).$$

1.4 Courbes gauches

1.4.1 Tangente, plan normal, plan osculateur

Soit $\varphi : t \in I \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée Γ. Les équations d'une droite affine de $\mathbb{R}^3$ dépendent de quatre paramètres, par exemple

$$y = ax + b \text{ et } z = cx + d.$$

On peut choisir ceux-ci de sorte que la droite ait un contact d'ordre deux avec la courbe. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que cela conduit aux équations suivantes pour la *tangente* à Γ :

Définition 1.4.1. *La tangente en un point régulier (x, y, z) de Γ est donnée par les équations*

$$y'(X - x) = x'(Y - y) \text{ et } z'(Y - y) = y'(Z - z).$$

Il s'agit de la droite $\varphi(t) + \mathbb{R}\varphi'(t) = \varphi(t) + \mathbb{R}T(t)$, où $T(t)$ désigne le vecteur tangent unitaire à la courbe Γ au point $\varphi(t)$.

Définition 1.4.2. *Le plan perpendiculaire à la tangente en un point régulier est appelé plan normal et a pour équation*

$$x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0.$$

C'est le plan $\varphi(t) + \mathrm{Vect}\{\mathrm{N(t)}, \mathrm{B(t)}\}$ engendré par le vecteur normal et le vecteur binormal unitaire (voir plus bas pour leur définition).

L'équation d'un plan affine $ax + by + cz + d = 0$ dépend de trois paramètres (le plan reste inchangé si on multiplie l'équation définissante par une constante non nulle) qui peuvent être choisis de manière à avoir un ordre de contact au moins trois avec la courbe. Le plan correspondant (qui est déterminé de façon unique) s'appelle le *plan osculateur*.

Proposition 1.4.3. *Le plan osculateur est donné par l'équation*

$$\det \begin{bmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix} = 0.$$

C'est le plan $\varphi(t) + \mathrm{Vect}\{\mathrm{T(t)}, \mathrm{N(t)}\}$ engendré par le vecteur tangent et le vecteur normal unitaires.

Démonstration. Soit $aX + bY + cZ + d = 0$ l'équation d'un plan. Ce plan passe par le point $\varphi = (x, y, z)$ si $ax + by + cz + d = 0$. On effectue un développement de Taylor-Young des fonctions coordonnées de $\varphi(s)$ au point $\varphi(t) = (x, y, z)(t)$, il vient

$$x(s) = x(t) + x'(t)(s - t) + \frac{x''(t)}{2}(s - t)^2 + o((s - t)^2),$$

et un développement similaire pour $y(s)$ et $z(s)$.

Le plan a un ordre de contact au moins trois au point $\varphi(t)$ si

$$ax(s) + by(s) + cz(s) + d = o((s - t)^2).$$

On injecte les développements limités des fonctions coordonnées dans cette équation pour obtenir le système de trois équations

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax' + by' + cz' = 0 \\ ax'' + by'' + cz'' = 0 \end{cases}$$

On retranche à la première équation $aX + bY + cZ + d = 0$ pour aboutir au système homogène

$$\begin{cases} a(x - X) + b(y - Y) + c(z - Z) = 0 \\ ax' + by' + cz' = 0 \\ ax'' + by'' + cz'' = 0 \end{cases}$$

Ce sytème admet une solution non nulle, son déterminant vaut donc zéro. L'expression de a, b, c est donc donnée par le déterminant de l'énoncé. $\square$

1.4.2 Cercle osculateur

Les équations d'un cercle $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$ dépendent de 7 paramètres. On note (α, β, γ) son centre, R son rayon et (u, v, w) les coordonnées d'un vecteur normal au plan qui contient le cercle. Les équations de $\mathcal{C}$ sont alors

$$\begin{cases} (X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 + (Z-\gamma)^2 - R^2 = 0 \\ u(X-\alpha) + v(Y-\beta) + w(Z-\gamma) = 0 \end{cases}$$

Soit Γ une courbe gauche paramétrée par $\varphi : t \in I \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$. Le cercle $\mathcal{C}$ a un contact d'ordre trois avec Γ au point $\varphi(t)$ si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - R^2 &= 0 && (A) \\ x'(x-\alpha) + y'(y-\beta) + z'(z-\gamma) &= 0 && (B) \\ x''(x-\alpha) + y''(y-\beta) + z''(z-\gamma) + x'^2 + y'^2 + z'^2 &= 0 && (C) \\ u(x-\alpha) + v(y-\beta) + w(z-\gamma) &= 0 && (D) \\ ux' + vy' + wz' &= 0 && (E) \\ ux'' + vy'' + wz'' &= 0 && (F) \end{aligned}$$

Les trois dernières équations montrent que le centre du cercle (α, β, γ) appartient au plan osculateur, puisque

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-\gamma \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \qquad (G)$$

Les équations (B), (C), (G) forment un système linéaire de trois équations en les trois inconnues $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$. Pour le résoudre il est commode de poser

$$A = (y'z'' - z'y''), \qquad B = (z'x'' - x'z''), \qquad C = (x'y'' - y'x'').$$

On obtient alors

$$x - \alpha = (Cy' - Bz')\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y - \beta = (Az' - Cx')\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

et

$$z - \gamma = (Bx' - Ay')\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Cela détermine les coordonnées du centre du cercle osculateur. On en déduit facilement son rayon,

$$R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Observons que A, B, C sont les coordonnées du vecteur $\varphi' \wedge \varphi''$. Il résulte donc de la Proposition 1.4.11 que le rayon du cercle osculateur est l'inverse de la courbure à Γ (qui sera définie plus loin). On peut de même exprimer les coordonnées du centre du cercle osculateur de façon vectorielle, il vient

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta, \gamma) &= \varphi + \frac{\|\varphi'\|^2}{\|\varphi' \wedge \varphi''\|^2} \varphi' \wedge (\varphi' \wedge \varphi'') \\ &= \varphi + \frac{\|\varphi'\|^2}{\|\varphi' \wedge \varphi''\|^2} \left(\langle \varphi', \varphi'' \rangle \varphi' - \|\varphi'\|^2 \varphi'' \right).\end{aligned}$$

Nous résumons la discussion qui précède ainsi :

Proposition 1.4.4. *Soit Γ une courbe gauche paramétrée par $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$. Il existe un unique cercle qui réalise un contact d'ordre trois (au moins) avec Γ au point $\varphi(t)$. Il est inclus dans le plan osculateur à Γ en $\varphi(t)$, a pour rayon $R = 1/\kappa(t)$, où*

$$\kappa = \frac{\|\varphi' \wedge \varphi''\|}{\|\varphi'\|^3},$$

et pour centre le point

$$\varphi + \frac{\|\varphi'\|^2}{\|\varphi' \wedge \varphi''\|^2} \left(\langle \varphi', \varphi'' \rangle \varphi' - \|\varphi'\|^2 \varphi'' \right).$$

Lorsque la paramétrisation est à vitesse unité, vous pourrez vérifier que le centre du cercle osculateur s'exprime simplement dans la base de Frenet (définie juste après) par $\varphi(t) - \kappa^{-1}(t) N(t)$.

1.4.3 Formules de Frenet

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe géométrique paramétrée par sa longueur d'arc $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^3$. Rappelons que cela implique que pour tout $s \in I$, $\|\varphi'(s)\| = 1$. On note

$$T(s) := \varphi'(s), \text{ le } \textbf{vecteur tangent unitaire}.$$

Comme $T(s)$ est unitaire, le vecteur dérivée $T'(s)$ est orthogonal à $T(s)$. On suppose dans la suite que $T'(s) \neq 0$ et on définit

$$N(s) := \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} \text{ le } \textbf{vecteur normal principal unitaire}.$$

Définition 1.4.5. *La courbure $\kappa(s)$ de la courbe Γ au point $\varphi(s)$ est*

$$\kappa(s) := \|T'(s)\| = \|\varphi''(s)\|.$$

Remarques 1.4.6.

1) Par définition la courbure d'une courbe gauche est toujours positive (ou nulle). Lorsque cette courbe est plane (i.e. vit dans un plan affine de $\mathbb{R}^3$), elle coincïde avec la valeur absolue de la courbure définie prćdemment.

2) Notons que le vecteur normal unitaire n'est défini que lorsque la courbure ne s'annule pas. Cependant celle-ci ne peut pas trop s'annuler, à moins que la courbe soit une droite : une courbe gauche est une (portion de) droite si et seulement si sa courbure est nulle. En effet dans ce cas $\varphi''(s) \equiv 0$, donc $s \mapsto \varphi(s)$ est affine.

On a donc $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ par définition. Le **vecteur binormal** est

$$B(s) := T(s) \wedge N(s).$$

Il s'ensuit que $\{T(s), N(s), B(s)\}$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ qui bouge avec s et va être particulièrement adaptée à l'étude des propriétés géométriques de la courbe Γ. On l'appelle le **repère de Frenet** [6].

On cherche à présent à calculer les dérivées de ces vecteurs exprimées dans le repère de Frenet. Par définition $T'(s) = \kappa(s)N(s)$. Pour exprimer $N'(s)$, observons que $N'(s)$ est orthogonal à $N(s)$ puisque $N(s)$ est unitaire. Notons également qu'en dérivant la relation d'orthogonalité entre $T(s)$ et $N(s)$, on obtient

$$0 = (\langle T(s), N(s)\rangle)' = \langle T'(s), N(s)\rangle + \langle T(s), N'(s)\rangle.$$

Cela permet de déterminer la coordonnée de $N'(s)$ dans la direction de $T(s)$: il vient

$$\langle T(s), N'(s)\rangle = -\langle T'(s), N(s)\rangle = -\kappa(s).$$

La troisième coordonnée de $N'(s)$, celle dans la direction de $B(s)$ s'appelle la torsion.

Définition 1.4.7. *La torsion $\tau(s)$ de la courbe Γ au point $\varphi(s)$ est*

$$\tau(s) := \langle B(s), N'(s)\rangle.$$

Déterminons enfin les coordonnées de $B'(s)$. Comme précédemment, $B'(s)$ est orthogonal à $B(s)$ (caractère unitaire). La coordonnée dans la direction de $N(s)$ est

$$\langle N(s), B'(s)\rangle = -\langle N'(s), B(s)\rangle = -\tau(s).$$

Enfin la coordonnée dans la direction de $T(s)$ est

$$\langle T(s), B'(s)\rangle = -\langle T'(s), B(s)\rangle = 0.$$

Nous venons ainsi d'établir les formules de Frenet que nous résumons sous forme matricielle dans la proposition suivante.

6. Jean Frédéric Frenet, mathématicien, astronome et météorologue français (1816-1900). Les formules de Frenet constituent une partie de sa thèse de doctorat qu'il a passé à Toulouse en 1847. Il fut professeur à l'Université de Toulouse en 1848-49.

Proposition 1.4.8. *Les dérivées du repère de Frenet sont données par*

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

Notons que le vecteur normal et le vecteur binormal ne sont bien définis que lorsque la courbure ne s'annule pas. Dans ce cas, la torsion est (identiquement) nulle si et seulement si la courbe est plane :

Proposition 1.4.9. *Une courbe gauche dont la courbure ne s'annule pas est incluse dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle.*

Démonstration. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe gauche. Si elle est incluse dans un plan, on peut translater la figure pour que ce plan soit $(z = 0)$. Une paramétrisation de Γ est donc du type

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), 0).$$

On en déduit que les vecteurs φ, φ' et φ'' sont liés donc $\tau \equiv 0$.

Réciproquement supposons que $\tau \equiv 0$. On en déduit que le vecteur binormal $B(s) = B_0$ est constant puisque $B' = \tau N$. Il s'ensuit que la courbe Γ est contenue dans le plan osculateur qui est fixe, c'est le plan affine qui passe par $\varphi(0)$ et est normal à $B(0)$: en effet quitte à translater on peut supposer que $\varphi(0) = 0$, il vient alors pour tout t,

$$\langle \varphi'(t), B(0) \rangle = 0$$

d'où $\langle \varphi(t), B(0) \rangle = 0$ après intégration. □

Remarque 1.4.10. *Lorsque la courbure s'annule quelque part, il se peut que la torsion soit identique à zéro là où elle est définie sans que la courbe soit plane (voir Exercice 33).*

1.4.4 Paramétrisation quelconque

Il est utile d'établir les expressions de la courbure et de la torsion lorsque la courbe est donnée par une paramétrisation qui n'est pas nécessairement la paramétrisation par longueur d'arc.

Proposition 1.4.11. *Soit Γ une courbe géométrique régulière donnée par une paramétrisation quelconque $\varphi : t \in I \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^3$. La courbure de Γ au point $\varphi(t)$ est donnée par*

$$\kappa(t) = \frac{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|}{\|\varphi'(t)\|^3}.$$

Démonstration. Le vecteur unitaire tangent $T(t)$ est donné par $\varphi'(t) = \|\varphi'(t)\|T(t)$. En dérivant une seconde fois on obtient

$$\varphi''(t) = \|\varphi'(t)\|T'(t) + a(t)T(t),$$

où $a(t)$ est une fonction que nous ne cherchons pas à calculer.

Observons que $T'(t)$ est orthogonal à $T(t)$ puisque celui-ci est unitaire, on a donc $\|T(t) \wedge T'(t)\| = \|T(t)\| \cdot \|T'(t)\|$, d'où

$$\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\| = \|\varphi'(t)\|^2 \|T(t) \wedge T'(t)\| = \|\varphi'(t)\|^3 \kappa(t).$$

□

Proposition 1.4.12. *Soit Γ une courbe géométrique donnée par une paramétrisation quelconque $\varphi : t \in I \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^3$. La torsion de Γ au point $\varphi(t)$ est donnée par*

$$\tau(t) = \frac{\det(\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'''(t))}{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|^2}.$$

Démonstration. Soit $\psi(s)$ la paramétrisation de Γ par son abscisse curviligne, $\psi = \varphi \circ \alpha$, avec $\alpha'(s) = \|\psi'(t)\|^{-1}$, $t = \alpha(s)$. Nous allons montrer que la torsion de Γ au point $\psi(s)$ est donnée par

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa(s)^2} \det(\psi'(s), \psi''(s), \psi'''(s)). \tag{1.1}$$

La formule annoncée en résultera, en observant que $\varphi' = \alpha' \psi' \circ \alpha$,

$$\varphi'' = (\alpha')^2 \psi'' \circ \alpha + A\psi' \circ \alpha \text{ et } \varphi''' = (\alpha')^3 \psi''' \circ \alpha + B\psi'' \circ \alpha + C\psi' \circ \alpha,$$

où A, B, C sont des fonctions que nous ne précisons pas. Il résulte alors de la Proposition 1.4.11 et de (1.1) que

$$\tau(t) = \tau(s) = \frac{\|\psi'(t)\|^6 \det(\varphi'(s), \varphi''(s), \varphi'''(s))}{\|\psi'(t) \wedge \psi''(t)\|^2} = \frac{\det(\psi'(t), \psi''(t), \psi'''(t))}{\|\psi'(t) \wedge \psi''(t)\|^2},$$

comme annoncé.

Il reste donc à établir (1.1), c'est à dire à exprimer la torsion en fonction de φ et ses dérivées, lorsque φ est la paramétrisation de Γ par l'abscisse curviligne. Rappelons que

$$\tau(s) = \langle B(s), N'(s) \rangle = -\langle N(s), B'(s) \rangle.$$

Or $B(s) = T(s) \wedge N(s)$, il résulte donc des propriétés du produit vectoriel rappelées au paragraphe 1.1.3 que

$$\tau(s) = -\langle N(s), T(s) \wedge N'(s) \rangle = \det(T(s), N(s), N'(s)).$$

On conclut en observant que $T(s) = \varphi'(s)$, $N(s) = \kappa(s)^{-1}\varphi''(s)$ et

$$N'(s) = \kappa(s)^{-1}\varphi'''(s) + a(s)\varphi''(s)$$

où $a(s)$ est une fonction qui n'intervient pas dans le déterminant. □

1.4.5 Invariance par isométries

Proposition 1.4.13. *La courbure et la valeur absolue de la torsion sont invariantes par les isométries de* $\mathbb{R}^3$.

Rappelons ques les isométries de $\mathbb{R}^3$ sont engendrées par les translations et les matrices orthogonales. Il suffit donc de vérifier l'impact des ces deux types de transformations sur la courbure et la torsion.

Démonstration. Il est clair que l'action d'une translation ne change ni la courbure, ni la torsion. Soit donc $A \in O(3, \mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par son abscisse curviligne $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ et soit Γ_2 la courbe paramétrée par $\psi = A \circ \varphi$. Alors

$$\|\psi'(s)\| = \|A\varphi'(s)\| = 1$$

puisque A est orthogonale, donc Γ_2 est également paramétrée par son abscisse curviligne et $T_2(s) = AT(s)$. En dérivant à nouveau il vient

$$\kappa_2(s)N_2(s) = \kappa(s)AN(s).$$

Comme A est orthogonale, $AN(s)$ est un vecteur unitaire donc $N_2(s) = AN(s)$ et $\kappa_2(s) = \kappa(s)$. Il s'ensuit que

$$B_2(s) = T_2(s) \wedge N_2(s) = AT(s) \wedge AN(s) = \det A \cdot A(T(s) \wedge N(s)),$$

avec $\det A = +1$ si A est une isométrie directe (qui préserve l'orientation) et $\det A = -1$ sinon (par exemple pour une réflexion). On a utilisé ici l'orthogonalité de la matrice A (${}^tA = A^{-1}$) en observant que pour tout $w \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle AT \wedge AN, w\rangle = \det A\langle T \wedge N, A^{-1}w\rangle = \det A\langle A(T \wedge N), w\rangle.$$

On en déduit que

$$B_2(s) = \pm AB(s),$$

où le signe est donné par $\det A$. En dérivant cette égalité on obtient, puisque $N_2(s) = AN(s)$,

$$\tau_2(s) = \tau(s) \text{ si } \det A > 0 \text{ et } \tau_2(s) = -\tau(s) \text{ sinon.}$$

Dans les deux cas, la valeur absolue de la torsion est préservée. □

Le résultat suivant exprime un phénomène de rigidité des courbes gauches :

Théorème 1.4.14. *Soit* $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^3$ *deux courbes géométriques paramétrées par leur abscisse curviligne. Si elles ont même courbure et torsion et si la courbure ne s'annule pas, alors il existe une isométrie directe de* $\mathbb{R}^3$ *qui envoie une courbe sur l'autre.*

Notons que lorsque la courbure s'annule, le repère de Frenet n'est pas correctement défini et il peut se passer des phénomènes compliqués. On pourra consulter à cet égard l'Exercice 33.

Comme nous l'avons observé dans la preuve de la proposition précédente, une réflexion change le signe de la torsion et est donc interdite ici.

Démonstration. Soit $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}^3$ les paramétrisations par l'abscisse curviligne de Γ_1, Γ_2. On peut supposer que $0 \in I$. Comme le groupe orthogonal $O(3, \mathbb{R})$ est 3-transitif, on peut trouver une matrice $A \in O(3, \mathbb{R})$ telle que

$$AT_1(0) = T_2(0),\ AN_1(0) = N_2(0),\ \text{et } AB_1(0) = B_2(0).$$

Comme les base orthonormées $\{T_1(0), N_1(0), B_1(0)\}$ et $\{T_2(0), N_2(0), B_2(0)\}$ sont toutes les deux directes, la matrice A est de déterminant 1.

Soit $V = \varphi_2(0) - A\varphi_1(0) \in \mathbb{R}^3$ et Ψ l'isométrie positive $\Psi(X) = AX + V$. Posons $\Phi = \Psi \circ \varphi_1$. On va montrer que $\Phi \equiv \varphi_2$, ce qui montrera que Γ_2 est l'image de Γ_1 sous l'action de Ψ. On note $T_2(s), N_2(s), B_2(s)$ le repère de Frenet de Γ_2 et $T(s), N(s), B(s)$ celui de la courbe paramétrée par l'abscisse curviligne $\Phi = \Psi \circ \varphi_1$. Les choix de A et de la translation V assurent que

$$\Phi(0) = \varphi_2(0) \ \text{ et } \ (T(0), N(0), B(0)) = (T_2(0), N_2(0), B_2(0)).$$

Il résulte de la proposition précédente (et de sa preuve) que la courbure et la torsion de Φ sont égales à celles de Γ_1, Γ_2. On les note κ, τ. Soit

$$f(s) := \langle T(s), T_2(s)\rangle + \langle N(s), N_2(s)\rangle + \langle B(s), B_2(s)\rangle.$$

On dérive f en utilisant les formules de Frenet. Il vient

$$\begin{aligned} f'(s) &= T' \cdot T_2 + T \cdot T_2' + N' \cdot N_2 + N \cdot N_2' + B' \cdot B_2 + B \cdot B_2' \\ &= \kappa\,(N \cdot T_2 + T \cdot N_2) - \kappa\,(T \cdot N_2 + N \cdot T_2) \\ &\quad + \tau\,(B \cdot N_2 + N \cdot B_2) - \tau\,(N \cdot B_2 + B \cdot N_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a noté ici $u \cdot v = \langle u, v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v.

On en déduit que $f(s)$ est constante, égale à $f(0) = 3$. Or $f(s)$ est somme de trois termes qui valent tous au plus 1, c'est donc que chacun est égal à 1, ce qui impose les relations $T(s) = T_2(s)$, $N(s) = N_2(s)$, $B(s) = B_2(s)$, pour tout s. En particulier, comme le vecteur tangent unitaire est la dérivée de l'abscisse curviligne et comme $\varphi_2(0) = \Phi(0)$ (c'est là qu'on a besoin de la translation), il vient $\Phi \equiv \varphi_2$, comme nous l'avions annoncé. □

On trouvera dans l'Exercice 35 un calcul matriciel qui donne une méthode alternative pour la dernière partie de la démonstration.

Remarque 1.4.15. *Le théorème précédent est un résultat d'unicité. On peut également démontrer un résultat d'existence : étant données deux fonctions lisses $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ avec $\kappa > 0$, il existe une courbe gauche $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ dont κ et τ sont la courbure et la torsion.*

La preuve consiste à démontrer l'existence d'un trièdre qui vérifie les relations de Frenet. Celles-ci peuvent s'interpréter comme un système d'équations différentielles linéaires dont l'existence des solutions est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz. On intègre finalement le vecteur tangent pour obtenir une courbe Γ solution (les autres solutions s'en déduisent par isométries directes). Nous invitons le lecteur à mettre en place cette démonstration, il en trouvera les détails rédigés dans le livre de DoCarmo, pp 309-311.

1.4.6 Les hélices

Nous avons rencontré dans l'Exemple 1.2.10 la notion d'hélice traçée sur un cylindre. Nous étudions dans cette section une classe légèrement plus large d'exemples afin de mettre en pratique les notions que nous avons rencontrées jusqu'ici.

Définition 1.4.16. *Une hélice (généralisée) dans $\mathbb{R}^3$ est une courbe dont la tangente fait un angle constant avec une direction fixe.*

Exemple 1.4.17. *Considérons une hélice circulaire donnée par sa paramétrisation par longueur d'arc, comme indiquée dans l'Exemple 1.2.10,*

$$\psi(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right),$$

où a, b sont des paramètres réels. On peut vérifier (Exercice 26) que la courbure et la torsion de cette courbe sont constantes, données par

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ et } \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Les droites tangentes à cette hélice font toutes un angle constant par rapport à l'axe $(0z)$ du cylindre.

Exemple 1.4.18. *On considère ici la courbe Γ paramétrée par*

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3) \in \mathbb{R}^3.$$

Un calcul immédiat montre que

$$\|\varphi'(t)\| = 3\sqrt{2}(1+t^2) \text{ et } T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1\right).$$

On reconnait des formules classiques de trigonométrie (celles qui font intervenir la tangente de l'angle moitié). Posons $t = \tan(\theta/2)$. Lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, l'angle θ parcourt l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

Soit $\psi(\theta)$ la paramétrisation par longueur d'arc, elle vérifie

$$\psi'(\theta) = T(\tan\theta/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\cos\theta, \sin\theta, 1)\,,$$

donc

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\sin\theta, -\cos\theta, \theta)\,,$$

en normalisant convenablement. Il s'ensuit que $\psi''(\theta) = \kappa(\theta)N(\theta)$ avec

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } N(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) = \left(-\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 0\right).$$

Calculons à présent le vecteur binormal $B(\theta) = T(\theta) \wedge N(\theta)$. Il vient

$$B(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\sin\theta, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1-t^2}{1+t^2}, -\frac{2t}{1+t^2}, 1\right).$$

La torsion est donc également constante, $\tau(\theta) = \kappa(\theta) \equiv 1/\sqrt{2}$.

Il s'agit bien d'une hélice généralisée car le vecteur tangent $T(t)$ fait un angle constant $\pi/4$ avec le vecteur unitaire $V_0 = (0, 0, 1)$,

$$\langle T(t), V_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}.$$

Dans l'exemple précédent, le quotient de la courbure par la torsion est constant, égal à 1. Cette propriété caractérise les hélices généralisées :

Proposition 1.4.19. *Une courbe gauche est une hélice généralisée si et seulement si le quotient de sa courbure par sa torsion est constant.*

Démonstration. Supposons que la courbe est paramétrée par sa longueur d'arc $\varphi(s)$. Soit $T(s) = \varphi'(s)$ le vecteur tangent unitaire. Supposons qu'il existe un vecteur fixe unitaire V_0 tel que $\langle T(s), V_0\rangle = \cos\theta$ est constant. En dérivant cette équation, on obtient $\kappa(s)\langle N(s), V_0\rangle = 0$. En dérivant à nouveau, il vient d'après les formules de Frenet,

$$\langle -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), V_0\rangle = 0.$$

Comme V_0 est orthogonal à $N(s)$, il appartient au plan engendré par $T(s)$ et $B(s)$. Puisqu'il est unitaire on a $\langle B(s), V_0\rangle = \pm\sin\theta$ et l'équation précédente montre donc que

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \pm\tan\theta \text{ est constant.}$$

Réciproquement supposons que $\kappa(s)/\tau(s) = \tan\theta$ est constant et posons

$$V(s) := \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s).$$

On obtient en dérivant $V'(s) = (\kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta)N(s) = 0$, donc $V(s) = V_0$ est un vecteur unitaire constant et la tangente $T(s)$ fait un angle constant avec V_0 puisque $\langle T(s), V_0\rangle = \cos\theta$. □

Notons pour conclure une conséquence simple du théorème fondamental de la théorie local des courbes gauches :

Proposition 1.4.20. *Les seules courbes dont la courbure et la torsion sont constantes sont les hélices circulaires.*

Démonstration. Soit $\varphi(s)$ la paramétrisation par longueur d'arc de la courbe Γ et $(\kappa, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ les constantes déterminant la courbure et la torsion. Si $\kappa = 0$, alors la courbe Γ est une droite (cf Remarques 1.4.6), c'est à dire une hélice dégénérée (cercle de rayon infini).

Supposons donc $\kappa > 0$ et fixons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ et } \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Soit $\psi(s)$ la paramétrisation par longueur d'arc de l'hélice H d'axe $(0z)$ et de paramètres (a, b) (cf Exemples 1.2.10, 1.4.17). Alors φ et ψ ont même courbure et même torsion. D'après le Théorème 1.4.14, ces deux courbes diffèrent l'une de l'autre par l'action d'une isométrie F de $\mathbb{R}^3$.

Nous laissons le lecteur vérifier qu'une telle isométrie envoie un cylindre droit sur un cylindre droit et une hélice sur une hélice. Il s'ensuit que Γ est une hélice circulaire d'axe $F(Oz)$ et de paramètres a, b. □

1.5 Propriétés globales

Il est utile, même lorsque l'on s'intéresse à des propriétés différentielles (ou métriques) de considérer des *invariants topologiques*. Ce sont des objets (nombres, groupes, etc) qui restent inchangés lorsque l'on déforme continûment la structure étudiée.

1.5.1 Applications du cercle

On s'intéresse ici au *degré* des applications du cercle S^1 dans lui même, qui apparaissent lorsque l'on étudie les vecteurs tangents de courbes fermées.

Relevés des applications

On note $p : \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la projection canonique de la relation d'équivalence modulo $2\pi\mathbb{Z}$ et on identifie S^1 au cercle unité par l'application exponentielle complexe,

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in S^1 \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2.$$

Lemme 1.5.1. *Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b], S^1)$, et $u \in p^{-1}(f(a))$. Il existe une unique application $F \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$ telle que*

$$f = p \circ F \quad \textit{et} \quad F(a) = u.$$

Démonstration. Supposons que $f = p \circ F$. En identifiant S^1 au cercle unité par l'exponentielle complexe, cela revient à dire que

$$f(t) = e^{iF(t)}$$

pour tout $t \in I$. Ainsi $F'(t) = -if'(t)/f(t)$ donc F est uniquement déterminée par intégration. □

Notez que deux relevés diffèrent d'une constante multiple de 2π : si F et G sont deux applications telles que $p \circ F = p \circ G$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$F \equiv G + 2k\pi.$$

Remarque 1.5.2. *On peut étendre le lemme à des applications seulement continues mais il faut une preuve différente (lisez par exemple la démonstration de la proposition 2 p376 du livre de DoCarmo).*

Degré des applications

Soit $f : S^1 \to S^1$ et $p : \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'application de passage au quotient. On note $\tilde{f} : \mathbb{R} \to S^1$ l'application $\tilde{f} := f \circ p$. En appliquant le lemme précédent on obtient une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ p = p \circ F$,

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ & \overset{\tilde{f}}{\nearrow} & \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \end{array}$$

On dit que le diagramme commute.

Définition 1.5.3. *On appelle degré de f le nombre*

$$\deg(f) := \frac{F(2\pi) - F(0)}{2\pi}.$$

Notez que la définition ne dépend pas du choix du relevé (pourquoi ?). L'exemple fondamental est celui de la fonction puissance

$$f : z \in S^1 \mapsto z^k \in S^1,$$

où $k \in \mathbb{Z}$ et on a utilisé la notation complexe $z = e^{i\theta}$. Un relevé est

$$F : \theta \in \mathbb{R} \mapsto k\theta \in \mathbb{R}$$

et le degré de f est donc k.

Proposition 1.5.4. *Soit $f, g : S^1 \to S^1$ deux applications. Alors*
- $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ *;*
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\deg(f) = [F(t + 2\pi) - F(t)]/2\pi$ *;*

– $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

Démonstration. Comme $f(2\pi) = f(0)$, il vient $F(2\pi) - F(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui assure que le degré est entier. Les autres points seront traités en exercice. □

Proposition 1.5.5. *Une application $f : S^1 \to S^1$ de degré non nul est nécessairement surjective.*

Le degré d'une application $f : S^1 \to S^1$ contient donc des informations intéressantes sur celle-ci. Nous en verrons d'autres (existence de points périodiques) dans les exercices.

Démonstration. Soit $F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ un relevé de f. On suppose que f est de degré k non nul, $F(2\pi) = F(0) + 2k\pi$. Pour fixer les idées, on suppose que $k > 0$.

Soit $z = e^{i\theta} \in S^1$. Comme l'intervalle $[F(0), F(2\pi)]$ est de longueur supérieure ou égale à 2π, on peut choisir θ dans cet intervalle. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $\theta' \in [0, 2\pi]$ tel que $F(\theta') = \theta$. Cela signifie que $f(e^{i\theta'}) = z$, donc f est surjective. □

Homotopies

Définition 1.5.6. *Soit $c_1, c_2 : S^1 \to S^1$ deux applications régulières. On appelle homotopie de c_1 en c_2 une application régulière*

$$H : [0, 1] \times S^1 \to S^1$$

telle que $H(0, \cdot) \equiv c_1(\cdot)$ et $H(1, \cdot) \equiv c_2(\cdot)$.

On dit alors que c_1 et c_2 sont homotopes.

Il s'agit donc d'une déformation (continue) de c_1 en c_2.

Théorème 1.5.7. *Les applications de S^1 dans S^1 sont classifiées, à homotopie près, par leur degré.*

Autrement dit deux telles applications sont homotopes si et seulement si elles sont le même degré.

Démonstration. Si H est une homotopie entre c_1 et c_2 alors $H(t, \cdot)$ est une application régulière de S^1 dans S^1. Son degré est une fonction continue de t à valeurs dans $\mathbb{Z}$, elle est donc constante. Ainsi $\deg(c_1) = \deg(c_2)$.

Réciproquement soit c_1, c_2 deux applications de même degré $k \in \mathbb{Z}$. On les relève en deux applications $F_1, F_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ telles que

$$F_1(2\pi) - F_1(0) = F_2(2\pi) - F_2(0) = 2k\pi.$$

Considérons, pour tout $t \in [0, 1], s \in [0, 2\pi]$,

$$F(t, s) = tF_1(s) + (1 - t)F_2(s).$$

On vérifie que F est une déformation continue entre F_1 et F_2.

Comme $F(t, 2\pi) = 2k\pi$ pour tout $t \in [0,1]$, l'application passe au quotient et permet de définir $H : [0,1] \times S^1 \to S^1$ qui est une homotopie entre c_1 et c_2. □

1.5.2 Enroulement des courbes planes fermées

Définition 1.5.8. *Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée. Le nombre* enroul(f) *d'enroulement de f est le degré de l'application $\tau : S^1 \to S^1$, qui à $t \in S^1$ associe le vecteur unitaire tangent à la courbe au point $f(t)$.*

Proposition 1.5.9. *Le nombre d'enroulement est indépendant du paramétrage choisi, à condition qu'il préserve l'orientation. Il est invariant par déformation.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de ce que le degré est invariant par homotopie. □

Remarque 1.5.10. *Pour une courbe orientée, le nombre d'enroulement est défini en choisissant une paramétrisation. Pour une courbe non orientée, il est défini au signe près.*

Théorème 1.5.11. *Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée paramétrée à vitesse unité. Alors*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \kappa(s) ds = \text{enroul(f)}.$$

Démonstration. Par définition $\kappa(s)$ est la vitesse (orientée) de variation du vecteur unitaire tangent $\tau(s)$ par rapport à s. L'intégrale de κ est donc la variation totale de τ, i.e. l'intégrale sur S^1 de $\kappa(s)$ est égale à 2π fois le nombre de tours effectués par τ. □

On définit de façon analogue à ce qui a été fait précédemment l'homotopie entre deux courbes fermées orientées.

Théorème 1.5.12. *Les courbes fermées orientées sont classifiées à homotopie près par leur nombre d'enroulement.*

Autrement dit deux courbes fermées orientées sont homotopes ssi elles ont le même nombre d'enroulement.

Démonstration. Deux courbes homotopes ont même nombre d'enroulement par invariance du nombre d'enroulement par déformation.

Réciproquement, soit c_1, c_2 deux courbes fermées orientées ayant le même nombre d'enroulement n. On veut montrer qu'elles sont homotopes. Quitte à effectuer une déformation homothétique, il suffit de montrer le résultat lorsque c_1 et c_2 sont de longueur 2π.

On choisit des paramétrages f_1, f_2 à vitesse unité. Quitte à translater on peut supposer que $f_1(0) = f_2(0) = 0$. On appelle τ_1, τ_2 les vecteurs unitaires tangents associés, ainsi

$$\deg(\tau_1) = \deg(\tau_2) = n.$$

D'après le théorème de classification des applications de S^1 dans S^1, il existe une homotopie $H : [0,1] \times S^1 \to S^1$ de τ_1 sur τ_2. On pose alors, pour $t \in [0,1]$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$F(t,s) = \int_0^s H(t,u)du - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,u)du.$$

Observons que F est une application régulière, 2π-périodique telle que

$$F(0,s) = \int_0^s \tau_1(u)du - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tau_1(u)du = f_1(s)$$

et

$$F(1,s) = \int_0^s \tau_2(u)du - \frac{s}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tau_2(u)du = f_2(s)$$

De plus pour tout $t \in [0,1]$ et $s \in S^1$,

$$\frac{d}{ds}F(t,s) = H(t,s) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,u)du \neq 0$$

car $2\pi^{-1}\int_0^{2\pi} H(t,u)du$ est dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, comme barycentre de points de S^1.

Il s'ensuit que F est bien une homotopie entre f_1 et f_2. □

Remarque 1.5.13. *Il s'avère qu'une courbe fermée simple a pour nombre d'enroulement 1 ou -1. Nous ne le démontrerons pas ici et renvoyons le lecteur au livre de DoCarmo (Theorem 2, p396).*

1.5.3 Inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^2$

Le théorème de Jordan [7] assure que le complémentaire $\mathbb{R}^2 \setminus c$ d'une courbe plane fermée simple régulière c a exactement deux composantes connexes, notées c_{int} et c_{ext}. Ce sont deux domaines de frontières communes

$$\partial c_{int} = \partial c_{ext} = c$$

et c_{int} désigne la composante compacte. Nous renvoyons le lecteur au livre de Berger-Gostiaux pour une démonstration de ce résultat classique et important.

Nous appelons dans la suite aire de (la région délimitée par la courbe) c l'aire de la composante compacte c_{int}.

7. Marie Ennemond Camille Jordan, mathématicien français (1838-1922).

Théorème 1.5.14. *Soit c une courbe plane fermée simple régulière. Alors*

$$\text{Aire(c)} \leq \frac{1}{4\pi}\ell(\text{c})^2,$$

avec égalité ssi c est un cercle.

Remarque 1.5.15. *Il s'agit d'un (type de) problème historique dont l'énoncé est connu depuis l'Antiquité : la reine Didon, fondatrice de Carthage en 814 avant J.C., obtient une terre pour s'installer* "autant qu'il en pourrait tenir dans une peau de boeuf". *Didon fait découper cette peau en fines lamelles et les met bout à bout de façon à délimiter le plus grand territoire possible (bordé par la mer) : sauriez vous l'aider à résoudre ce problème isopérimétrique dans le demi-plan ?*

Démonstration. La démonstration de l'inégalité isopérimétrique est une jolie conséquence de l'inégalité de Wirtinger [8] (Lemme 1.5.16 ci-dessous).

On se ramène par homothétie à une courbe de longueur 2π, avec paramétrisation à vitesse unité $h : S^1 \to \mathbb{R}^2$. On se ramène par translation au cas où $(0,0)$ est le centre de gravité de c. Autrement dit si $h = (f, g)$, on impose

$$\int_{S^1} f = \int_{S^1} g = 0.$$

Il vient alors

$$\int_{S^1} f'^2 + g'^2 = 2\pi = \ell(c),$$

tandis que

$$\text{Aire}(c) = \int_{S^1} fg' = -\int_{S^1} f'g.$$

On en déduit

$$2(\pi - \text{Aire}(c)) = \int_{S^1} (f'^2 + g'^2 - 2fg') = \int_{S^1} (f'^2 - f^2) + \int_{S^1} (f - g')^2.$$

Le lemme de Wirtinger assure que la première intégrale est positive donc

$$2\pi - 2\text{Aire}(c) \geq 0.$$

Le cas d'égalité correspond à un cercle paramétré à vitesse unité. □

Lemme 1.5.16. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière 2π-périodique de moyenne nulle. Alors*

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)dt$$

avec égalité ssi $f(t) \equiv acos(t) + bsin(t)$.

8. Wilhelm Wirtinger, mathématicien autrichien (1865-1945).

Démonstration. La fonction f (resp. f') est L^2 donc coincide au sens L^2 avec sa série de Fourier. En intégrant par parties, on observe que les coefficients de Fourier de f' vérifient

$$c_k(f') = ikc_k(f)$$

donc $|c_k(f)|^2 \leq |c_k(f')|^2$ si $k \neq 0$.

Or le coefficient $c_0(f)$ est supposé nul, d'où le résultat. □

Remarque 1.5.17. *La première preuve rigoureuse de l'inégalité isopérimétrique date seulement de la fin du 19ème siècle (par Weierstrass*[9]*). La preuve indiquée ci-dessus ne traite que le cas des courbes de classe $\mathcal{C}^1$. Une approche alternative, plus géométrique, consiste à se ramener au cas d'un convexe compact du plan, puis à l'approximer par des polygones.*

Les théorèmes isopérimétriques sont actuellement l'objet de recherches intenses (le problème est délicat en dimension supérieure et dans certains espaces exotiques), en particulier en analyse fonctionnelle et en théorie des probabilités (nous avons d'éminents spécialistes à l'IMT).

1.5.4 Courbes gauches fermées

Nous indiquons ici brièvement, sans démonstration, quelques propriétés globales des courbes gauches.

Le théorème de Fenchel [10]

Théorème 1.5.18. *Soit $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^3$ une courbe fermée. Alors*

$$\int_{S^1} \kappa \geq 2\pi.$$

Il y a égalité si et seulement si φ est une courbe plane convexe.

La démonstration fait appel à la théorie des surfaces qui fait l'objet du prochain chapitre. Le lecteur intéressé peut consulter les détails de ce résultat célèbre dans le livre de DoCarmo (Theorem 3, p399).

Courbes nouées

On peut améliorer sensiblement l'énoncé du résultat précédent.

Définition 1.5.19. *On dit qu'une courbe fermée $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ est non nouée s'il existe un plongement $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ du disque unité Δ de $\mathbb{R}^2$ tel que*

$$\varphi(\partial\Delta) = \Gamma.$$

Une courbe est dite nouée dans le cas contraire.

9. Karl Weierstrass, mathématicien allemand (1815-1897), le "père de l'analyse moderne".

10. Moritz Werner Fenchel, mathématicien danois d'origine allemande (1905-1988), un des pionniers de l'analyse convexe.

On peut vérifier que le caractère noué est invariant par homotopie.

Théorème 1.5.20. *Soit $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^3$ une courbe fermée nouée. Alors*

$$\int_{S^1} \kappa \geq 4\pi.$$

Il s'agit là d'un résultat célèbre de Fary [11] et Milnor [12], le lecteur en trouvera une démonstration dans le livre de DoCarmo (Theorem 4, p402).

1.6 Exercices

Exercice 1. *Soit $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$. Montrer que*

$$\langle u \wedge v, x \wedge y \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle u, x \rangle & \langle v, x \rangle \\ \langle u, y \rangle & \langle v, y \rangle \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. *Soit $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$. Montrer que*

1. *$u \wedge v = -v \wedge u$;*
2. *$u \wedge v$ dépend linéairement de u et v ;*
3. *$u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont linéairement dépendants ;*
4. *$u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.*

Exercice 3. *Montrer que pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^3$,*

$$(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u.$$

En déduire l'identité de Jacobi,

$$u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0.$$

Exercice 4. *Soit $t \mapsto u(t), v(t) \in \mathbb{R}^3$ deux familles lisses de vecteurs. Montrer que*

$$\frac{d}{dt}\left[u(t) \wedge v(t)\right] = \frac{du}{dt} \wedge v(t) + u(t) \wedge \frac{dv}{dt}.$$

11. Istvan Fary, mathématicien hongrois (1922-1984).
12. John Willard Milnor, mathématicien américain (1931-), médaille Fields en 1962, prix Abel en 2011.

Exercice 5. *On note $O(n,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales et $SO(n,\mathbb{R})$ celles qui préservent l'orientation (i.e. de déterminant 1). Montrer que*

1) $O(n,\mathbb{R})$ est un groupe compact ;

2) $SO(n,\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère S^{n-1} $(n \geq 2)$;

3) $SO(n,\mathbb{R})$ est un groupe connexe ;

4) $SO(2,\mathbb{R})$ est commutatif, mais pas $SO(n,\mathbb{R})$, $n \geq 3$.

Exercice 6. *Montrer que les réflexions (symétries orthogonales par rapport à un hyperplan) engendrent le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 7. *Soit X, Y deux champs de vecteurs. Montrer que les coordonnées du crochet de Lie de X et Y sont données par*

$$[X,Y]_i = \sum_k \left(X_k \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} - Y_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right)$$

Exercice 8. *Soit X, Y, Z trois champs de vecteurs. Montrer l'identité de Jacobi (Proposition 1.1.9),*

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[X,Z]] + [Z,[Y,X]] = 0.$$

Exercice 9. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application lisse, avec $\varphi(0) = (0,0)$, dont l'image Γ est incluse dans la cubique cuspidale*

$$\mathcal{C} := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 = x^3 \right\}.$$

Montrer qu'on a nécessairement $\varphi'(0) = (0,0)$.

Exercice 10. *Soit $a, b > 0$. Déterminer le lieu géométrique défini par la paramétrisation*

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 11. *Une conique est le lieu $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, P(x,y) = 0\}$ avec P polynôme de degré deux. Soit Γ une conique du plan $\mathbb{R}^2$ et $A \in \Gamma$. La droite $D(t)$ de pente t passant par A rencontre en général la conique Γ en un deuxième point noté M_t, de coordonnées $(x(t), y(t))$.*

1) Montrer que l'application $t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ paramètre $\Gamma \setminus \{A\}$ par des fractions rationnelles.

2) Donner un paramétrage du cercle $x^2 + y^2 = 1$ (privé d'un point) par des fractions rationnelles.

Exercice 12. *Soit* $\varphi : t \in]0, +\infty[\mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$. *Montrer que la longueur d'arc comptée à partir du point* $(0, 0)$ *est*

$$\ell(t) = \frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{3/2} - \frac{8}{27}.$$

C'est donc une fonction algébrique de t *!*

Exercice 13. *Savez vous calculer le périmètre d'une ellipse ? Et son aire ?*

Exercice 14. *Soit* Γ_f *le graphe d'une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *paramétré par* $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$.

1) Calculer la courbure de Γ_f.

2) Dans quelles conditions la dérivée seconde de f *donne-t'elle une bonne approximation de la courbure de* Γ_f *?*

3) Donner une paramétrisation par longueur d'arc lorsque $f(x) = Ch(x)$.

Exercice 15. *Etudier, tracer et calculer la courbure de la trochoïde*

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (at - b \sin t, a - b \cos t) \in \mathbb{R}^2,$$

où a, b *sont des paramètres réels.*

Exercice 16. *Montrer que les fonctions définies dans l'Exemple 1.3.11 sont infiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et que leurs dérivées en* 0 *à tout ordre sont nulles.*

Exercice 17. *Etudier, tracer et calculer la courbure de la spirale logarithmique*

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (ae^{bt} \sin t, ae^{bt} \cos t) \in \mathbb{R}^2,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. *Montrer que si* $ab \neq 0$, *la spirale est localement convexe mais ne borde pas d'ensemble convexe.*

Exercice 18. *Montrer que la composée de deux rotations (affines) du plan est soit une translation, soit une rotation (affine).*

Exercice 19. *La développée d'une courbe plane Γ de paramétrisation $\varphi(t)$ est le lieu de ses centres de courbure (i.e. le lieu des centres des cercles osculateurs). Elle admet la paramétrisation*

$$\psi(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t),$$

où $N(t)$ est le vecteur normal unitaire à Γ en $\varphi(t)$.

1) Montrer que la tangente en $\psi(t)$ à la développée est portée par la normale en $\varphi(t)$ à Γ.

2) Montrer que la développée de la parabole d'équation $y = ax^2$ est la courbe d'équation $27x^2 = 16a(y - 1/2a)^3$.

Exercice 20. *On considère la cardioïde définie en coordonnées polaires par*

$$r(\theta) = 2a(1 + \cos\theta), \text{ où } a > 0.$$

1) Tracer son graphe et calculer sa courbure.

2) Calculer l'aire de l'intérieur de la cardioïde.

Exercice 21. *Donner une paramétrisation de la cubique nodale*

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 = x^3 + x^2\}.$$

Tracer son graphe et calculer sa courbure.

Exercice 22. *Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée telle que $||\varphi(t) - \varphi(s)||$ est une fonction de $|t - s|$. Montrer que la courbe géométrique associée est une portion de droite ou de cercle.*

Exercice 23. *Soit $t \mapsto D(t)$ une famille de droites du plan. On appelle enveloppe de cette famille une courbe Γ paramétrée $t \mapsto \varphi(t)$ telle que pour tout t, Γ est tangente à $D(t)$ en $\varphi(t)$.*

1) On suppose que pour tout t, $D(t)$ est la droite passant par le point $M(t)$ de vecteur unitaire directeur $u(t)$. Montrer que si u' ne s'annule pas, alors la famille $D(t)$ admet une enveloppe. Montrer que l'enveloppe est réduite à un point si et seulement si les droites $D(t)$ sont concourantes.

2) Que signifie le fait que $u' \equiv 0$?

3) Calculer l'enveloppe de la famille de droites $D(t)$ d'équations

$$3tX - 2Y - t^3 = 0.$$

Exercice 24. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe géométrique paramétrée par son abscisse curviligne $s \mapsto \psi(s)$. Montrer que si ψ n'a pas de point d'inflexion, la famille de ses normales possède une enveloppe. Montrer qu'il s'agit de la développée de Γ (cf Exercice 19).*

Exercice 25. *Soit Γ une courbe paramétrée par son abscisse curviligne $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$. Montrer que le plan osculateur à Γ en $\varphi(s)$ est la limite lorsque $h, k \to 0$ du plan passant par les points $\varphi(s), \varphi(s+h), \varphi(s+k)$.*

Exercice 26.

1) Montrer que la paramétrisation par longueur d'arc de l'hélice circulaire

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt) \in \mathbb{R}^3$$

est donnée par

$$\psi(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

2) Calculer sa courbure et sa torsion.

3) Calculer la tangente à l'hélice au point $\varphi(t)$ et montrer qu'elle fait un angle constant avec l'axe (Oz).

Exercice 27.

1) Montrer que la longueur d'un arc, la courbure et la torsion d'une courbe gauche sont tous invariants par les isométries positives.

2) Étudier la façon dont une homothétie transforme ces mêmes quantités.

Exercice 28. *Calculer "l'appareil de Frenet", c'est à dire les vecteurs T, N, B, la courbure κ et la torsion τ de la courbe paramétrée*

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (\sqrt{1+t^2}, t, \ln(t+\sqrt{1+t^2})) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 29. *Même question pour la courbe*

$$t \in]-1,1[\mapsto \varphi(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}t,\right) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 30.

1) Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe gauche dont toutes les tangentes passent par un même point. Montrer que Γ est une (portion de) droite.

2) Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe gauche telle que toutes les normales passent par un même point. Montrer que Γ est une (portion de) cercle.

Exercice 31. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $s_0 \in I$ tel que $\|\varphi(s)\| \leq \|\varphi(s_0)\|$ pour tout s dans un voisinage de s_0. Montrer que*

$$\kappa(s_0) \geq \frac{1}{\|\varphi(s_0)\|}.$$

On pourra étudier la fonction $f(s) = \|\varphi(s)\|^2$,

Exercice 32. *Soit $t \in [a,b] \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle lisse telle que $\|X(t)\| = 1$ pour tout t. On suppose que les vecteurs $\{X(t), X'(t), X''(t)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ pour tout t et on considère*

$$\varphi : t \in [a,b] \mapsto \varphi(t) = c \int_a^t X(s) \wedge X'(s) ds \in \mathbb{R}^3,$$

où $c \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la courbe géométrique Γ_φ a une torsion constante $= 1/c$ (on pourra mq le vecteur binormal $B(t)$ à Γ est proportionnel à $X(t)$).

Exercice 33. *Cet exercice propose d'étudier un raccordement lisse et non plan de deux courbes planes de sorte que la torsion est identique à zéro sans que la courbe soit plane au voisinage de l'origine, point en lequel la courbure s'annule (ce n'est donc pas en contradiction avec la Proposition 1.4.9).*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & si \quad t > 0, \\ (0,0,0) & si \quad t = 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & si \quad t < 0 \end{cases}$$

1) Montrer que φ est lisse. et que $\Gamma = \varphi(\mathbb{R})$ est régulière.
2) Montrer que $\kappa(t) \neq 0$ si $t \notin \{0, \pm\sqrt{2/3}\}$ et vérifier que $\kappa(0) = 0$.
3) Montrer que le vecteur normal est discontinu en $t = 0$.
4) Montrer que $\tau \equiv 0$ bien que Γ ne soit pas une courbe plane.

Exercice 34. *Soit Γ une courbe régulière paramétrée par $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$. Soit π la projection orthogonale sur le plan osculateur à Γ en $\varphi(t)$. Montrer que la courbure en t de la courbe plane $\pi \circ \varphi(\mathbb{R})$ est égale à $\kappa(t)$.*

Exercice 35. *Soit $t \in I \mapsto M(t), A(t) \in M(3, \mathbb{R})$ deux familles de matrices carrées réelles de taille 3 qui dépendent de façon lisse d'un paramètre t. On suppose que pour tout t, les matrices $A(t)$ sont antisymétriques (i.e. ${}^tA(t) = -A(t)$) et que $M(a) = 0$ pour un $a \in I$. On suppose enfin que*

$$M'(t) = A(t) \cdot M(t), \text{ pour tout } t \in I.$$

En étudiant $t \in I \mapsto Tr(M(t) \cdot {}^tM(t)) \in \mathbb{R}^+$, montrer que $M(t) = 0$ pour tout $t \in I$. En déduire une preuve alternative du Théorème 1.4.14.

Exercice 36. *Soit $f : S^1 \to S^1$ une application et F un relevé de f. Mq*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \deg(f) = \frac{[F(t+2\pi) - F(t)]}{2\pi}.$$

Exercice 37. *Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et*

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) = f(t) + t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que g induit une application $G : S^1 \to S^1$ dont on calculera le degré.

Exercice 38. *Soit $f : S^1 \to S^1$ une application continue.*

1) Montrer que le nombre $P(f)$ de points fixes de f vérifie

$$P(f) \geq |\deg f - 1|.$$

2) Soit $g : S^1 \to S^1$ une autre application continue. Montrer que

$$\deg(f \circ g) = \deg f \circ \deg g.$$

En déduire que f a beaucoup de points périodiques si $|\deg f| \geq 2$.

Exercice 39. *Existe-t'il une courbe plane de longueur $6m$ qui borde une région d'aire $3m^2$?*

Exercice 40. *Soit Γ une courbe plane fermée contenue dans un disque de rayon R. Montrer qu'il existe un point $p \in \Gamma$ tel que la courbure de Γ en p est supérieure à $1/R$.*

Exercice 41. *Soit Γ une courbe plane fermée simple. On suppose que sa courbure vérifie*

$$0 \leq \kappa \leq C$$

pour une constante $C > 0$. Montrer que

$$\ell(\Gamma) \geq \frac{2\pi}{C}.$$

Exercice 42. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe plane. On appelle sommet de Γ un extremum local de la courbure de Γ.*

i) Montrer que tout point d'un cercle est un sommet. Montrer qu'une ellipse a quatre sommets.

ii) Montrer que si Γ est une courbe fermée simple alors elle a au moins quatre sommets. [13]

13. Il s'agit du théorème des quatre sommets, prouvé pour la première fois en 1909. Pour un historique et une preuve de la réciproque, nous renvoyons le lecteur au livre de DoCarmo, pp 37-41, ainsi qu'à l'article "The converse to the four vertex theorem" de B.Dahlberg, Proceedings of the A.M.S., Vol.133, no7 (2005), 2131-2135.

Exercice 43. *On considère le tore $\mathcal{T}$ de révolution donné par la paramétrisation*

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ((r\cos u + a)\cos v, (r\cos u + a)\sin v, r\sin u) \in \mathbb{R}^3.$$

On considère la courbe gauche tracée sur $\mathcal{T}$,

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(at, bt) \in \mathcal{T}.$$

1) Montrer que $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ est fermée si b/a est rationnel.

2) Montrer que Γ est dense dans $\mathcal{T}$ si b/a est irrationnel.

Exercice 44. *Soit $\varphi : s \in I \to \varphi(s) \in \mathbb{R}^3$ une courbe gauche Γ. On note $\kappa(s)$ et $\tau(s)$ la courbure et la torsion dont on suppose qu'elles ne s'annulent pas. On note $R = 1/\kappa$ et $\delta = 1/\tau$.*

i) Montrer que si Γ est tracée sur une sphère alors

$$R^2 + (R')^2\delta^2 \equiv \text{ constante.}$$

On pourra supposer que la sphère est centrée à l'origine et dériver trois fois l'identité $||\varphi(s)||^2 \equiv$ constante.

ii) On suppose réciproquement que $R^2 + (R')^2\delta^2 \equiv$ constante. Montrer que $\varphi(s) + R(s)N(s) - R'(s)\delta(s)B(s)$ est constant et en déduire que Γ est tracée sur une sphère.

Chapitre 2

Surfaces de $\mathbb{R}^3$

Introduction

Dans ce deuxième chapitre, nous étudions les propriétés métriques des surfaces de $\mathbb{R}^3$. On peut définir celles ci à l'aide d'une paramétrisation ou par une équation implicite, comme dans le cas des courbes. Le cas modèle est celui des surfaces définies comme le graphe d'une fonction de deux variables réelles.

Lorsque la surface est régulière, toutes ces définitions sont équivalentes comme le montrent les théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale. Il est cependant important de permettre l'existence de points singuliers, ils existent naturellement dans de nombreuses constructions géométriques.

Nous passons en revue les différentes façons de définir une surface dans la section 2.1, étudions la notion de plan tangent dans la section 2.2 et la première forme fondamentale dans la section 2.3. Cette dernière n'est rien d'autre que la restriction de la structure euclidienne de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$.

Nous définissons ensuite l'application de Gauss qui joue un rôle fondamental. Nous calculons sa différentielle, obtenant ainsi une nouvelle forme quadratique sur l'espace tangent, c'est la *deuxième forme fondamentale*.

On en déduit les différentes notions de courbure (courbures principales, courbure de Gauss, courbure moyenne) ainsi qu'un certain nombre de notions classiques (points planaires, ombilics, paraboliques, elliptiques, hyperboliques). La notion la plus importante est la courbure de Gauss, la plus délicate à manipuler est la courbure moyenne.

Nous démontrons dans la section 2.5 le célèbre "Theorema egregium" de Gauss. Il assure que la courbure de Gauss est entièrement déterminée par la première forme fondamentale, ce qui est loin d'être évident au vu de sa définition ! En particulier, deux surfaces localement isométriques ont même courbure de Gauss (alors qu'elles n'ont pas nécessairement la même deuxième forme fondamentale). Ce résultat n'a pas d'analogue dans le cas

des courbes : toutes les courbes sont localement isométriques bien qu'elles n'aient pas nécessairement la même courbure.

Nous étudions dans la section 2.6 la structure d'espace métrique des surfaces. Nous introduisons la notion de dérivée covariante, de transport parallèle, et de géodésique. Nous montrons que les géodésiques minimisent localement la distance intrinsèque d_S et que l'application exponentielle est un difféomorphisme local. Nous citons les théorèmes de Hopf-Rinow et de Bonnet qui caractérisent respectivement les propriétés de complétude et de compacité (en courbure positive) de l'espace métrique (S, d_S).

Nous introduisons ensuite la caractéristique d'Euler et énonçons le théorème de Gauss-Bonnet qui relie un invariant topologique (la caractéristique d'Euler) à la valeur moyenne d'un invariant différentiel (la courbure de Gauss). C'est un résultat splendide que nous ne faisons qu'effleurer.

Je vous encourage à étudier en détail les grandes familles d'exemples qui vous sont proposées. Nous rencontrerons à plusieurs reprises les quadriques, les surfaces de révolution et les surfaces réglées, passez du temps à les dessiner et à vous familiariser avec elles. Les exercices sont regroupés dans la dernière section 2.8.

2.1 Définitions, Exemples

2.1.1 Nappes paramétrées

Définition 2.1.1. *On appelle nappe paramétrée une application lisse injective*

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^3$$

définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Elle est dite régulière si la différentielle de f en chaque point de U est de rang 2.

Deux nappes paramétrées $(\varphi, U), (\psi, V)$ sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme (lisse) $f : V \to U$ tel que $\psi = \varphi \circ f$. Le lecteur vérifiera qu'il s'agit bien d'une relation déquivalence. Comme

$$D\psi_p = D\varphi_{f(p)} \circ Df_p$$

avec Df_p inversible, les différentielles $D\psi$ et $D\varphi$ ont même rang.

Définition 2.1.2. *On appelle nappe géométrique (régulière) une classe d'équivalence de nappes paramétrées (régulières).*

Une surface est une partie de $\mathbb{R}^3$ qui est, au voisinage de chacun de ses point, une nappe géométrique.

On fera souvent l'abus de langage de confondre une nappe et son support, c'est à dire l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ images d'une paramétrisation.

Exemple 2.1.3. *Considérons le cône de révolution paramétré par*

$$\varphi : (\theta, z) \in [0, 2\pi[\times\mathbb{R} \mapsto (z\cos\theta, z\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3.$$

La matrice de la différentielle de φ

$$D\varphi(\theta, z) = \begin{pmatrix} -z\sin\theta & \cos\theta \\ z\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 *si et seulement si* $z \neq 0$*, c'est à dire que le cône est une surface régulière en tout point, sauf en son sommet.*

Remarquons qu'une nappe (φ, U) est régulière en un point $p = (s_0, t_0) \in U$ si et seulement si les vecteurs

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s_0, t_0)$$

sont linéairement indépendants.

Il est important de noter qu'on ne peut pas en général décrire une surface (régulière ou non) à l'aide d'un seul paramétrage. C'est déjà le cas de la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

Exemple 2.1.4. *La sphère unité* S^2 *est l'ensemble*

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Nous voulons justifier que c'est une surface régulière. Par définition, il s'agit de montrer que c'est une nappe géométrique régulière au voisinage de chacun de ses points.

Soit $p = (a, b, c)$ *un tel point. Quitte à interchanger le rôle de* a, b, c*, on peut supposer que* $c \neq 0$*. Posons* $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 < 1\}$*. Si* $c > 0$*, on considère*

$$\varphi : (x, y) \in U \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3.$$

C'est une application lisse et on vérifie sans peine que la différentielle est de rang deux en tout point de U*. Enfin* $p = \varphi(a, b) \in \varphi(U)$*.*

Si $c < 0$*, on considère à la place l'application*

$$\psi : (x, y) \in U \mapsto (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3.$$

pour conclure de façon similaire.

En procédant ainsi, il nous faut donc six applications pour paramétrer la sphère unité ! On vous invite à considérer les coordonnées sphériques dans l'Exercice 45 et à vérifier que deux applications suffisent (pourquoi pas une seule ? !).

2.1.2 Graphes de fonctions

De la même façon que les graphes de fonctions d'une variable réelle sont les modèles locaux des courbes planes lisses, les graphes de fonctions de deux variables réelles sont les modèles locaux des surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$.

Soit $h : U \to \mathbb{R}$ une fonction lisse définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Le graphe de h est le lieu géométrique

$$S_h := \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R} \,/\, z = h(x, y)\}.$$

C'est donc une nappe géométrique paramétrée par

$$\varphi : (x, y) \in U \mapsto (x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3.$$

Elle est toujours régulière puisque la matrice de la différentielle de φ est

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h'_x & h'_y \end{pmatrix},$$

où l'on a noté $h'_x = \partial h/\partial x$, $h'_y = \partial h/\partial y$.

Observons que le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\partial\varphi/\partial x$ et $\partial\varphi/\partial y$ (on verra plus tard qu'il s'agit de l'espace tangent à S_h) ne contient jamais l'axe des z.

Nous montrons à présent, à l'aide du théorème d'inversion locale, qu'une surface régulière peut s'exprimer au voisinage de chacun de ses points comme le graphe d'une fonction lisse, dans un système adéquat de coordonnées.

Proposition 2.1.5. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière. Alors pour tout point p de S, il existe un système de coordonnées cartésiennes centré en p tel que S s'exprime, au voisinage de p, comme le graphe d'une fonction lisse.*

Démonstration. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de S,

$$\varphi(u, v) = (\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)),$$

où α, β, γ sont des fonctions lisses. On note $\alpha_u, \alpha_v, \beta_u$,etc les dérivées partielles des fonctions α, β, γ par rapport à u, v. Par hypothèse, la matrice de la différentielle $d\varphi_m$ au point $m = (u_0, v_0)$ tel que $p = \varphi(m)$ est de rang deux. Dans la base canonique, celle-ci est

$$\begin{pmatrix} \alpha_u(u_0, v_0) & \alpha_v(u_0, v_0) \\ \beta_u(u_0, v_0) & \beta_v(u_0, v_0) \\ \gamma_u(u_0, v_0) & \gamma_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Quitte à permuter les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$, on peut supposer que le mineur

$$\begin{vmatrix} \alpha_u(u_0, v_0) & \alpha_v(u_0, v_0) \\ \beta_u(u_0, v_0) & \beta_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, c'est à dire que le sous-espace $d\varphi_m(\mathbb{R}^2)$ engendré par les vecteurs $\varphi_u(m)$ et $\varphi_v(m)$ ne contient pas l'axe $(0z)$. Considérons l'application

$$f : (u, v) \in U \mapsto (\alpha(u, v), \beta(u, v)) \in \mathbb{R}^2.$$

Elle est de rang 2 en $m = (u_0, v_0)$. Le théorème d'inversion locale assure que c'est un difféomorphisme local, c'est à dire qu'il existe un voisinage V de m tel que f réalise un difféomorphisme de V sur son image $W = f(V)$.

Notons $g = (f_{|V})^{-1}$ l'application inverse de ce difféomorphisme local et considérons $\psi := \varphi \circ g$ qui est bien définie dans $W = f(V)$. Alors

$$\psi : (x, y) \in W \mapsto (x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } h(x, y) = \gamma \circ g(x, y)$$

est une paramétrisation de S au voisinage de p qui est du type recherché. □

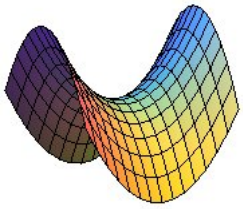
Exemple 2.1.6. *Le paraboloïde hyperbolique (encore appelé "selle de cheval" ou "col") est la surface régulière S définie par la nappe géométrique*

$$\varphi : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, 1 + t, x + tx) \in \mathbb{R}^3.$$

Cette surface est décrite simplement par une équation algébrique,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = xy\},$$

c'est donc le graphe de la fonction $h(x, y) = xy$. En voici une représentation graphique :



Elle admet une autre interprétation : posons $\alpha(x) = (x, 1, x) \in \mathbb{R}^3$ et $\beta(x) = (0, 1, x) \in \mathbb{R}^3$. La surface S est la réunion des droites passant par $\alpha(x)$, de vecteur directeur $\beta(x)$, lorsque x décrit $\mathbb{R}$: en coordonnées cela revient à décomposer

$$\varphi(t, x) = \alpha(x) + t\beta(x).$$

Les surfaces qui s'obtiennent ainsi s'appelent des surfaces réglées.

2.1.3 Équations cartésiennes

De nombreuses surfaces sont définies par des équations algébriques voire comme surface de niveau d'une fonction de trois variables. Dans ce cas il est parfois peu commode d'utiliser des paramétrisations pour vérifier que l'on a bien à faire à une surface régulière (cf Exemple 2.1.4).

Nous donnons à présent un critère simple, conséquence du théorème des foncions implicites qui garantit que de tels ensembles sont bien des surfaces régulières.

Proposition 2.1.7. *Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction lisse définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^3$. Soit $p \in \mathbb{R}^3$ un point tel que f s'annule en p et sa différentielle*

$$D_p f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

et surjective. Alors l'ensemble

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x, y, z) = 0\}$$

est une surface régulière au voisinage de p.

Notons que l'hypothèse est facile à vérifier : la différentielle de f au point p est surjective si et seulement si elle n'est pas nulle puisque l'espace d'arrivée est de dimension 1, il s'agit donc de calculer les dérivées partielles $f_x(p)$, $f_y(p)$, $f_z(p)$ et de vérifier que l'une d'entre elles n'est pas nulle.

Démonstration. Puisque $D_p f$ est surjective, l'une au moins des dérivées partielles de f n'est pas nulle au point p. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites garantit alors que l'équation $f(x, y, z) = 0$ se résout, au voisinage de p : il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et une fonction lisse h définie sur U tels que l'on ait l'équivalence

$$\{(x, y) \in U \text{ et } f(x, y, z) = 0\} \leftrightarrow z = h(x, y).$$

Cela donne ainsi une paramétrisation régulière de S au voisinage de p. □

Nous avons déjà rencontré des exemples de surfaces régulières définies de la sorte (la sphère unité, le paraboloïde hyperbolique). Il est naturel de commencer par s'intéresser aux fonctions f les plus simples, les polynômes. Dans ce cas la surface S est dite algébrique. Lorsque le polynôme f est de degré 1, S est un plan affine de $\mathbb{R}^3$. Lorsque le degré de f est égal à deux, on obtient la famille importante des *quadriques* que nous décrivons dans la section suivante.

Nous résumons les différents points de vue équivalents pour définir une surface géométrique régulière :

Proposition 2.1.8. *Les propriétés suivantes sont localement équivalentes :*

i) S est une surface paramétrée régulière ;

ii) $S \subset \mathbb{R}^3$ est le graphe d'une fonction de deux variable réelles ;

iii) $S := \{(x, y, z) \in V \mid f(x, y, z) = 0\}$ avec $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction lisse dont la différentielle est surjective.

Démonstration. L'implication $i) \Rightarrow ii)$ résulte de la Proposition 2.1.5 tandis que $iii) \Rightarrow i)$ résulte de la Proposition 2.1.7. Il reste à vérifier $ii) \Rightarrow iii)$. Supposons donc que $S = \{(x, y, z)\,;\, z = h(x, y)\}$ est localement le graphe d'une fonction lisse. Alors $S = f^{-1}(0)$ avec $f(x, y, z) = z - h(x, y)$ submersive, pusique $\nabla f = (-h_x, -h_y, 1)$. □

2.1.4 Surfaces spéciales

Nous décrivons ici trois types de surfaces particulièrement importantes que nous rencontrerons tout au long de ce texte.

Quadriques

Ce sont les surfaces $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x, y, z) = 0\}$ définies par le lieu d'annulation d'un polynôme de degré deux. On peut les classifier en réduisant la forme quadratique définie par la partie homogène de degré deux du polynôme f et montrer qu'une telle quadrique est, à conjugaison par une isométrie globale de $\mathbb{R}^3$ près,

– soit vide,
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1,$$

– soit un ellipsoïde,
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

– soit un cône elliptique,
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2},$$

– soit un hyperboloïde à une nappe,
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

– soit un hyperboloïde à deux nappes (non connexe)
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1,$$

– soit un paraboloïde hyperbolique,
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z,$$

– soit un paraboloïde elliptique,
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z,$$

– soit un cylindre elliptique,
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

– soit un cylindre hyperbolique,

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

– soit un cylindre parabolique,

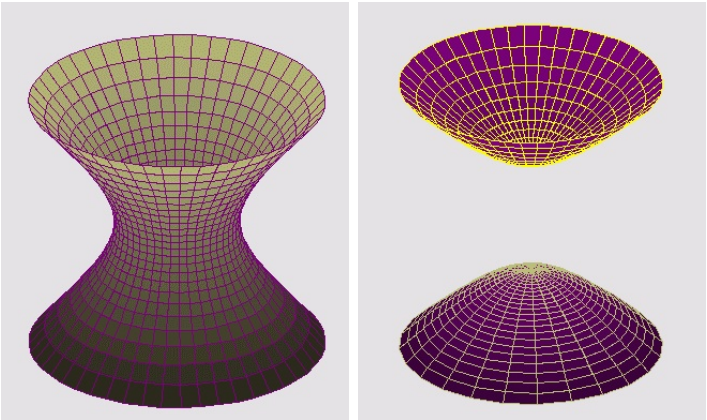
$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} - y,$$

Nous vous laissons démontrer ce résultat dans l'Exercice 49. Observez que l'équation proposée pour le paraboloïde hyperbolique peut encore s'écrire $z = x'y'$ en posant

$$x' = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \text{ et } y' = \frac{x}{a} + \frac{y}{b},$$

ce qui correspond bien aux notations utilisées dans l'Exemple 2.1.6.

Voici une représentation graphique des deux hyperboloïdes,



Surfaces de révolution

On considère une courbe plane $\mathcal{C}$ et on la fait tourner autour d'une droite D du plan qui la contient. La droite D s'appelle *l'axe de révolution.*

Si la courbe $\mathcal{C}$ est une droite, la surface obtenue est un cylindre (droit) si les droites $\mathcal{C}$ et D sont parallèles, un plan si elles sont perpendiculaires et un cône sinon.

Si la courbe $\mathcal{C}$ est un cercle, la surface obtenue est une sphère si la droite D est un diamètre de $\mathcal{C}$, un tore de révolution si D et $\mathcal{C}$ ne se coupent pas.

On peut supposer que le plan de référence est le plan de coordonnées xOz et que la courbe $\mathcal{C}$ est paramétrée par sa longueur d'arc,

$$s \in I \mapsto (f(s), 0, h(s)) \in \mathbb{R}^3,$$

avec $f'(s)^2 + h'(s)^2 \equiv 1$. On peut également supposer que l'axe de révolution est l'axe de coordonnée Oz, la surface de révolution est alors paramétrée par

$$\varphi : (s, \theta) \in I \times]0, 2\pi[\mapsto (f(s)\cos\theta, f(s)\sin\theta, h(s)) \in \mathbb{R}^3.$$

Observons que

$$\varphi_s = (f'(s)\cos\theta, f'(s)\sin\theta, h'(s)), \quad \varphi_\theta = (-f(s)\sin\theta, +f(s)\cos\theta, 0)$$

et

$$\varphi_s \wedge \varphi_\theta = f(z)\left(-h'(s)\cos\theta, -h'(s)\sin\theta, f'(s)\right)$$

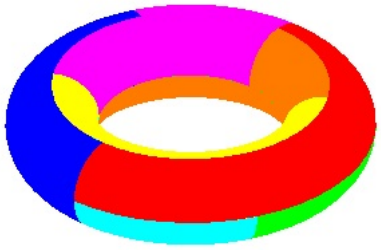
donc la surface S est régulière là où $f(s) \neq 0$. Les points singuliers de cette surface (s'il y en a) se situent donc à l'intersection entre $\mathcal{C}$ et l'axe de révolution.

Définition 2.1.9. *Les courbes correspondant à $\theta =$ constante s'appelent des méridiens, celles correspondant à $s =$ constante s'appelent des parallèles.*

Exemple 2.1.10. *Un tore de révolution est la surface obtenue en faisant tourner un cercle autour d'une droite qui ne le rencontre pas. C'est un pneu dont on ne considère que la surface. Il admet la paramétrisation*

$$\varphi(u, v) = ([R + r\cos u]\cos v, [R + r\cos u]\sin v, r\sin u), \quad \textit{avec } R > r,$$

cette dernière condition assure que le cercle que l'on fait tourner autour de l'axe (Oz) ne rencontre pas ce dernier. En voici une représentation :



Surfaces réglées

Ce sont les surfaces obtenues en faisant passer par tout point d'une courbe $\mathcal{C}$, une droite qui dépend de façon lisse du paramètre. Si la courbe $\mathcal{C}$ est paramétrée par $t \in I \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, la droite passant par $\varphi(t)$ peut être définie par son vecteur directeur $\beta(t) \in \mathbb{R}^3$. La surface admet ainsi la paramétrisation

$$(t, s) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) + s\beta(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Lorsque le vecteur directeur $\beta(t) \equiv \beta_0$ est constant, on obtient un cylindre. Lorsque les droites $\mathbb{R}\beta(t)$ sont toutes concourantes, on obtient un

cône. Le paraboloïde hyperbolique est un autre exemple de surface réglée que nous avons rencontré dans l'Exemple 2.1.6.

Un exemple particulièrement important est la surface obtenue en considérant l'ensemble des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$. Supposons que $\mathcal{C}$ est paramétrée par sa longueur d'arc. On obtient alors

$$\alpha'(t) = T(t) \text{ et } \alpha''(t) = \kappa(t)N(t),$$

où $\kappa(t)$ est la courbure de $\mathcal{C}$ et $\{T(t), N(t), B(t)\}$ désigne le trièdre de Frenet (cf chapitre 1), avec $B(t) := T(t) \wedge N(t)$.

La surface réglée des tangentes à $\mathcal{C}$ s'obtient alors en prenant $\beta(t) = \alpha'(t)$. Il vient ainsi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) = \beta(t) = \alpha'(t) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) = \alpha'(t) + s\alpha''(t).$$

Le produit vectoriel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) = s\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = s\kappa(t)B(t)$$

est donc non nul si $\kappa(t) \neq 0$ et $s \neq 0$.

Ainsi la courbe $\mathcal{C} = \{(t,s) \in I \times \mathbb{R} \,/\, s = 0\}$ est (probablement) un lieu de points singuliers pour cette surface réglée. Les autres points de la surface sont réguliers, sauf (peut-être) ceux qui se situent sur une tangente à un point en lequel la courbe est de courbure nulle. Notons que si la courbe $\mathcal{C}$ est une droite, on obtient une situation dégénérée puisque l'ensemble des tangentes coincïde alors avec la droite $\mathcal{C}$.

2.2 Plan tangent

2.2.1 Définition

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ une paramétrisation (d'une partie) de S. On peut définir le plan tangent à S en un point $p = \varphi(m)$ de plusieurs façons équivalentes.

Définition 2.2.1. *On appelle plan tangent à S en $p = \varphi(m)$ le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux défini par*

$$T_p(S) := D\varphi_m(\mathbb{R}^2).$$

Notons que la définition est indépendante du choix de la paramétrisation. En effet nous avons déjà observé qu'un changement de paramétrisation revient à précomposer l'application linéaire $D\varphi_m$ par un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$, ce qui ne change pas l'image $D\varphi_m(\mathbb{R}^2)$.

Lorsque la paramétrisation n'est pas injective, i.e. si $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$ pour deux points distincts $m_1, m_2 \in U$, il se peut qu'on ait deux plans tangents différents correspondants à m_1 et m_2. Cela arrive souvent en pratique, mais on peut les considérer séparément en réduisant la taille du domaine de chaque paramétrisation.

La situation est beaucoup plus compliquée lorsque la différentielle $D\varphi_m$ n'est pas injective (i.e. lorsque le point $p = \varphi(m)$ est singulier). Dans ce cas il est possible que les plans tangents voisins n'aient aucune limite en p (voir Exercice 52). Nous laissons ce cas de côté dans ce texte.

Remarque 2.2.2. *En principe, le plan tangent devrait être défini comme le plan affine $p + D\varphi_m(\mathbb{R}^2)$ qui passe effectivement par p ! Il est cependant d'usage courant de faire un abus de langage et de ne considérer que sa partie vectorielle (qui passe par l'origine de $\mathbb{R}^3$). Dans la suite de ce cours, le contexte indiquera clairement –nous l'espérons– s'il faut prendre en compte la partie affine ou simplement la partie vectorielle.*

Courbes tracées sur une surface. Soit Γ une courbe paramétrée tracée sur S, c'est à dire la composée d'une courbe plane paramétrée dont l'image est dans $U \subset \mathbb{R}^2$ et de φ. Autrement dit si $\varphi = \varphi(u, v)$, on dispose d'une paramétrisation

$$\gamma : t \in I \mapsto \varphi(u(t), v(t)) \in S$$

Observons qu'un vecteur tangent à la courbe Γ en un point $p = \gamma(t)$ est du type

$$\gamma'(t) = D\varphi_{(u(t),v(t))}(u'(t), v'(t)),$$

c'est donc un vecteur tangent à S en p.

Réciproquement soit

$$X = a\frac{\partial\varphi}{\partial u}(m) + b\frac{\partial\varphi}{\partial v}(m) \in T_p(S)$$

un vecteur tangent à S en un point $p = \varphi(m)$. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ l'intersection I de U avec la droite de vecteur directeur (a, b) et passant par m. Soit Γ son image dans $\mathbb{R}^3$ sous l'action de φ : c'est une courbe paramétrée tracée sur S dont la tangente en $p = \varphi(m)$ est dirigée par X. Nous avons ainsi démontré la

Proposition 2.2.3. *Le plan tangent à S en un point p est exactement constitué des vecteurs tangents en p aux courbes tracées sur S (qui passent par p).*

2.2.2 Application tangente

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $f : S \to \mathbb{R}^n$ une application. On dit que f est lisse si pour toute paramétrisation $\varphi : U \to S$ d'une partie de S, l'application $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ est lisse.

Notons que si cette propriété est satisfaite pour une paramétrisation locale, près d'un point $p \in S$, alors elle l'est pour toute autre paramétrisation au voisinage de ce point. Nous laissons le lecteur vérifier ce fait.

De même que les applications lisses définies sur les ouverts de $\mathbb{R}^2$ admettent une différentielle, l'application lisse $f : S \to \mathbb{R}^n$ admet une différentielle Df_p en tout point $p \in S$. C'est l'application linéaire

$$Df_p : T_p(S) \to \mathbb{R}^n$$

définie comme suit : si $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation de S au voisinage de $p = \varphi(u_0, v_0) = \varphi(m_0)$, alors tout vecteur $X \in T_p(S)$ est l'image par $D\varphi_{m_0}$ d'un unique vecteur $Y \in \mathbb{R}^2$. On pose alors

$$Df_p(X) = D(f \circ \varphi)_{m_0}(Y).$$

Nous laissons le lecteur vérifier que cette définition est cohérente, c'est à dire que $Df_p(X)$ ne dépend pas du choix de la paramétrisation φ.

La différentielle Df_p est l'application linéaire qui approche le mieux l'application f, elle est donc appelée également *application tangente* à f au point p.

Un cas particulièrement simple mais très important est le suivant :

Exemple 2.2.4. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse définie dans $\mathbb{R}^3$. Alors la différentielle de la restriction f de F à S est la restriction de DF à l'espace tangent à S. Autrement dit pour tout $p \in S$,*

$$Df_p = D(F_{|S})_p = (DF_p)_{|T_p(S)}.$$

Fin C5 2015

2.2.3 Intersection de deux surfaces

Considérons deux surfaces régulières $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$. Si elles s'intersectent en un point p de façon transverse (c'est à dire sans être tangentes, i.e. les plans tangents sont distincts), les surfaces S_1 et S_2 se rencontrent le long d'une courbe (au voisinage du point p) :

Proposition 2.2.5. *Soit S_1, S_2 deux surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$ qui s'intersectent en un point p. On suppose que les plans tangents T_pS_1 et T_pS_2 sont distincts. Alors, au voisinage de p, l'intersection $S_1 \cap S_2$ est une courbe dont la tangente en p est l'intersection $T_pS_1 \cap T_pS_2$ des deux plans tangents.*

Démonstration. Choisissons un repère centré en p, dont le troisième vecteur n'appartient ni à T_pS_1, ni à T_pS_2. On peut alors exprimer localement S_1 et S_2 comme des graphes de fonctions lisses au dessus du plan $(x0y)$,

$$z = f_i(x, y) \text{ avec } f_i(0, 0) = 0.$$

L'intersection $S_1 \cap S_2$ est ainsi définie comme l'image, par l'une (ou l'autre) des paramétrisations, de la courbe définie de façon implicite par l'équation

$$f(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y) = 0.$$

Il suffit donc de vérifier que la différentielle de f en $(0,0)$ n'est pas nulle : l'ensemble $\{(x,y) \,/\, f(x,y) = 0\}$ définira ainsi une courbe plane régulière et son image par la paramétrisation sera une courbe gauche régulière traçée sur S_1 et S_2. Or l'annulation de $Df_{(0,0)}$ se traduit par

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) \text{ et } \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0),$$

ce qui signifie que les plans tangents T_pS_1 et T_pS_2 sont les mêmes.

Notons $\mathcal{C}$ la courbe régulière qui est l'intersection (locale) de S_1 et S_2 au voisinage de p. Notons que la tangente D à $\mathcal{C}$ en p est contenue dans $T_p(S_1)$ puisque $\mathcal{C}$ est traçée sur S_1. La droite D est de même contenue dans T_pS_2, c'est donc en fait $T_pS_1 \cap T_pS_2$ puisque ces deux plans se coupent le long d'une droite. □

2.2.4 Position d'une surface par rapport à son plan tangent

Soit S une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. On fixe p un point de S et $\varphi : U \to S$ une paramétrisation régulière telle que $p \in \varphi(U)$. On peut choisir un système de coordonnées centré en $p = (0,0,0)$ tel que S s'exprime comme un graphe au dessus du plan $(x0y)$, φ est alors donnée par

$$\varphi(x,y) = (x, y, h(x,y))$$

où h est une fonction lisse telle que $h(0,0) = 0$. Le plan tangent $T_p(S)$ est alors le plan engendré par les vecteurs

$$\varphi_x(0,0) = (1, 0, h_x(0,0)) \text{ et } \varphi_y(0,0) = (0, 1, h_y(0,0)).$$

Notons qu'on peut effectuer un nouveau changement de coordonnées pour se ramener au cas où le plan tangent est le plan $(x0y)$, c'est à dire qu'on peut supposer $h_x(0,0) = h_y(0,0) = 0$, ce que nous supposons dans la suite de ce paragraphe.

Lemme 2.2.6. *Le plan tangent à S en p est le plan affine de $\mathbb{R}^3$ qui passe par p et approche φ l'ordre* 1.

Démonstration. Dans le système de coordonnées choisi ci-dessus, l'équation d'un plan passant par p est celle d'un plan vectoriel,

$$aX + bY + cZ = 0.$$

Ce plan approche φ à l'ordre 1 en $(0,0)$ si

$$ax + by + ch(x,y) = o((x,y))$$

lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$. Or la différentielle de h est nulle en $(0,0)$ de par notre choix de coordonnées, donc

$$ax + by + ch(x,y) = ax + by + o((x,y)) = o((x,y))$$

ssi $a = b = 0$, i.e. si le plan considéré est le plan $(z = 0) = (x0y)$. □

On pousse le développement limité un peu plus loin et on s'intéresse à présent au contact d'ordre 2, pour déterminer la position de la surface S par rapport à son plan tangent, au voisinage du point p. On pose

$$r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0),\ s = \frac{\partial^2 h}{\partial xy}(0,0) \text{ et } t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0),$$

de sorte qu'un développement limité à l'ordre deux de h en $(0,0)$ est

$$h(x,y) = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + o(x^2 + y^2)$$

Proposition 2.2.7. *La position de S par rapport à son plan tangent $T_p(S) = (xOy)$ est déterminée par la forme quadratique*

$$Q(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

1. *Lorsque Q est définie (positive ou négative), c'est à dire lorsque $s^2 - rt < 0$, la fonction $h(x,y)$ admet un extremum strict à l'origine, la surface S reste du même côté de son plan tangent $T_p(S)$. On dit que le point p est un point elliptique.*
2. *Lorsque Q est non dégénérée mais change de signe, c'est à dire si $s^2 - rt > 0$, il y a des points de la surface arbitrairement proche de p de chaque côté du plan tangent, le point p est dit hyperbolique.*
3. *Lorsque Q est dégénérée mais pas nulle, i.e. si $s^2 - rt = 0$ mais r, s, t ne sont pas tous nuls, le point p est dit parabolique. La surface contient des points arbitrairement proches de p, du même côté de $T_p(S)$ (mais elle peut aussi en contenir de l'autre côté).*
4. *Lorsque Q est nulle, on peut avoir à peu près n'importe quoi, le point p est dit planaire.*

La seconde forme fondamentale II_S que nous étudions un peu plus loin est une forme quadratique qui généralise Q. Notez bien que dans le cas où S est définie par le graphe d'une fonction h (ce qui est toujours possible localement), il s'agit de la Hessienne de h.

2.3 Première forme fondamentale

Le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$ induit naturellement un produit scalaire sur les plans tangents $T_p(S)$ à une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$. Cette "structure riemannienne" va nous permettre de faire des mesures sur la surface et ses espaces tangents.

2.3.1 Définition

Définition 2.3.1. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière. On note*

$$I_p : T_p(S) \to \mathbb{R}$$

la forme quadratique sur l'espace tangent $T_p(S)$ à S au point p, définie par

$$I_p(w) := \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0$$

C'est la première forme fondamentale de la surface S.

Autrement dit la première forme fondamentale reflète de quelle façon la surface S hérite de la structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Cela va nous permettre de mesurer la longueur des arcs tracés sur S, ainsi que les angles entre les vecteurs tangents et l'aire des domaines dans S, sans faire référence à l'espace ambiant.

Expression dans une paramétrisation. Soit $\varphi : (u, v) \in U \mapsto \varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de S. Un vecteur tangent $w \in T_p(S)$ est associé à une courbe $\alpha : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto \alpha(t) = \varphi(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^3$ telle que $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = w$. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} I_p(w) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p &= \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle_p \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

où on a noté φ_u (resp. φ_v) la dérivée de φ par rapport à u (resp. v) calculées en $t = 0$ et

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p, \ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p \ \text{ et } \ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p$$

sont les coefficients de la première forme fondamentale dans la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_p(S)$ déterminée par la paramétrisation φ.

Exemple 2.3.2. *Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan affine passant par le point a et dont la partie vectorielle est engendrée par une base orthonormée $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$. Il admet la paramétrisation*

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(u, v) = a + uw_1 + vw_2 \in \mathbb{R}^3.$$

Observons que $\varphi_u = w_1$ et $\varphi_v = w_2$ sont des fonctions vectorielles constantes, indépendantes de u, v. Comme la base $\{w_1, w_2\}$ est orthonormée, on en déduit que

$$E \equiv 1 \equiv G \text{ et } F \equiv 0$$

dans cette paramétrisation.

Exemple 2.3.3. *Le cylindre droit*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$$

admet la paramétrisation

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \in \mathbb{R}^3.$$

Il vient $\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ et $\varphi_v = (0, 0, 1)$ donc

$$E = G = 1 \text{ et } F = 0.$$

Notez que le plan et le cylindre droit ont même première forme fondamentale (dans ces paramétrisations). On dit qu'ils sont *localement isométriques* (voir Definition 2.3.5).

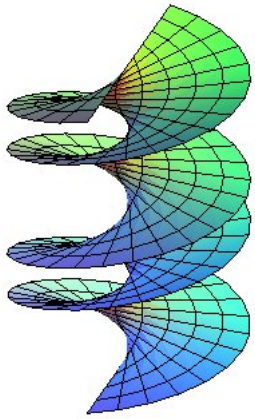
Exemple 2.3.4. *L'hélicoïde est paramétré par*

$$\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (v \cos u, v \sin u, au) \in \mathbb{R}^3,$$

où $a > 0$ est un paramètre fixé. On calcule aisément

$$E = v^2 + a^2, \; F = 0 \text{ et } G = 1.$$

En voici une représentation :



2.3.2 Angles et longueurs

Longueur d'un arc. Soit Γ une courbe tracée sur une surface régulière S. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de S et $\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) = \varphi(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de Γ. La longueur de la courbe Γ est

$$\ell(\Gamma) = \int_I \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}dt.$$

La *distance intrinsèque* sur une surface S est

$$d_S(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) \,|\, \gamma \text{ courbe tracée sur S t.q. } \gamma(0) = p \text{ et } \gamma(1) = q\}.$$

Définition 2.3.5. *Soit $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces. On dit qu'elles sont isométriques s'il existe un difféomorphisme $f : S_1 \to S_2$ qui préserve les distances intrinsèques (on dit que f est une isométrie).*

On dit qu'elles sont localement isométriques si tout point S_1 admet un voisinage isométrique à un sous-ensemble de S_2 et tout point S_2 admet un voisinage isométrique à un sous-ensemble de S_1.

Proposition 2.3.6. *Deux surfaces sont localement isométriques si et seulement si elles ont la même première forme fondamentale.*

Démonstration. Soit $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces. Elles sont localement difféomorphes. Quitte à réduire initialement les tailles de S_1 et S_2, on peut supposer qu'il existe un difféomorphisme global $f : S_1 \to S_2$ (que l'on peut étendre dans un voisinage, pourquoi ?). Soit $\varphi : (s, t) \in U \mapsto \varphi(s, t) \in S_1 \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation locale de S_1, alors $\psi = f \circ \varphi$ est une paramétrisation de S_2.

Si S_1 et S_2 ont la même première forme fondamentale, alors

$$\langle \psi_s, \psi_s \rangle = \langle Df \cdot \varphi_s, Df \cdot \varphi_s \rangle$$

et de même $\langle \psi_s, \psi_t \rangle = \langle Df \cdot \varphi_s, Df \cdot \varphi_t \rangle$, $\langle \psi_t, \psi_t \rangle = \langle Df \cdot \varphi_t, Df \cdot \varphi_t \rangle$. On en déduit que Df réalise une isométrie entre les espaces tangents, donc f préserve la longueur des courbes : c'est une isométrie.

Réciproquement si $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ sont localement isométriques, alors f préserve les variations à l'ordre 1 des longueurs des courbes, donc les premières formes fondamentales. □

Angles. L'angle θ sous lequel deux courbes $\alpha : I \to S$ et $\gamma : I \to S$ s'intersectent en $t = t_0$ est l'angle entre les deux vecteurs tangents $\alpha'(t_0)$ et $\gamma'(t_0)$, il est déterminé par

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)|\,|\gamma'(t_0)|},$$

où $|w|$ désigne la longueur du vecteur tangent $w \in T_p(S)$, $p = \alpha(t_0) = \gamma(t_0)$, c'est à dire $|w| = \sqrt{I_p(w)}$.

Définition 2.3.7. *On dit qu'une paramétrisation $\varphi(u,v)$ est conforme si les angles dans le plan (uv) sont les mêmes que les angles correspondants dans T_pS pour tout point p.*

On laisse le lecteur vérifier que cela est équivalent aux conditions

$$E = G \text{ et } F = 0.$$

Les paramétrisations du plan et du cylindre vues précédemment sont donc conformes, mais pas celle de l'hélicoïde. Vous montrerez en exercice que la paramétrisation de la sphère unité par la projection stéréographique est conforme.

2.3.3 Aire

La première forme fondamentale permet de définir et calculer l'aire des domaines "raisonnables" d'une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$. C'est un problème délicat de préciser convenablement la notion d'être "raisonnable". Pour faire bref, il n'est pas possible de définir l'aire de n'importe quel ensemble, de même que dans $\mathbb{R}^n$, on ne peut pas "mesurer" tous les ensembles à l'aide de la mesure de Lebesgue (aller voir un cours d'intégration et de théorie de la mesure si cette problématique vous intéresse).

On peut néanmoins mesurer les ensembles qui sont obtenus par le biais de constructions géométriques relativement simples. Les *domaines* appartiennent à cette catégorie : ce sont les ouverts connexes de S dont le bord est l'image du cercle unité $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$ par un homéomorphisme (bijection continue ainsi que son inverse) qui est lisse et dont la différentielle ne s'annule qu'en un nombre fini de points. Ouf ! Ces préliminaires un peu pénibles étant posés, passons à la définition.

Définition 2.3.8. *Soit $\Omega \subset S \subset \mathbb{R}^3$ un domaine d'une surface régulière S. Supposons que $\Omega \subset U$ est contenu dans l'image d'une paramétrisation $\varphi : U \to S$. L'aire de Ω est le nombre positif*

$$\text{Aire}(\Omega) = \int\int_{\varphi^{-1}(\Omega)} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv.$$

La quantité $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ mesure l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs tangents φ_u et φ_v. Observons que la définition proposée ne dépend pas du choix de la paramétrisation : cela résulte du fait que dans la formule de changement de variables, le jacobien du difféomorphisme envoyant une paramétrisation sur l'autre intervient dans un sens pour $dudv$, et par son inverse pour l'aire du parallélogramme. Autrement dit, la quantité

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv$$

est invariante par changement de variables.

Rappelons que $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 + \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2$. Il s'ensuit que l'aire peut s'exprimer en termes des notations précédentes,

$$\text{Aire}(\Omega) = \int\int_\Omega \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Notons que la restriction qui impose au domaine d'être inclus dans le domaine de définition d'une paramétrisation n'est pas très significative : de nombreuses surfaces admettent des paramétrisations qui couvrent toute la surface à l'exception d'une (ou quelques) courbe(s) qui ne contribuent pas à l'aire.

Exemple 2.3.9. *Calculons l'aire d'un tore* $\mathbf{T}$ *de révolution. Nous reprenons les notations de l'Exemple 2.1.10 : la paramétrisation*

$$\varphi(u, v) = ([R + r\cos u]\cos v, [R + r\cos u]\sin v, r\sin u), \text{ avec } R > r,$$

couvre le tore à l'exception de deux cercles (un méridien et un parallèle).

On vérifie que les coefficients de la première forme fondamentales sont

$$E = r^2, \quad F = 0 \quad \text{et } G = (r\cos u + R)^2.$$

Il s'ensuit que

$$\text{Aire}(\mathbf{T}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(r\cos u + R)dudv = 4\pi^2 rR.$$

Notez qu'il s'agit du produit de la longueur du "petit cercle" par la longueur du "grand cercle". Vous établirez dans l'Exercice 60 une formule générale pour calculer l'aire d'une surface de révolution.

2.4 Deuxième forme fondamentale, courbures

2.4.1 Application de Gauss et deuxième forme fondamentale

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière et $\varphi : U \to S \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de S près d'un point $p \in S$. Les vecteurs $\varphi_x(p) = \partial\varphi/\partial x(p)$ et $\varphi_y(p) = \partial\varphi/\partial y(p)$ engendrent le plan tangent $T_p(S)$ à S au point p. Le vecteur

$$n(p) := \frac{\varphi_x(p) \wedge \varphi_y(p)}{\|\varphi_x(p) \wedge \varphi_y(p)\|}$$

est donc un vecteur unitaire normal au plan tangent $T_p(S)$.

Définition 2.4.1. *L'application* $n : S \to S^2$ *qui à tout point* p *de* S *associe son vecteur normal unitaire* $n(p)$ *s'appelle l'***application de Gauss**.

Cette application dépend (pour l'instant) de la paramétrisation. Nous verrons au plus loin que l'on peut obtenir une définition invariante de l'application de Gauss pour toute surface *orientable*.

L'application de Gauss [1] contient énormément d'informations sur la géométrie de la surface S. Voici quelques exemples particulièrement simples :

Exemple 2.4.2.
- *lorsque la surface S est un plan, elle coïncide avec son plan tangent en tout point, l'application de Gauss est donc constante ;*
- *lorsque la surface est un cylindre, le plan tangent est constant le long de chaque droite du cylindre, l'application de Gauss envoie donc la surface (cylindre) sur un équateur de la sphère unité ;*
- *lorsque $S = S^2$ est la sphère unité, l'application de Gauss est l'identité.*

Exemple 2.4.3. *Considérons l'hélicoïde paramétré par*

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto (u \cos v, u \sin v, bv) \in \mathbb{R}^3,$$

où $b > 0$ est un paramètre fixé. Il vient

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (b \sin v, -b \cos v, u)$$

donc

$$n(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}}(b \sin v, -b \cos v, u).$$

Rappelons que si $\Phi : S \to \mathbb{R}^3$ est une application vectorielle et $v \in T_pS$ est un vecteur tangent à S en p, on peut calculer la *dérivée directionnelle* $D_v\Phi(p)$ de Φ en p dans la direction v en choisissant une courbe $\alpha :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to S$ tracée sur S telle que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$ et en calculant [2]

$$D_v\Phi(p) := (\Phi \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^3.$$

Pour comprendre l'allure de la surface S au voisinage d'un point $p \in S$, il est tentant de considérer la courbure en p des courbes tracées sur S qui passent par p. Il nous faut pour cela calculer et interpréter les dérivées directionnelles de l'application de Gauss.

Lemme 2.4.4. *Pour tout $v \in T_pS$, la dérivée directionnelle $D_vn(p)$ de l'application de Gauss $n : S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est un vecteur tangent à S en p.*

Démonstration. Soit $\alpha :] - \varepsilon, +\varepsilon[\to S$ une courbe telle que $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = v$. Observons que $n \circ \alpha$ est de norme constante égale à 1, donc

$$0 = \frac{d||n \circ \alpha(t)||^2}{dt}_{|t=0} = 2\langle n \circ \alpha(0), (n \circ \alpha)'(0)\rangle = 2\langle n(p), D_vn(p)\rangle.$$

1. Johann Carl Friedrich Gauss, mathématicien, astronome et physicien allemand (1777-1855), considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

2. La formule ne dépend pas du choix de α, voir Exercice 65

Cela montre que le vecteur $D_v n(p)$ est orthogonal à $n(p)$, il appartient donc à l'espace tangent à S au point p. □

L'application suivante est donc bien définie,

$$\begin{array}{rcl} F_p : T_pS & \to & T_pS \\ v & \mapsto & -D_v n(p). \end{array}$$

Nous laissons le lecteur vérifier qu'il s'agit d'une application *linéaire*. Le fait remarquable est le suivant :

Proposition 2.4.5. *L'application F_p est symétrique : pour tout $u, v \in T_pS$,*

$$\langle F_p(u), v\rangle = \langle u, F_p(v)\rangle.$$

Démonstration. Soit $\varphi : (x, y) \in U \mapsto \varphi(x, y) \in S \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de la surface S.

Comme F_p est linéaire et $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est bilinéaire, il suffit de vérifier la symétrie pour $u = \partial\varphi/\partial x(p)$ et $v = \partial\varphi/\partial y(p)$, qui constituent une base de l'espace tangent à S en p.

Posons donc $u = \partial\varphi/\partial x(p)$, $v = \partial\varphi/\partial y(p)$ et dérivons, par rapport à x, l'égalité $\langle n, v\rangle = 0$ qui signifie que $v \in T_pS$. Il vient

$$0 = \langle D_u n, v\rangle + \langle n, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\rangle.$$

On en déduit, en observant que $\partial^2\varphi/\partial x\partial y = \partial^2\varphi/\partial y\partial x$, que

$$\langle F_p(u), v\rangle = -\langle D_u n(p), v\rangle = \langle n, \partial^2\varphi/\partial x\partial y\rangle = \langle n, \partial^2\varphi/\partial y\partial x\rangle = \langle u, F_p(v)\rangle.$$

□

Nous laissons le lecteur vérifier dans l'Exercice 69 que l'opérateur F_p est nul en tout point $p \in S$ si et seulement si la surface S est plane. Lorsque S est une sphère centrée à l'origine, on vérifie aisément que F_p est une homothétie (Exercice : calculer son rapport).

Définition 2.4.6. *La deuxième forme fondamentale est la forme quadratique définie sur sur T_pS par*

$$II_p(u, v) = \langle F_p(u), v\rangle.$$

Fin C6 2015

Pour une paramétrisation φ donnée, on peut exprimer II_p sous forme matricielle, via

$$II_p = \begin{bmatrix} \langle\varphi_{xx}, n\rangle & \langle\varphi_{xy}, n\rangle \\ \langle\varphi_{xy}, n\rangle & \langle\varphi_{yy}, n\rangle \end{bmatrix},$$

où l'on a noté $\varphi_{xy} = \partial^2\varphi/\partial x\partial y$. La formule provient des calculs effectués dans la démonstration de la proposition précédente. Cela explique au passage pourquoi on a inclus un signe moins dans la définition de F_p.

Exemple 2.4.7. *Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^2$ qui s'annule avec ses deux dérivées partielles en $(0,0)$. Soit*

$$S := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

le graphe de f. C'est une surface dont le plan tangent en $O = (0,0,0)$ est le plan des coordonnées (xOy). La fonction f admet un développement limité a l'ordre 2 en $(0,0)$ de la forme

$$f(x, y) = px^2 + 2qxy + ry^2 + o(x^2 + y^2).$$

La forme quadratique $(px^2 + 2qxy + ry^2)$ sur le plan tangent est précisément la seconde forme fondamentale II_O de S au point O.

Pour une surface paramétrée, la deuxième forme fondamentale se calcule dans une paramétrisation comme suit :

Proposition 2.4.8. *Soit $\varphi : (x, y) \in U \mapsto \varphi(x, y) \in S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée. La seconde forme fondamentale II_p de S au point $p = \varphi(x, y)$ est la forme quadratique sur le plan tangent $T_pS = Vect(\varphi_x, \varphi_y)$ donnée par*

$$II_p(a\varphi_x + b\varphi_y) = a^2P + 2abQ + b^2R,$$

où

$$P = \frac{\det(\varphi_{xx}, \varphi_x, \varphi_y)}{||\varphi_x \wedge \varphi_y||},\ Q = \frac{\det(\varphi_{xy}, \varphi_x, \varphi_y)}{||\varphi_x \wedge \varphi_y||}\ \text{ et } R = \frac{\det(\varphi_{yy}, \varphi_x, \varphi_y)}{||\varphi_x \wedge \varphi_y||}.$$

On a noté ci-dessus $\varphi_x = \partial\varphi/\partial x(p)$. De même, φ_y, $\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$ désignent les dérivées partielles de la paramétrisation φ par rapport à x et/ou y calculées au point $p = \varphi(x, y)$.

Démonstration. Rappelons que que le vecteur normal unitaire est donné par

$$N(p) = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{||\varphi_x \wedge \varphi_y||}.$$

On dérive la relation d'orthogonalité $\langle N, \varphi_x\rangle = 0$ par rapport au vecteur tangent $v = \varphi_x$ pour obtenir

$$P = -\langle D_{\varphi_x}N, \varphi_x\rangle = \langle N, \varphi_{xx}\rangle = \frac{\langle \varphi_x \wedge \varphi_y, \varphi_{xx}\rangle}{||\varphi_x \wedge \varphi_y||} = \frac{\det(\varphi_{xx}, \varphi_x, \varphi_y)}{||\varphi_x \wedge \varphi_y||}.$$

Les autres relations s'obtiennent de façon similaire. □

2.4.2 Orientation

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière. On dit que S est orientable si on peut choisir de façon continue une orientation de ses plans tangents : un choix d'orientation de $T_p(S)$ induit, par continuité, un choix d'orientation des plans tangents voisins. Lorsque l'on recouvre S par une collection de paramétrisations, il faut que ces choix d'orientation soient compatibles.

Fixons $\varphi : (u, v) \in U \mapsto \varphi(u, v) \in S$ une paramétrisation de S au voisinage d'un point p. On fixe ainsi une orientation de $T_p(S)$, en décrétant que la base (φ_u, φ_v) est une base directe de $T_p(S)$. Si p appartient à une seconde paramétrisation $\psi : (x, y) \in V \mapsto \psi(x, y) \in S$, on obtient le même choix d'orientation si et seulement si le jacobien du changement de coordonnées $\varphi^{-1} \circ \psi$ est positif.

Définition 2.4.9. *Un surface est dite orientable s'il est possible de la couvrir par une famille de paramétrisations (coordonnées locales) telles que le jacobien des changements de paramétrisations est toujours positif.*

Le choix d'une telle famille est appelée une orientation de S. Lorsqu'un tel choix n'est pas possible, on dit que S est non-orientable.

Bien entendu, toute surface est localement orientable. L'orientabilité d'une surface est donc un problème global.

Proposition 2.4.10. *Une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est orientable si et seulement si il existe une application continue $N : S \to \mathbb{R}^3$ telle qu'en chaque point p de S, le vecteur $N(p)$ est un vecteur unitaire orthogonal à T_pS.*

Comme va le montrer la démonstration, on peut imposer à N d'être différentiable : c'est une application de Gauss globale.

Démonstration. Supposons S orientable. On la recouvre par des paramétrisations $\varphi : U \to S$ telles que les jacobiens des changements de coordonnées sont positifs. On considère

$$N_U(\varphi(u, v)) := \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{||\varphi_u \wedge \varphi_v||}$$

le vecteur normal unitaire orienté de la paramétrisation (φ, U). Si (ψ, V) est une autre paramétrisation telle que $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$, on obtient pour tout point $p = \psi(x, y) = \varphi(u, v) \in \varphi(U) \cap \psi(V)$,

$$N_V(p) = \frac{\psi_x \wedge \psi_y}{||\psi_x \wedge \psi_y||} = \frac{Jac(\varphi^{-1} \circ \psi)(x, y)}{|Jac(\varphi^{-1} \circ \psi)(x, y)|} \cdot \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{||\varphi_u \wedge \varphi_v||} = N_U(p)$$

puisque le jacobien est supposé positif. Ainsi N définit une application continue

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

qui à tout point $p \in S$ associe un vecteur unitaire normal à S en p.

Réciproquement supposons qu'une telle application N existe. Soit (φ, U) une famille de paramétrisations qui couvrent S. On peut supposer que chaque ouvert U est connexe. On note N_U le vecteur normal unitaire construit précédemment. Observons que

$$p \mapsto f_U(p) := \langle N(p), N_U(p) \rangle \in \{-1, +1\}$$

est une fonction continue sur l'ouvert connexe $\varphi(U)$. Comme $\varphi(U)$ est connexe, on peut (quitte à intervertir les rôles de u et v) supposer que $f_U \equiv 1$, c'est à dire que $N \equiv N_U$ dans $\varphi(U)$. Il s'ensuit que les jacobiens des changements de coordonnées sont tous positifs, donc S est orientable. □

On obtient de nombreux exemples de surfaces orientables en considérant des préimages de valeurs régulières d'une application différentiable :

Proposition 2.4.11. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application différentiable et $a \in \mathbb{R}$ une valeur régulière de f, i.e. $a = f(p)$ avec $D_p f$ surjective. La surface*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$$

est une surface régulière orientable de $\mathbb{R}^3$.

Ce critère s'applique notamment à la sphère unité,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$$

avec $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ et $a = 1$. Notez que 1 est bien une valeur régulière de f.

Démonstration. Le fait que S est une surface régulière résulte de ce que f est une submersion (i.e. $D_p f$ est surjective) au voisinage des points considérés.

Nous laissons le lecteur vérifier que le vecteur (f_x, f_y, f_z) est un vecteur orthogonal à S. Il n'est jamais nul, car f est une submersion, on peut donc considérer

$$N : p \in S \mapsto \frac{(f_x, f_y, f_z)}{||(f_x, f_y, f_z)||} \in S^2.$$

C'est un champ continu (et même différentiable) de vecteurs unitaires normaux à S. Il résulte de la proposition précédente que S est orientable. □

On peut montrer, réciproquement, que toute surface orientable de $\mathbb{R}^3$ est l'image inverse d'une valeur régulière d'une application différentiable. La preuve est cependant délicate, le lecteur en trouvera les détails, dans le cas des surfaces compactes, dans le livre de DoCarmo (pp109-114).

Remarque 2.4.12. *Toute surface compacte $S \subset \mathbb{R}^3$ est orientable. On verra par contre dans le prochain chapitre des exemples de surfaces compactes plongées dans $\mathbb{R}^4$ qui ne sont pas orientables.*

Exemple 2.4.13. *Une surface qui est couverte par une seule paramétrisation est orientable. C'est le cas en particulier de toutes les surfaces qui sont les graphes de fonctions différentiables.*

Exemple 2.4.14. *Si une surface peut être couverte par deux paramétrisations $\varphi : U \to S$ et $\psi : V \to S$ telles que*
- $S \subset \varphi(U) \cap \psi(V)$,
- $\varphi(U) \cap \psi(V)$ *est connexe,*
- *le jacobien du changement de cartes* $\varphi \circ \psi^{-1}$ *est positif,*

alors S est orientable. Cela s'applique en particulier à la sphère.

Exemple 2.4.15 (Le ruban de Möbius[3])**.** *On considère la surface M de $\mathbb{R}^3$ définie par la paramétrisation*

$$\varphi(t, v) = ((1 + t\cos v)\cos(2v), (1 + t\cos v)\sin(2v), t\sin v)\,,$$

où $v \in \mathbb{R}$ et $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$. Il s'agit d'une surface à bord connexe

$$\partial M = \{\varphi(1/2, v)\,|v \in [0, 2\pi]\} = \{\varphi(-1/2, v)\,|v \in [0, 2\pi]\}$$

qui est homéomorphe à un cercle S^1.

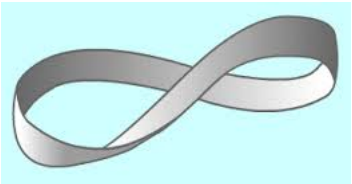
Nous laissons le lecteur vérifier dans l'Exercice 150 que M est une réalisation de la surface abstraite obtenue comme le quotient

$$M \simeq \mathbb{R} \times [-1, +1]/\sim$$

où

$$(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \ x' = x + k\ \ \&\ \ y' = (-1)^k y.$$

Autrement dit M est obtenue à partir d'une bande de papier (un rectangle) en identifiant deux bords opposés du rectangle après avoir fait subir un demi-tour à l'un d'entre eux. Découpez une telle bande de papier, collez de cette façon deux bords opposés et vérifier que le bord de la surface ainsi obtenue est bien un cercle, en voici deux illustrations :



Il est géométriquement clair que le ruban de Möbius n'est pas une surface orientable : si vous suivez un vecteur normal unitaire le long du bord de M il change d'orientation lorsque l'on parcourt une fois le bord de M. Vous démontrerez analytiquement ce fait dans l'Exercice 90.

3. August Ferdinand Möbius, mathématicien et astronome allemand (1790-1868).

2.4.3 Courbures

Définition 2.4.16. *Les valeurs propres de F_p s'appelent les courbures principales de S en p. Les vecteurs propres correspondants s'appelent les directions principales.*

On dit qu'une courbe tracée sur S est une ligne de courbure si ses vecteurs tangents sont tous des directions principales.

Rappelons qu'une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable, dans une base orthonormée. En particulier, **les directions principales sont orthogonales**.

Proposition 2.4.17 (Formule d'Euler [4])**.** *Soit e_1, e_2 des vecteurs unitaires dans les directions principales et soit k_1, k_2 les courbures principales correspondantes. Soit $v_\theta := \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$. Alors*

$$II_p(v_\theta, v_\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Démonstration. C'est un calcul immédiat. Puisque $F_p e_i = k_i e_i$, il vient

$$II_p(v_\theta, v_\theta) = \langle k_1 \cos\theta e_1 + k_2 \sin\theta \varepsilon_2, \cos\theta e_1 + \sin\theta \varepsilon_2 \rangle = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

puisque les directions principales sont orthogonales. □

Définition 2.4.18. *Le produit des courbures principales s'appelle la* **courbure de Gauss***,*

$$K_p := \det F_p = k_1(p) k_2(p).$$

La moyenne des courbures principales s'appelle la **courbure moyenne***,*

$$H_p := \frac{1}{2} Tr\, F_p = \frac{1}{2}[k_1(p) + k_2(p)].$$

Il est important de souligner que *la courbure de Gauss est invariante par par déformation isométrique : c'est un invariant intrinsèque de la surface.* Ce n'est pas le cas de la courbure moyenne.

La courbure de Gauss et la courbure moyenne ont chacune une interprétation géométrique :

- la courbure de Gauss est l'aire de l'image de la surface par l'application de Gauss ;
- la courbure moyenne intervient dans l'aire des surfaces équidistantes ;
- la positivité de la courbure de Gauss traduit la convexité.

L'annulation de la courbure moyenne caractérise les surfaces minimales, qui modélisent les films de savon.

4. Leonhard Euler, mathématicien et physicien suisse (1707-1783), considéré comme l'un des plus grands et plus prolifiques mathématiciens de tous les temps.

Exemple 2.4.19. *La courbure de Gauss de la sphère unité est constante, égale à* $+1$. *La courbure de Gauss d'un plan (resp. d'un cylindre) est constante égale à* 0. *La pseudosphère fournit un exemple de surface (de révolution) à courbure de Gauss constante égale à* -1 *(voir Exercice 80).*

Exemple 2.4.20. *Considérons la surface "selle",*

$$\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, xy) \in \mathbb{R}^3$$

qui est le graphe de la fonction $(x, y) \mapsto xy$. *On calcule aisément les deux premières formes fondamentales* I_p, II_p *en* $p = \varphi(x, y)$. *Nous les exprimons sous forme matricielle, dans la base* $\{\varphi_x, \varphi_y\}$,

$$I_p = \begin{bmatrix} 1+y^2 & xy \\ xy & 1+x^2 \end{bmatrix} \text{ et } II_p = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{}{2} \end{bmatrix}.$$

Dans cette même base, l'opérateur F_p *est (voir Exercice 70)*

$$F_p = I_p^{-1} II_p = \frac{1}{[1+x^2+y^2]^{3/2}} \begin{bmatrix} -xy & 1+x^2 \\ 1+y^2 & -xy \end{bmatrix}.$$

Ne vous inquietez pas : cette matrice n'est pas symétrique (sauf si $x^2 = y^2$*), car la base* φ_x, φ_y *n'est pas orthogonale ! On calcule ses valeurs propres (qui elles ne dépendent pas de l'orthogonalité de la base),*

$$k_1 = \frac{-xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{[1+x^2+y^2]^{3/2}}, \; k_2 = \frac{-xy - \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{[1+x^2+y^2]^{3/2}}.$$

Il vient donc

$$K = \frac{-1}{[1+x^2+y^2]^2} \quad \text{et} \quad H = \frac{-xy}{[1+x^2+y^2]^{3/2}}.$$

Les formules ci-dessus peuvent se déduire de formules générales qui permettent d'exprimer l'opérateur F_p et la courbure de Gauss dans la base (non orthogonale) déterminée par une paramétrisation fixée :

Proposition 2.4.21. *Soit* $\varphi : (x, y) \in U \mapsto \varphi(x, y) \in S \subset \mathbb{R}^3$ *une surface paramétrée. Les deux premières formes fondamentales* I_p, II_p *de* S *au point* $p = \varphi(x, y)$ *sont des formes quadratiques sur le plan tangent* $T_pS = Vect(\varphi_x, \varphi_y)$ *données sous forme matricielle dans cette base par*

$$I_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \text{ et } II_p = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix}.$$

L'endomorphisme symétrique F_p *dans cette base est donné par*

$$F_p = I_p^{-1} II_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix},$$

donc la courbure de Gausse s'exprime ainsi,

$$K_p = \frac{PR - Q^2}{EG - F^2}$$

et la courbure moyenne vaut

$$H_p = \frac{ER + GP - 2FQ}{2(EG - F^2)}$$

Démonstration. Une base de T_pS est $\{\varphi_x, \varphi_y\}$. On note I_p, II_p, M_p les matrices respectives de I_p, II_p et F_p dans cette base. Par définition ces matrices sont reliées par les identités

$${}^t v II_p u = II_p(u, v) = \langle F_p(u), v\rangle_p =^t v I_p(M_p u),$$

valables pour tout $u, v \in T_pS$. On en déduit $II_p = I_p M_p$.

Le calcul de la courbure de Gauss s'en déduit aisément,

$$K_p = \det M_p = \frac{\det II_p}{\det I_p} = \frac{PR - Q^2}{EG - F^2}.$$

Celui de la courbure moyenne nécessite d'inverser une matrice de taille 2,

$$\begin{aligned} M_p &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} GP - FQ & GQ - FR \\ EQ - FP & ER - FQ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$H_p = \frac{ER + GP - 2FQ}{2(EG - F^2)}.$$

□

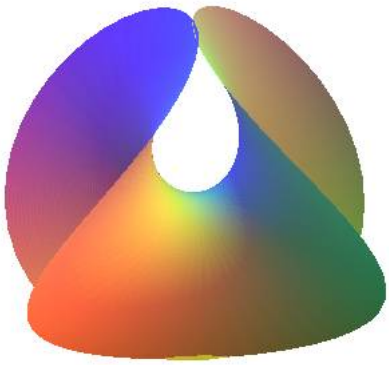
2.4.4 Autres notions classiques

C'est un problème historique important et difficile de déterminer quelles sont les surfaces "minimales" :

Définition 2.4.22. *On dit qu'une surface est* **minimale** *lorsque sa courbure moyenne est identiquement nulle.*

Voici une représentation graphique de la surface minimale d'Enneper [5]

5. Alfred Enneper, mathématicien allemand (1830-1885).



de paramétrisation

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right) \in \mathbb{R}^3$$

Vous vérifierez dans l'Exercice 87 que c'est bien une surface minimale. Nous verrons d'autres exemples par la suite.

Définition 2.4.23. *Lorsque la tranche normale de S dans la direction $v \neq 0$ est de courbure nulle, i.e. lorsque $II_p(v, v) = 0$, on dit que v est une direction asymptotique.*

Nous laissons le lecteur vérifier dans l'Exercice 68 qu'il existe une direction asymptotique en un point $p \in S$ si et seulement si le produit des courbures principales est négatif ou nul, c'est à dire lorsque la courbure de Gauss vérifie $K_p \leq 0$.

Nous invitons également le lecteur à vérifier dans l'Exercice 78 que les droites d'un réglage sont des directions asymptotiques, mais que ce ne sont pas les seules en général.

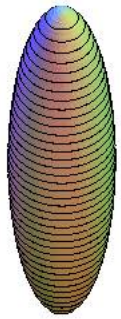
Définition 2.4.24. *Soit k_1, k_2 les courbures principales de S en p. On dit que*

- *p est un point planaire lorsque $k_1 = k_2 = 0$;*
- *p est un ombilic lorsque $k_1 = k_2 \neq 0$;*
- *p est un point parabolique lorsque $K := k_1 k_2 = 0$, p non planaire ;*
- *p est un point elliptique lorsque $K > 0$;*
- *p est un point hyperbolique lorsque $K < 0$.*

Le lecteur fera aisément le lien entre ces définitions et celles données dans le paragraphe 3.2.4 : les notions de point parabolique, elliptique, hyperbolique sont reliées à la position de la surface par rapport à son plan tangent. Celle-ci est en partie déterminée par la seconde forme fondamentale.

Exemple 2.4.25. *Un ellipsoïde a en général quatre ombilics tandis qu'un tore de révolution n'en a pas (à vérifier dans l'Exercice 76). Pour ce dernier,*

les points "intérieurs" sont hyperboliques, les points "extérieurs" sont elliptiques et les points qui se trouvent sur le cercle au sommet sont paraboliques. En voici une représentation graphique :



Les surfaces dont tous les points sont des ombilics sont des (portions de) plans ou des sphères (voir Exercice 77).

On peut ordonner les courbures principales de sorte que $k_1 \geq k_2$.

Proposition 2.4.26. *Les courbures principales $k_1 \geq k_2$ dépendent continument de $p \in S$ et sont lisses au voisinage d'un point qui n'est pas un ombilic.*

Démonstration. C'est une propriété générale des familles lisses d'endomorphismes symétriques. Pour calculer k_1 et k_2, on est amené à résoudre une équation de degré 2,

$$X^2 - 2HX + K = 0.$$

Les solutions dépendent continument des paramètres car elles s'expriment à l'aide de la racine carrée du discriminant. Elles sont de plus lisses là où celui-ci ne s'annule pas (i.e. hors des points ombilics).

Elles ne sont pas lisses, en général, au voisinage d'un ombilic comme le montre l'exemple de la matrice

$$t \in \mathbb{R} \mapsto S(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

qui a pour valeurs propres $k_1(t) = 1 + |t| \geq k_2(t) = 1 - |t|$. □

2.5 Theorema Egregium de Gauss

Euler publie en 1767 *Recherches sur la courbure des surfaces*, une étude des surfaces qui dépend de la façon dont celles-ci sont plongées dans $\mathbb{R}^3$. La naissance de la géométrie différentielle moderne se produit soixante ans plus tard, lorsque Gauss publie en 1828 le mémoire *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[6]. Gauss y entreprend l'étude des propriétés *intrinsèques*

6. Recherches générales sur les surfaces courbes.

des surfaces et démontre le résultat *remarquable* (=egregium en latin) que la courbure (de Gauss) que nous venons de définir à l'aide de la seconde forme fondamentale ne dépend pas du plongement. Pour cela Gauss établit la formule complexe

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{4(EG-F^2)} \big\{ & E[E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2] \\ & +F[E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4F_uF_v - 2F_uG_u] \\ & +G[E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2] + 2(EG-F)^2[-E_{vv} + 2F_{uv} - G_{uu}] \big\} . \end{aligned}$$

La courbure de Gauss ne dépend donc au final que des coefficients de la première forme fondamentale (et de leurs dérivées). Fin C7 2015

Nous n'allons pas essayer de démontrer cette formule directement. Nous allons procéder pas à pas en utilisant des quantités intermédiaires, les symboles de Christoffel, qui jouent un rôle essentiel aujourd'hui.

2.5.1 Symboles de Christoffel

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de S au voisinage d'un point p. Les vecteurs φ_u, φ_v, N forment une base orthornormée de $\mathbb{R}^3$. On peut exprimer leurs dérivées partielles dans cette base,

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + L_1N \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + L_2N \\ \varphi_{vu} &= \Gamma_{21}^1\varphi_u + \Gamma_{21}^2\varphi_v + L_2'N \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + L_3N \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_u N &= a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v \\ \partial_v N &= a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v, \end{aligned}$$

en observant que les dérivées de N sont orthogonales à N, car celui-ci est unitaire. Nous avons déjà été amenés à calculer les coefficients L_i en explicitant la deuxième forme fondamentale : en prenant le produit scalaire des quatre premières relations avec N il vient

$$L_1 = P, \;\; L_2 = L_2' = Q \quad \text{et } L_3 = R.$$

La valeur des coefficients de $\partial_u N, \partial_v N$ est fournie par la :

Proposition 2.5.1.

$$a_{11} = \frac{QF - PG}{EG - F^2} \qquad a_{12} = \frac{RF - QG}{EG - F^2}$$
$$a_{21} = \frac{PF - QE}{EG - F^2} \qquad a_{22} = \frac{QF - RE}{EG - F^2}$$

Démonstration. Comme N est orthogonal au vecteur tangent φ_u, il vient

$$0 = \frac{\partial \langle N, \varphi_u \rangle}{\partial u} = \langle \partial_u N, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uu} \rangle = \langle \partial_u N, \varphi_u \rangle + P.$$

On en déduit

$$a_{11}E + a_{21}F = -P.$$

On obtient de même $a_{11}F + a_{21}G = -Q$ et il s'ensuit que

$$a_{11} = \frac{QF - PG}{EG - F^2} \quad \text{et} \quad a_{21} = \frac{PF - QE}{EG - F^2}.$$

Les deux autres relations s'obtiennent de façon similaire. □

Définition 2.5.2. *Les coefficients Γ^i_{jk} s'appellent symboles de Christoffel*[7].

Comme $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, on note les relations de symétrie

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} \text{ et } \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}.$$

En prenant le produit scalaire des dérivées secondes de φ avec φ_u et φ_v on obtient

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F & = \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2}E_u \\ \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G & = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F & = \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2}E_v \\ \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G & = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2}G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F & = \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G & = \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2}G_v \end{cases}$$

Comme ces trois systèmes d'équations linéaires sont inversibles (puisque $EG - F^2 \neq 0$), on en déduit que les symboles de Christoffel ne dépendent que de la première forme fondamentale :

Proposition 2.5.3. *Les coefficients de Christoffel Γ^i_{jk} s'expriment en fonction des coefficients E, F, G et de leurs dérivées.*

2.5.2 Le théorème remarquable

Deux courbes de $\mathbb{R}^n$ sont toujours localement isométriques puisqu'on peut les paramétrer par longueur d'arc. Ce n'est pas le cas des surfaces :

Définition 2.5.4. *On dit que deux surfaces $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ sont localement isométriques au voisinage d'un point s'il existe un difféomorphisme local (au voisinage de ce point) qui envoie S_1 sur S_2 et qui préserve la longueur des courbes.*

7. Elwin Bruno Christoffel, mathématicien et physicien allemand (1829-1900).

Rappelons que préserver la longueur des courbes revient à préserver la première forme fondamentale. De façon alternative, si $\varphi_i : U \to S_i \subset \mathbb{R}^3$ désignent deux paramétrisations locales de S_1, S_2 dans un ouvert U, ces surfaces sont isométriques (dans U) si et seulement si pour tout point $m \in U$ et pour tous vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle d(\varphi_1)_m(u), d(\varphi_1)_m(v)\rangle = \langle d(\varphi_2)_m(u), d(\varphi_2)_m(v)\rangle.$$

Remarque 2.5.5. *De façon équivalente, deux surfaces régulières $S, S^* \subset \mathbb{R}^3$ sont localement isométriques si au voisinage de chaque point $p \in S, p^* \in S^*$, il existe deux paramétrisations régulières $\varphi : U \to S$, $\varphi^* : U \to S^*$ telles que $I_P = I_{P^*}$ pour tout $(u, v) \in U$ et $p = \varphi(u, v)$, $p^* = \varphi^*(u, v)$.*

Autrement dit l'application $\varphi^* \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \varphi^*(U)$ est un difféomorphisme local qui préserve la première forme fondamentale.

Un cône, un cylindre et un plan sont des exemples de surfaces localement isométriques. Observons qu'elles n'ont pas la même deuxième forme fondamentale. Il est donc *remarquable* que leur courbure de Gauss soit la même. Ce fait général, établi par Gauss, est conséquence du résultat suivant :

Théorème 2.5.6. *La courbure de Gauss est entièrement déterminée par la première forme fondamentale. Plus précisément, K peut être calculée à l'aide de E, F, G et de leurs dérivées partielles premières et secondes.*

Démonstration. Notons $\varphi : U \to S \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de la surface S. On note comme précédemment φ_u, φ_v les dérivées partielles de φ en un point $p \in S$. Ces vecteurs engendrent l'espace tangent T_pS.

En dérivant les expressions de $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vu}, \varphi_{vv}, \partial_u N, \partial_v N$ par rapport à u et v, et en utilisant les symétries

$$(\varphi_{uu})_v = (\varphi_{uv})_u, \quad (\varphi_{vv})_u = (\varphi_{uv})_v, \quad \partial_v(\partial_u N) = \partial_u(\partial_v N)$$

on obtient neuf relations linéaires. La relation qui suit s'appelle l'**équation de Gauss** : On a

$$\partial_u \Gamma^2_{12} - \partial_v \Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} = -EK.$$

Comme E ne s'annule pas, il résulte de cette formule et de la Proposition 2.5.3 que K ne dépend que de la première forme fondamentale.

Pour montrer ce type de formule, on observe que $\partial_v \varphi_{uu} = \partial_u \varphi_{uv}$ et on détermine le coefficient de φ_u pour aboutir à

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + Pa_{12} + \partial_v \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + Qa_{11} + \partial_u \Gamma^1_{12}.$$

On en déduit, en utilisant les formules obtenues pour a_{11} et a_{12} dans la Proposition 2.5.1,

$$\partial_u \Gamma^1_{12} - \partial_v \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} = KF.$$

L'équation de Gauss s'obtient de façon similaire, en déterminant le coefficient de φ_v, une fois qu'on a développé l'identité $\partial_v \varphi_{uu} = \partial_u \varphi_{uv}$. $\square$

On en déduit que la courbure de Gauss ne dépend pas du plongement de la surface dans $\mathbb{R}^3$, c'est un invariant intrinsèque :

Corollaire 2.5.7 (Theorema egregium de Gauss)**.**
Deux surfaces localement isométriques ont même courbure de Gauss.

Ce résultat n'a pas d'analogue dans le cas des courbes : toutes les courbes sont localement isométriques bien qu'elles n'aient pas nécessairement la même courbure. Le résultat de Gauss assure que deux surfaces qui n'ont pas la même courbure (de Gauss) ne peuvent pas être localement isométriques.

Remarque 2.5.8. *Deux surfaces peuvent être localement isométriques et ne pas avoir la même deuxième forme fondamentale (e.g le cylindre et le plan).*
Notez que deux surfaces peuvent avoir la même courbure de Gauss sans être localement isométriques (voir Exercice 83).

En procédant comme ci-dessus, mais en déterminant à présent le coefficient de N dans les identités $\partial_v\varphi_{uu} = \partial_u\varphi_{uv}$ et $\partial_u\varphi_{vv} = \partial_v\varphi_{uv}$, on obtient les **équations de Mainardi-Codazzi** [8] :

Proposition 2.5.9. *On a*

$$\partial_u Q - \partial_v P = -P\Gamma_{12}^1 + Q(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) + R\Gamma_{11}^2$$

et

$$\partial_u R - \partial_v Q = -P\Gamma_{22}^1 + Q(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) + R\Gamma_{12}^2.$$

Exemple 2.5.10. *Lorsque $F \equiv Q \equiv 0$ on obtient la forme simplifiée*

$$\partial_v P = P\Gamma_{12}^1 - R\Gamma_{11}^2$$

et

$$\partial_u R = -P\Gamma_{22}^1 + R\Gamma_{12}^2.$$

En remplaçant les coefficients de Christoffel par leurs expressions en fonction des coefficients de la première forme fondamentale, on obtient les égalités suivantes qui sont très utiles :

$$(\dagger) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \partial_v P & = & \frac{1}{2}\left(\frac{P}{E} + \frac{R}{G}\right)\partial_v E \\ \partial_u R & = & \frac{1}{2}\left(\frac{P}{E} + \frac{R}{G}\right)\partial_u G \end{array} \right.$$

Notons qu'on peut toujours trouver une paramétrisation locale telle que $F \equiv Q \equiv 0$ au voisinage d'un point qui n'est pas un ombilic :

8. Gaspare Mainardi (1800-1879) et Delfino Codazzi (1824-1873), mathématiciens italiens.

Lemme 2.5.11. *Si p n'est pas un point ombilic alors il existe une paramétrisation régulière de S au voisinage de p telle que $F \equiv Q \equiv 0$. Dans ce cas la courbure de Gauss s'écrit*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\partial_u\left(\frac{\partial_u G}{\sqrt{EG}}\right) + \partial_v\left(\frac{\partial_v E}{\sqrt{EG}}\right)\right).$$

Nous laissons le lecteur démontrer ce fait dans l'Exercice 91.

Remarque 2.5.12. *On peut montrer qu'il n'y a pas d'autres relations de compatibilité entre les deux premières formes fondamentales autres que celles de Gauss et de Mainardi-Codazzi : si on se donne des fonctions E, F, G, P, Q, R qui vérifient les équations de Gauss et de Mainardi-Codazzi, avec $E, G > 0$ et $EG - F^2 > 0$, alors on peut localement trouver une surface paramétrée régulière $S \subset \mathbb{R}^3$ (unique à isométrie globale près) qui a ces fonctions pour coefficients de ses deux premières formes fondamentales. Nous renvoyons le lecteur au livre de DoCarmo, pp 236 et 311-314, pour plus de détails.*

2.5.3 Invariance par isométries globales

Définition 2.5.13. *Deux surfaces de $\mathbb{R}^3$ sont équivalentes si elles sont image l'une de l'autre sous l'action d'une isométrie directe globale de $\mathbb{R}^3$.*

Rappelons qu'une isométrie globale de $\mathbb{R}^3$ est une application affine

$$u \in \mathbb{R}^3 \mapsto Au + b \in \mathbb{R}^3$$

où $b \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur (translation) et A est une matrice $3*3$ orthogonale. L'isométrie est dite directe lorsque A est de déterminant $+1$ (c'est à dire qu'elle préserve l'orientation).

Observons qu'une translation ne modifie pas les dérivées partielles et laisse donc inchangées les deux formes fondamentales. Une matrice orthogonale préserve les longueurs et le produit scalaire, elle laisse donc également inchangée la première forme fondamentale.

Une matrice orthogonale directe transforme le vecteur normal n à une surface S en $A \cdot n$, tandis qu'une matrice orthogonale indirecte le transforme en $-A \cdot n$. Il s'ensuit qu'une matrice orthogonale directe (resp. indirecte) laisse invariante la deuxième forme fondamentale de S (resp. la transforme en son opposée).

Le résultat qui suit, parfois appelé "théorème fondamental de la théorie locale des surfaces", constitue la réciproque à ce que nous venons d'observer :

Théorème 2.5.14. *Deux surfaces de $\mathbb{R}^3$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même première et deuxième formes fondamentales.*

Nous ne le démontrerons pas et renvoyons le lecteur aux références bibliographiques pour une preuve détaillée (voir par exemple DoCarmo, pp 236 et 311-314).

2.5.4 Exemples

Surfaces de révolution

On considère une courbe plane $\mathcal{C}$ et on la fait tourner autour d'une droite D du plan qui la contient. La droite D s'appelle *l'axe de révolution.*

On peut supposer que le plan de référence est le plan de coordonnées xOz et que la courbe $\mathcal{C}$ est paramétrée par sa longueur d'arc,

$$s \in I \mapsto (f(s), 0, h(s)) \in \mathbb{R}^3,$$

avec $f'(s)^2 + h'(s)^2 \equiv 1$. On peut également supposer que l'axe de révolution est l'axe de coordonnée Oz, la surface de révolution est alors paramétrée par

$$\varphi : (s, \theta) \in I \times]0, 2\pi[\mapsto (f(s)\cos\theta, f(s)\sin\theta, h(s)) \in \mathbb{R}^3.$$

Lemme 2.5.15. *La courbure de Gauss est, lorsque $f > 0$,*

$$K(s, \theta) = -\frac{f''(s)}{f(s)}.$$

Démonstration. Le vecteur normal est donné par

$$N(s, \theta) = (-h'(s)\cos\theta, -h'(s)\sin\theta, f'(s)).$$

En utilisant les notations et formules vues précédemment, on obtient pour les formes fondamentales,

$$E = 1,\ F = 0,\ G = f^2 \text{ et } P = (-f''h' + h''f'),\ Q = 0,\ R = fh'.$$

On en déduit que

$$K = \frac{h'[h''f' - f''h']}{f} = -\frac{f''}{f},$$

en rappelant que $f'(s)^2 + h'(s)^2 \equiv 1$, donc $h'h'' = -f'f''$. □

Exemple 2.5.16. *Un tore de révolution est la surface obtenue en faisant tourner un cercle autour d'une droite qui ne le rencontre pas. C'est un pneu (de voiture, vélo,etc) dont on ne considère que la surface. La paramétrisation par longueur d'arc du pneu est donnée par*

$$f(s) = R + r\cos(s/r),\ h(s) = r\sin(s/r),\ \textit{avec } R > r.$$

Le calcul précédent donne donc

$$K(s, \theta) = \frac{\cos(s/r)}{r[R + \cos(s/r)]}$$

qui est positive pour $s/r \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (côté pneu) et négative sinon (côté jante).

Nous nous intéressons à présent aux surfaces de révolution à courbure de Gauss constante.

Courbure constante nulle. C'est le cas le plus simple :

Proposition 2.5.17. *Si $K \equiv 0$, alors S est un plan, un cylindre ou un cône.*

Démonstration. Dans ce cas $f'' \equiv 0$, donc $f' \equiv$ *constante*. Il s'ensuit que h' est également constante, donc f et h sont affines, c'est à dire que $\mathcal{C}$ est un morceau de droite. On en déduit que S est du type annoncé, en fonction de la position relative de la droite $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe Oz (parallèles, perpendiculaires, ou autres).

Plus précisément, il vient $f(s) = as + b$ et $h(s) = \pm\sqrt{1-a^2}s + c$, où $a \in [-1, 1]$ et $b, c \in \mathbb{R}$. Quitte à changer d'origine, on se ramène aux trois cas suivants :

1) $f(s) = as$, $h(s) \equiv$ cst et $a \in \{-1, 1\}$, dans ce cas S est un plan ;

2) $f(s) = as$, $h(s) = \pm\sqrt{1-a^2}s$ et $a \notin \{\pm 1, 0\}$, alors S est un cône ;

3) $f(s) = b$, $h(s) = s$, et $a = 0$, dans ce cas S est un cylindre. □

Courbure constante positive. Nous avons déjà observé que les sphères sont des surfaces de révolution à courbure de Gauss constante positive. Supposons que K est une constante positive. La fonction f vérifie donc $f'' + Kf \equiv 0$, d'où, après changement d'origine,

$$f(s) = a\cos(\sqrt{K}s) \text{ et } h(s) = \int_0^s \pm\sqrt{1 - a^2K\sin^2(\sqrt{K}u)}du.$$

La fonction définissant h s'appelle une intégrale elliptique. On retrouve les sphères lorsque $a^2K = 1$.

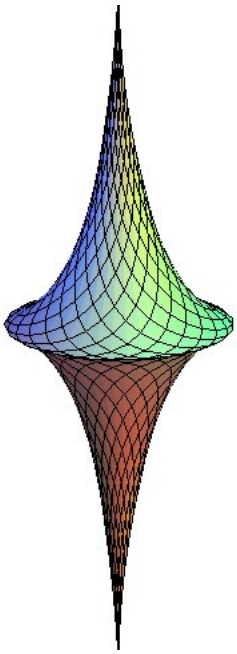
Courbure constante négative. Supposons à présent que la courbure de Gauss K est une constante négative. Il vient

$$f(s) = a\exp(\sqrt{-K}s) + b\exp(\sqrt{-K}s) = c\,\mathrm{Ch}(\sqrt{-K}s) + d\,\mathrm{Sh}(\sqrt{-K}s),$$

où Ch et Sh désignent le cosinus et le sinus hyperboliques. La surface qui correspond à

$$f(s) = e^s \text{ et } h(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{2t}}dt$$

s'appelle la *pseudosphère*. En voici une représentation graphique :



Elle a une courbure $K \equiv -1$ et possède de nombreuses propriétés remarquables que nous n'étudierons pas ici. Notons que la courbe plane $\mathcal{C}$ que l'on fait tourner pour définir la pseudosphère a été rencontrée au Chapitre 1, il s'agit de la tractrice.

Surfaces réglées

Ce sont les surfaces obtenues en faisant passer par tout point d'une courbe $\mathcal{C}$, une droite qui dépend de façon lisse du paramètre. Si la courbe $\mathcal{C}$ est paramétrée par $t \in I \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, la droite passant par $\varphi(t)$ peut être définie par son vecteur directeur $\beta(t) \in \mathbb{R}^3$. La surface admet ainsi la paramétrisation

$$(t, s) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) + s\beta(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Un exemple particulièrement important est la surface obtenue en considérant l'ensemble des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$.

Proposition 2.5.18. *Les surfaces réglées sont à courbure de Gauss négative.*

Autrement dit, tous les points d'une surface réglée sont hyperboliques ou paraboliques.

Démonstration. Rappelons que la courbure de Gauss est donnée par

$$K = \frac{PQ - R^2}{EG - F^2},$$

où nous avons repris les notations des sections précédentes. En particulier $EG - F^2 \geq 0$ est toujours positif (inégalité de Cauchy-Schwarz [9]), il s'agit donc de contrôler le signe du numérateur.

Or si $\varphi = \varphi(s,t) = \alpha(t) + s\beta(t)$ désigne la paramétrisation ci-dessus et n est le vecteur normal à la surface, on a

$$P = \langle \varphi_{ss}, n \rangle = 0,$$

le numérateur est donc égal à $-R^2$, d'où $K \leq 0$. □

Fin C8 2015

Surfaces minimales

Une nappe géométrique régulière de $\mathbb{R}^3$ est dite *minimale* si sa courbure moyenne est identiquement nulle. Une surface régulière est appelée *surface minimale* si chacune de ses paramétrisations est minimale.

Rappelons que l'annulation de la courbure de Gauss ne dépend pas du choix de la paramétrisation, mais qu'il n'en est pas de même pour la courbure moyenne.

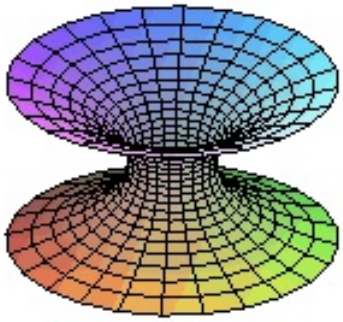
Nous citons à présent sans démonstration deux jolis résultats sur les surfaces minimales, le lecteur intéressé en trouvera une démonstration dans le livre de DoCarmo, pages 201-204.

Proposition 2.5.19. *Les seules surfaces minimales (connexes) de révolution dans $\mathbb{R}^3$ sont le plan et la caténoïde, qui peut être paramétrée par*

$$\varphi : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a\mathrm{Ch}\, s \cos t, a\mathrm{Ch}\, s \sin t, as) \in \mathbb{R}^3,$$

où a est un paramètre réel positif.

Voici une représentation graphique de la caténoïde :



9. Augustin Louis Cauchy, mathématicien français (1789-1857) ; Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand (1843-1921).

Proposition 2.5.20. *Les seules surfaces réglées minimales sont le plan et l'hélicoïde qui admet la paramétrisation*

$$\varphi : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a\mathrm{Sh}\, s \cos t, a\mathrm{Sh}\, s \sin t, at) \in \mathbb{R}^3,$$

où a est un paramètre réel positif.

2.6 Distance géodésique

2.6.1 Dérivée covariante et transport parallèle

Soit S une surface régulière et $\varphi : U \to S \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation au voisinage d'un point $p \in S$. Soit X un champ de vecteurs tangent à S,

$$X = a\varphi_u + b\varphi_v,$$

où a, b sont des fonctions lisses dans U.

Rappelons qu'un vecteur tangent $V \in T_pS$ est défini par l'intermédiaire d'une courbe lisse $\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow S$ tracée sur S, telle que

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = V.$$

Définition 2.6.1. *La dérivée covariante du champ de vecteurs X par rapport à V est*

$$D_V(X)(p) := \pi_p \left(\frac{d}{dt} X \circ \gamma \right)_{|t=0},$$

où π_p désigne la projection orthogonale sur le plan $T_p(S)$.

On note $(u(t), v(t)) := \varphi^{-1}(\gamma(t))$ et

$$a(t) = a(u(t), v(t)), \;\; b(t) = b(u(t), v(t)).$$

L'expression de la dérivée covariante de X par rapport à V dans la carte locale φ est donnée par :

Lemme 2.6.2.

$$\begin{aligned} D_V(X)(p) &= \left(a' + \Gamma^1_{11} a u' + \Gamma^1_{12} a v' + \Gamma^1_{12} b u' + \Gamma^1_{22} b v'\right) \varphi_u \\ &+ \left(b' + \Gamma^2_{11} a u' + \Gamma^2_{12} a v' + \Gamma^2_{12} b u' + \Gamma^2_{22} b v'\right) \varphi_v \end{aligned}$$

Nous laissons la preuve de ce lemme en Exercice 92.

Définition 2.6.3. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $\gamma = I \to S$ une courbe lisse régulière. On dit qu'un champ de vecteurs tangent X défini le long de γ est parallèle si*

$$D_{\gamma'(t)} X(\gamma(t)) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad t \in I.$$

Si X est un champ de vecteurs parallèle le long d'une courbe γ, la dérivée $\frac{d}{dt}X \circ \gamma(t)$ est orthogonale au plan tangent $T_{\gamma(t)}S$. On en déduit que

$$t \mapsto ||X \circ \gamma(t)||^2$$

est une fonction constante. Plus généralement, le transport parallèle préserve les longueurs et les angles comme vous le vérifierez dans l'Exercice 93.

Soit γ une courbe tracée sur une surface régulière S et $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}S$. Il existe un unique champ de vecteurs X parallèle le long de γ tel que $X(t_0) = X_0$. Cela résulte de théorème de Cauchy -Lipschitz [10] sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles ordinaires (linéaires) à coefficients lisses, puisque X doit vérifier

$$a' + \left(\Gamma^1_{11}u' + \Gamma^1_{12}v'\right) a + \left(\Gamma^1_{12}u' + \Gamma^1_{22}v'\right) b = 0$$

et

$$b' + \left(\Gamma^2_{11}u' + \Gamma^2_{12}v'\right) a + \left(\Gamma^2_{12}u' + \Gamma^2_{22}v'\right) b = 0$$

avec conditions initiales imposées par $X(t_0) = X_0$.

Définition 2.6.4. *On appelle transport parallèle de X_0 le long de γ le champ de vecteur ci-dessus.*

2.6.2 Géodésiques

Définition 2.6.5. *Une courbe lisse régulière $\gamma : I \to S$ est une géodésique si le champ de vecteurs $W(t) = \gamma'(t)$ est parallèle le long de γ, i.e.*

$$D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$$

pour tout $t \in I$.

Autrement dit une courbe $\gamma : I \to S$ est une géodésique si et seulement si elle vérifie pour tout $t \in I$,

$$\pi_{\gamma(t)}\gamma''(t) = 0,$$

où $\pi_{\gamma(t)}$ désigne la projection orthogonale sur le plan $T_{\gamma(t)}(S)$, i.e. le vecteur accéleration $\gamma''(t)$ est orthogonal au plan tangent $T_{\gamma(t)}(S)$.

Exemple 2.6.6.

1) Les (segments de) droites sont les géodésiques du plan. En effet dans ce cas $\pi_{\gamma(t)}$ est le projection orthogonale sur un plan fixe, l'équation se réduit donc à $\gamma''(t) \equiv 0$, i.e. $t \mapsto \gamma(t)$ est affine.

2) Les grands cercles (intersection d'un plan passant par l'origine avec la sphère) sont des géodésiques de la sphère (Exercice 96).

10. Rudolph Otto Sigismund Lipschitz, mathématicien allemand (1832-1903).

3) Les hélices sont des géodésiques du cylindre droit (Exercice 97).

4) Les géodésiques du tore se calculent à l'aide d'intégrales elliptiques, vous en trouverez une représentation graphique sur le site

http ://www.mathcurve.com/courbes3d/lignes/geodesictore.shtml

Les géodésiques sont des courbes paramétrées à vitesse constante :

Proposition 2.6.7. *Soit $\gamma : I \to S$, alors $t \mapsto ||\gamma'(t)||$ est constante.*

Démonstration. Par définition $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$ et $\gamma''(t)$ est orthogonal au plan $T_{\gamma(t)}S$, donc

$$\frac{d}{dt}||\gamma'(t)||^2 = 2\langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle = 0.$$

□

L'existence en temps court des géodésiques est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 2.6.8. *Soit $p \in S$ et $v \in T_pS \setminus \{0\}$. Il existe $\varepsilon > 0$ et une unique géodésique $\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to S$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$.*

L'existence en temps long (i.e. pour $t \in \mathbb{R}$) des géodésiques est liée au théorème de Hopf-Rinow (voir plus loin).

Démonstration. Soit $\varphi : (x, y) \in U \mapsto \varphi(x, y) \in S \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation (régulière) de S et $\gamma : t \in I \mapsto \varphi(x(t), y(t)) \in S$ une courbe tracée sur S. La courbe γ est une géodésique si et seulement si $\gamma''(t)$ est orthogonal à $T_{\gamma(t)}S$ pour tout t. Or $\gamma' = x'\varphi_x + y'\varphi_y$ et

$$\gamma'' = x''\varphi_x + (x')^2\varphi_{xx} + 2x'y'\varphi_{xy} + (y')^2\varphi_{yy} + y''\varphi_y.$$

En utilisant l'expression de $\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$ en fonction des symboles de Christoffel, on décompose $\gamma''(t)$ dans la base $\{\varphi_x, \varphi_y, N\}$. Le vecteur accélération γ'' est othogonale à $T_{\gamma(t)}S$ si et seulement si ses composantes selon φ_x et φ_y sont nulles, i.e.

$$x'' + \Gamma^1_{11}(x')^2 + 2\Gamma^1_{12}x'y' + \Gamma^1_{22}(y')^2 = 0$$

et

$$y'' + \Gamma^2_{11}(x')^2 + 2\Gamma^2_{12}x'y' + \Gamma^2_{22}(y')^2 = 0.$$

Notez que cela résulte également du Lemme 2.6.2, avec les notations $(u, v) = (x, y)$ et $(a, b) = (u', v')$.

L'équation des géodésiques est donc une équation différentielle non linéaire (et vectorielle) d'ordre deux. Si on note $Z = (x', y')$, elle peut s'écrire sous la forme $Z' = F(Z)$, avec F lisse. Il résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz qu'elle admet des solutions en temps court (i.e. sur un petit intervalle de temps $]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$), pour toute donnée initiale de Cauchy $(p, v) \in S \times T_pS$. □

On déduit (cf Exercice 104) de l'unicité que si $\gamma(t, v)$ désigne cette géodésique, alors pour $\lambda \neq 0$,

$$\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v).$$

Pour tout vecteur v de norme assez petite, il s'ensuit que la géodésique $\gamma(\cdot, v)$ est définie sur un intervalle de longueur au moins 2.

Définition 2.6.9. *Pour $v \in T_p(S)$ de longueur assez petite, on définit*

$$\exp_p(v) := \gamma(1, v).$$

Proposition 2.6.10. *L'application exponentielle réalise un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 dans $T_p(S)$ sur un voisinage de p dans S, avec*

$$D \exp_p = \mathrm{Id}.$$

Démonstration. Le fait que $\exp_p$ soit lisse résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz : la solution $\gamma(t, v)$ dépend de façon lisse des données initiales $(p, v) \in S \times T_pS$. Pour montrer que c'est un difféomorphisme local, il suffit donc de vérifier que sa différentielle en p est l'identité. Cela résulte de l'homogénéité déjà utilisée,

$$\exp_p(tv) = \gamma(1, tv) = \gamma(t, v) = \gamma(0, v) + t\gamma'(0, v) + o(t) = p + tv + o(t).$$

□

2.6.3 Distance intrinsèque

Rappelons que la longueur d'une courbe $\gamma : [0, 1] \to S$ tracée sur une surface S est

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 ||\gamma'(t)||dt.$$

Elle ne dépend que de la première forme fondamentale.

Etant donnés deux points p, q sur S, on peut toujours trouver une courbe tracée sur S qui les joint. Il est naturel d'essayer d'en construire une qui soit de longueur minimale et de mesurer ainsi la distances entre p et q :

Définition 2.6.11. *La distance entre deux points d'une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$ est la borne inférieure de la longueur des courbes qui les joignent :*

$$d_S(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) \,|\, \gamma \text{ courbe tracée sur } S \text{ t.q. } \gamma(0) = p \text{ et } \gamma(1) = q\}.$$

Notez que la définition ne prétend pas qu'il existe une courbe de longueur minimale ! Comme vous vous en rendrez compte dans les exercices, cette distance ne coincide pas avec la distance dans $\mathbb{R}^3$, sauf lorsque S est un plan.

Le lecteur vérifiera dans l'Exercice 105 que d_S définit bien une distance sur S. Cela découle des observations suivantes :

Proposition 2.6.12. *La fonction $d_S : S \times S \to \mathbb{R}^+$ vérifie*

1. $d_S(p,q) = d_S(q,p)$;
2. $d_S(p,q) \leq d_S(p,r) + d_S(r,q)$;
3. $d_{\mathbb{R}^3}(p,q) \leq d_S(p,q)$.

En particulier d_S est une distance.

Une propriété essentielle des géodésiques est qu'elles minimisent localement la distance d_S :

Théorème 2.6.13. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière. Soit $\gamma : [0,1] \to S$ une courbe tracée sur S. Si $\ell(\gamma) = d_S(p,q)$ alors γ est une géodésique.*

Réciproquement toute géodésique minimise localement la distance.

Notez bien que cette propriété n'est pas nécessairement vraie globalement, comme vous vous en rendrez compte dans les exercices : une géodésique "longue" ne minimise pas nécessairement la distance entre ses extrémités (pensez aux arcs de grands cercles sur la sphère).

Soit $p \in S$ et fixons $\varepsilon > 0$ assez petit. Pour tout $v \in T_pS$ de norme 1, il existe une géodésique $\gamma(t,v)$ de S issue de p et de vecteur initial v. Lorsque v parcourt l'ensemble des vecteurs unitaires de T_pS, les géodésiques $\{\gamma(t,v) \mid -\varepsilon < t < \varepsilon\}$ remplissent la boule $B_{d_S}(p,\varepsilon)$ de rayon ε. De plus γ est l'unique plus court chemin qui relie ses extrémités. Bien que d_S ne soit pas équivalente à la distance induite par la distance euclidienne, on en déduit cependant que ces deux distances induisent la même topologie.

Il est naturel d'essayer d'étendre le domaine de définition des géodésiques. Lorsque celui-ci est maximal (i.e. si une géodésique est définie sur $\mathbb{R}$), on se trouve dans une situation très particulière. Nous mentionnons sans démonstration l'important résultat de Hopf-Rinow [11] :

Théorème 2.6.14. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface. Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :*

1. *Il existe un $p \in S$ tel que l'application exponentielle $\exp_p$ est définie sur tout l'espace tangent $T_p(S)$;*
2. *$\forall p \in S$ l'application exponentielle $\exp_p$ est définie sur tout $T_p(S)$;*
3. *L'espace métrique (S, d_S) est complet.*

Dans ce cas toutes les géodésiques sont définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$ et on peut montrer que deux points sont toujours reliés par une géodésique qui minimise la longueur.

11. Heinz Hopf, mathématicien allemand (1894-1971), pionnier de la topologie algébrique ; Willi Rinow (1907-1979) était son étudiant.

Remarque 2.6.15. *En poussant un cran plus loin l'étude des variations de la longueur d'arc, il est possible de montrer le résultat suivant : si une surface S complète est à courbure uniformément minorée positivement, $K \geq \delta > 0$, alors S est compacte et le diamètre* diam(S) *de S vérifie*

$$\mathrm{diam(S)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Nous renvoyons le lecteur au livre de DoCarmo (p352) pour une preuve de ce magnifique théorème de Bonnet[12].

2.7 Théorème de Gauss-Bonnet

2.7.1 Surface strictement convexes

Définition 2.7.1. *On dit qu'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est strictement convexe si sa courbure de Gauss garde un signe constant.*

La sphère est un exemple évident de surface strictement convexe, mais vous en connaissez bien d'autres...n'est-ce pas ?

Théorème 2.7.2. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface fermée strictement convexe. Alors*

$$\int_S K \, d\sigma_S = 4\pi.$$

On intègre ici K contre la mesure d'aire $d\sigma_S$ qui est définie, dans une paramétrisation $\varphi : U \to S$ par

$$\varphi^* d\sigma_S = ||\varphi_u \wedge \varphi_v|| du \wedge dv.$$

Nous avons observé précédemment que $d\sigma_S$ ne dépend pas du choix de la paramétrisation.

Démonstration. Comme S est strictement convexe, l'application de Gauss réalise un difféomorphisme de S sur la sphère S^2, dont le jacobien est précisément la courbure de Gauss. Il s'ensuit que

$$\int_S K \, d\sigma_S = \mathrm{Aire(S^2)} = 4\pi.$$

□

Que se passe-t'il lorsque K change de signe ? Comme nous l'indiquons ci-après, on dispose d'une formule analogue qui fait intervenir un terme topologique (la caractéristique d'Euler de la surface) qui encode les changements de signes de K.

12. Pierre-Ossian Bonnet, mathématicien français (1819-1892).

2.7.2 Caractéristique d'Euler

Polyèdres convexes

Soit $P \subset \mathbb{R}^2$ un *polygone convexe* du plan, c'est à dire un ensemble convexe compact du plan dont le bord est constitué d'un nombre fini *d'arêtes* γ_i (i.e. des segments de droites). On appelle *sommets* les intersections $\gamma_i \cap \gamma_j$, $i \neq j$, des arêtes et *face* l'intérieur du polygone.

Définition 2.7.3. *Un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$ est la généralisation naturelle des polygones convexes en dimension trois. Ce sont des ensembles convexes compacts de $\mathbb{R}^3$ dont le bord est constitué d'un nombre fini s de polygones convexes $(P_i)_{1 \leq i \leq s}$ tels que pour tout $i \neq j$, $P_i \cap P_j$ est soit vide, soit une arête commune γ_ℓ à P_i et P_j.*

On note
- S le nombre de *sommets* du polyèdre (intersections $\gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset$, $i \neq j$)
- A le nombre d'arêtes
- et $F = s$ le nombre de faces.

Euler et Descartes ont observé une formule remarquable reliant ces quantités :

Proposition 2.7.4. *Pour tout polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$, on a*

$$S - A + F = 2.$$

Nous laissons le lecteur démontrer cette très jolie formule (Exercice 109).

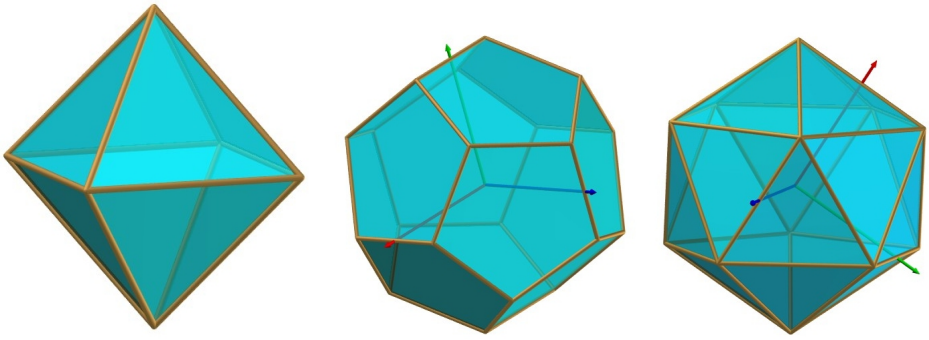
Exemple 2.7.5. *Un polyèdre convexe est dit régulier si*
-toutes ses faces sont des polygones réguliers convexes isométriques ;
-aucune des faces ne se coupe excepté sur les arêtes ;
-le même nombre de faces se rencontrent en chacun des sommets.
On note p le nombre de sommets sur chaque face et q le nombre de faces se rencontrant en chaque sommet. En observant que

$$pF = 2A = qS$$

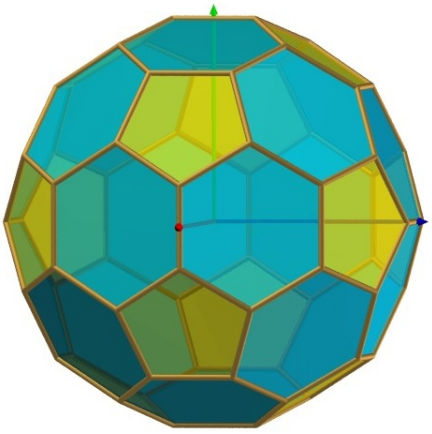
et en utilisant la formule d'Euler ci-dessus, vous montrerer dans l'Exercice 110 qu'il y a exactement cinq polyèdres convexes réguliers (les solides de Platon) :

1. *le tétraèdre vérifie $S = 4, A = 6, F = 4$ et $p = q = 3$;*
2. *le cube (hexaèdre) vérifie $S = 8, A = 12, F = 6$ et $p = 4, q = 3$;*
3. *l'octaèdre vérifie $S = 6, A = 12, F = 8$ et $p = 3, q = 4$;*
4. *le dodécaèdre (régulier) vérifie $S = 20, A = 30, F = 12$ et $p = 5, q = 3$;*
5. *l'icosaèdre vérifie $S = 12, A = 30, F = 20$ et $p = 3, q = 5$.*

Voici des représentations de ceux que vous avez sans doute le plus de mal à dessiner, saurez vous les reconnaitre ?



Vous étudierez l'icosaèdre "tronqué" dans l'Exercice 114



Il vous rappelle quelque chose ?

Fin C8 2015

Décomposition cellulaire

Définition 2.7.6. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface. On appelle décomposition cellulaire (lisse) de S la donnée d'une famille finie d'arcs lisses γ_i tracés sur S (appelés arêtes) tels que*

1. *deux arêtes sont disjointes ou partagent une extrémité ;*
2. *pour chaque composante connexe Ω de $S \setminus \cup\gamma_i$, il existe un difféomorphisme Φ d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ tel que $\Phi^{-1}(\Omega)$ soit un polygone convexe ;*
3. *si S a un bord, alors une face a au plus une arête dans le bord de S.*

On appelle *sommet* les extrémités des arêtes et *faces* les composantes connexes du complémentaire de la réunion des arêtes. Lorsque toutes les faces sont des triangles, on parle de *triangulation* (lisse).

On note S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces d'une telle décomposition cellulaire $\mathcal{C}$, et on définit

$$\chi(\mathcal{C}) := S - A + F,$$

la caractéristique d'Euler-Poincaré [13] de $\mathcal{C}$.

Exemple 2.7.7. *Considérons un disque plan $S \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$.*

1) Une première décomposition cellulaire $\mathcal{C}_1$ consiste à découper le disque en deux (par un diamètre). On obtient

- *deux sommets (les extrémités du diamètre), $S = 2$;*
- *trois arêtes (le diamètre et les deux demi-cercles), $A = 3$*
- *et deux faces (les deux moitiés du disque), $F = 2$.*

Il vient ainsi $\chi(\mathcal{C}_1) = 2 - 3 + 2 = 1$.

2) Une seconde décomposition cellulaire $\mathcal{C}_2$ consiste à découper le disque en quatre (par deux diamètres). On obtient alors

- *cinq sommets (les extrémités des diamètres, mais également leur intersection), $S = 5$;*
- *huit arêtes (les quatre demi-diamètres et les quatre quarts de cercles), $A = 8$*
- *et quatre faces (les quatre quarts du disque), $F = 4$.*

Il vient ainsi $\chi(\mathcal{C}_2) = 5 - 8 + 4 = 1$.

3) On pourrait aussi considérer la décomposition cellulaire la plus simple $\mathcal{C}_3$, à un sommet, une arête et une face qui donne encore $\chi(\mathcal{C}_3) = 1$!

On admettra le résultat important suivant :

Théorème 2.7.8. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte. Elle admet des décompositions cellulaires. Celles-ci ont toutes la même caractéristique d'Euler-Poincaré, notée $\chi(S)$ et appelée caractéristique d'Euler-Poincaré de S.*

Exemple 2.7.9. *La décomposition cellulaire la plus simple $\mathcal{C}_1$ de la sphère S^2 consiste à la découper le long d'un grand cercle. Il faut bien garder en tête que le cercle est constitué d'un sommet et d'une arête, et remarquer qu'il y a deux faces (les deux calottes sphériques) pour obtenir*

$$\chi(\mathcal{C}_1) = 1 - 1 + 2 = 2.$$

Si on découpe la sphère en quatre morceaux à l'aide de deux grands cercles, on obtient une décomposition cellulaire $\mathcal{C}_2$ telle que que $S = 2$,$A = 4$ et $F = 4$, d'où

$$\chi(\mathcal{C}_2) = \chi(\mathcal{C}_1) = \chi(S^2) = 2.$$

13. Henri Poincaré, mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français (1854-1912). Fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos ; il est considéré comme un des derniers grands savants universels.

Exemple 2.7.10. *Vous vérifierez dans l'Exercice 112 qu'un tore de révolution a une caractéristique d'Euler-Poincaré nulle, tandis qu'un tore à 2 trous a une caractéristique d'Euler-Poincaré égale à* -2.

Somme connexe

La somme connexe $S_1 \sharp S_2$ de deux surfaces est obtenue en enlevant un disque à chacune des surfaces et en les recollant le long du bord des disques enlevés.

Proposition 2.7.11. *La caractéristique d'Euler de* $S_1 \sharp S_2$ *est*

$$\chi(S_1 \sharp S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Nous laissons le lecteur démonter ce fait dans l'Exercice 115.

Remarquez que la sphère S^2 est un élément neutre pour cette opération. En effet, si on enlève un disque à la sphère S^2, on obtient un disque qui va simplement remplacer celui qu'on a enlevé à la deuxième surface.

La somme connexe d'une surface S et d'un tore, revient à attacher un anneau à S. On appelle tore à g trous la somme connexe de g copies d'un tore. Lorsque $g = 3$, on parle également de Bretzel :

2.7.3 Gauss-Bonnet intrinsèque

Théorème 2.7.12. *Soit* $S \subset \mathbb{R}^3$ *une surface régulière compacte. Alors*

$$\int_S K = 2\pi\chi(S).$$

Comme la sphère est la seule surface compacte de $\mathbb{R}^3$ dont la caractéristique d'Euler est positive, une conséquence immédiate du théorème de Gauss-Bonnet est le :

Corollaire 2.7.13. *Une surface compacte de courbure positive est homéomorphe à une sphère.*

Nous énonçons sans la démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.7.14. *Soit $T = (ABC)$ un triangle géodésique dans une surface S et α, β, γ les angles intérieurs associés. On a*

$$\int_T K = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Il résulte de cette observation que la somme des angles dans un triange géodésique est

1. égale à π si la courbure est nulle (géométrie euclidienne) ;
2. plus grande que π si la courbure est positive (géométrie sphérique) ;
3. plus petite que π si la courbrue est négative (géométrie hyperbolique).

2.8 Exercices

Exercice 45. *On pose $U = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < a < \pi,\ 0 < b < 2\pi\}$ et*

$$\varphi : (a, b) \in U \mapsto (\sin a \cos b, \sin a \sin b, \cos a) \in \mathbb{R}^3.$$

1) Montrer que (φ, U) est une paramétrisation régulière d'une partie de la sphère unité S^2. Laquelle ?

2) Donner une deuxième application (ψ, V) de sorte que la réunion de ces deux nappes recouvre complètement S^2.

3) Est-il possible de couvrir la sphère unité à l'aide d'une seule nappe ?

4) Calculer l'aire de la sphère unité.

Exercice 46. *Si on enlève un point à une sphère, on obtient un plan.*

Pour vous aider à visualiser ceci, considérons la projection stéréographique définie comme suit : la droite passant par un point $(x, y, z) \in S^2$ de la sphère unité et par le pôle nord $N = (0, 0, 1) \in S^2$ coupe le plan (xOy) en un unique point $(u, v, 0)$. Montrer que le système de coordonnées (u, v) permet de paramétrer $S^2 \setminus \{N\}$ via

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer que cette paramétrisation est conforme.

Exercice 47. *On considère le cône droit*

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z^2 = x^2 + y^2\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{C}$ est une surface régulière sauf en $(0, 0, 0)$.

2) Montrer qu'il n'existe aucune paramétrisation régulière $\varphi : B^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\varphi(0, 0) = (0, 0, 0)$ et $\varphi(B^2) \subset \mathcal{C}$.

Exercice 48. *Montrer que la quadrique définie par*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, xy + yz = 1\}$$

est un cylindre dont on donnera les principales caractéristiques.

Exercice 49. *Démontrer qu'une quadrique de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire le lieu d'annulation d'un polynôme de degré deux en trois variables réelles est conjuguée par une isométrie de $\mathbb{R}^3$ à l'une des formes indiquées dans la section 2.1.4.*

Exercice 50. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface de révolution obtenue en faisant tourner une courbe plane $\mathcal{C} \subset P$ autour d'une droite D du plan $P \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que les points singuliers sont situés à l'intersection entre $\mathcal{C}$ et D.*

Donner un exemple où il n'y a aucun point singulier, bien que l'intersection $\mathcal{C} \cap D$ soit non vide.

Exercice 51 (Conoïde de Plücker [14])**.**

1)Pour quelles valeurs de (x, y) l'équation

$$z(x^2 + y^2) = xy$$

définit-elle une surface régulière ?

2) Dessiner cette surface. Montrer que c'est une surface réglée.

Exercice 52 (Parapluie de Whitney [15])**.** *On considère la surface paramétrée par*

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (uv, v, u^2) \in \mathbb{R}^3.$$

1) Montrer que la demi-droite $(x = y = 0, z > 0)$ est une ligne de points doubles et que l'origine est un point singulier.

2) Montrer que pour $v \neq 0$, le vecteur

$$N(u, v) = (-2u/v, 2u^2/v, 1)$$

est normal à la surface et qu'il n'admet pas de limite quand (u, v) tend vers $(0, 0)$ (les plans tangents n'ont donc pas de limite au point singulier).

Exercice 53. *On considère une fonction lisse $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et la surface régulière*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \,/\, z = xf(y/x)\}.$$

Montrer que tous les plans tangents à S contiennent l'origine $(0, 0, 0)$.

14. Julius Pücker, mathématicien et physicien allemand (1801-1868).

15. Hassler Whitney, mathématicien américain (1907-1989), un des fondateurs de la théorie des singularités.

Exercice 54. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $P \subset \mathbb{R}^3$ un plan affine. On suppose que P rencontre S en un point unique a. Montrer que P est nécessairement le plan tangent à S au point a.*

Que pensez vous de la réciproque ?

Exercice 55. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière. Montrer que si toutes les droites normales à S sont concourantes, alors S est une portion de sphère.*

Exercice 56 (Surfaces tubulaires)**.** *Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ la paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe gauche Γ dont la courbure ne s'annule nulle part. Soit (T, N, B) le repère de Frenet et*

$$\varphi : (s, \theta) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \alpha(s) + \varepsilon[\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s)],$$

où $\varepsilon > 0$ est une constante positive.

1) Est-ce que φ définit une nappe régulière (elle est alors appelée surface tubulaire S_ε de la courbe gauche) ?

2) Montrer que le vecteur normal à la surface tubulaire S_ε est

$$\mathcal{N}(s, \theta) = -[\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s)].$$

3) Montrer que l'aire de S_ε est $2\pi\varepsilon\ell(\Gamma)$, $\ell(\Gamma)$ désignant la longueur de Γ.

Exercice 57. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse définie dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que la différentielle de la restriction f de F à S est la restriction de DF à l'espace tangent à S. Autrement dit $\forall p \in S$,*

$$Df_p = D(F_{|S})_p = (DF_p)_{|T_p(S)}.$$

Exercice 58. *Soit X et Y deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ qui sont en chaque point linéairement indépendants. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

i) en tout point $[X, Y] \in \mathrm{Vect(X, Y)}$;

ii) au voisinage de tout point $m \in \mathbb{R}^3$, il existe une surface contenant m et dont le plan tangent contient X et Y .

Exercice 59. *Expliciter les coefficients de la première forme fondamentale du cylindre C, de la caténoïde $\mathcal{C}$ et de l'hélicoïde H définis par les paramétrisations suivantes,*

$$C = \{(R\cos\theta, R\sin\theta, s) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (\theta, s) \in \mathbb{R}^2\};$$

$$\mathcal{C} := \{(\mathrm{Ch}\, u \cos v, \mathrm{Ch}\, u \sin v, u) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (u, v) \in \mathbb{R}^2\};$$

$$H := \{(u\cos v, u\sin v, v) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (u, v) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 60. *Soit S une surface de révolution obtenue en faisant tourner une courbe $\mathcal{C}$ autour de l'axe (Oz). On peut la paramétrer par*

$$(s, \theta) \mapsto (f(s)\cos\theta, f(s)\sin\theta, h(s)).$$

On suppose que $\mathcal{C}$ est paramétrée par la longueur d'arc. Montrer que l'aire de S est

$$\mathrm{Aire}(S) = 2\pi \int_0^L |f(s)| ds,$$

où L désigne la longueur de $\mathcal{C}$. Retrouver ainsi l'aire du tore de révolution.

Exercice 61. *Soit $N : S \to S^2$ l'application de Gauss d'une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$. Décrire l'image $N(S)$ dans les cas suivants :*

1) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x/a)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $a > 0$;

2) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = 0\}$;

3) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = x^2 + y^2\}$;

4) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$;

5) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = (\mathrm{Ch}\, z)^2\}$.

Exercice 62. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface de révolution. Montrer que l'on peut trouver une paramétrisation de S pour laquelle les coefficients de la première forme fondamentale sont*

$$E = E(v), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Exercice 63. *Montrer que $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface de révolution si et seulement si toutes les normales à S passent par une droite fixe.*

Exercice 64. *Soit $N : S \to S^2$ l'application de Gauss d'une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$. Soit $\alpha : I \to S$ une courbe paramétrée régulière qui ne contient aucun point planaire ni aucun point parabolique. Montrer que*

$$N \circ \alpha : I \to S^2$$

définit une courbe régulière de la sphère unité S^2.

Est-ce le cas lorsque la courbe $\alpha(I)$ contient des points planaires (resp. paraboliques) ?

Exercice 65. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $\Phi : S \to \mathbb{R}^3$ une application vectorielle. Soit $\alpha, \beta :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to S$ deux courbes tracées sur S. On suppose que $\alpha(0) = \beta(0)$ et $\alpha'(0) = \beta'(0)$. Montrer que*

$$(\Phi \circ \alpha)'(0) = (\Phi \circ \beta)'(0).$$

Exercice 66. *Soit $t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ une courbe Γ paramétrée. On suppose que $\Gamma \subset P$ est plane et on considère le cône C de sommet $O \notin P$ s'appuyant sur Γ. On suppose que O est l'origine dans $\mathbb{R}^3$.*

1) Montrer que C est paramétré par

$$(s, t) \in \mathbb{R} \times I \mapsto s\varphi(t) \in \mathbb{R}^3.$$

2) Montrer que le vecteur normal est indépendant de s. Quelle est la courbure de Gauss en un point $\varphi(s, t)$ du cône, $s \neq 0$?

Exercice 67. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $p \in S$ telle que $K(p) \neq 0$. En utilisant le fait que la courbure de Gauss est le jacobien de l'application de Gauss, montrer que*

$$K(p) = \lim_{A \to 0} \frac{A}{A'},$$

où A est l'aire d'une région $B \subset S$ contenant p et A' est l'aire de l'image de A par l'application de Gauss (avec des restrictions naturelles sur la façon de prendre la limite).

Exercice 68. *Montrer qu'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ admet une direction asymptotique en un point $p \in S$ si et seulement si la courbure de Gauss vérifie $K_p \leq 0$.*

Exercice 69. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée. Montrer que si l'opérateur F_p est nul pour tout p dans S, alors S est incluse dans un plan.*

Exercice 70. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée. On note I_p, II_p les matrices représentant les deux premières formes fondamentales au point $p \in S$ dans la base $\{\varphi_x(p), \varphi_y(p)\}$, où $\varphi : U \to S \subset \mathbb{R}^3$ désigne une paramétrisation de S. Montrer que l'opérateur F_p s'exprime dans cette base par la matrice*

$$F_p = I_p^{-1} II_p.$$

Cette matrice est-elle symétrique ?

Exercice 71. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une sphère. Montrer que F_p est une homothétie dont on calculera le rapport. Que pensez vous de la réciproque ?*

Exercice 72. *On suppose qu'une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$ est tangente à un plan P le long d'une courbe $\mathcal{C}$. Montrer que tout point $p \in \mathcal{C} \subset S$ est soit planaire, soit parabolique.*

Exercice 73. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et p (resp. q) un point elliptique (resp. hyperbolique).*

1) Mqu'au voisinage de p, la surface S reste du même coté du plan $T_p(S)$.

2) Mqu'au voisinage de q, la surface S traverse le plan tangent $T_q(S)$.

Exercice 74. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface. On suppose que S contient une droite D. Montrer que D est une direction asymptotique de S.*

Exercice 75. *Soit $a, b, c > 0$. On considère l'ellipsoide*

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Pour $p \in E$, on note d la distance de 0 au plan tangent $T_p(E)$. Montrer que la courbure de Gauss de E au point p est donnée par

$$K(p) = \frac{d^4}{a^2 b^2 c^2}.$$

Exercice 76. *Montrer qu'un ellipsoïde a en général quatre ombilics (points en lesquels les courbures principales coïncident). Montrer qu'un tore de révolution n'a aucun ombilic.*

Exercice 77. *Soit $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une nappe régulière dont tous les points sont des ombilics.*

1) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $N = -k\varphi + v$.

2) Montrer que $\varphi(U)$ est un (morceau de) plan si $k = 0$ et que c'est une (partie d'une) sphère centrée en v/k si $k \neq 0$.

Exercice 78. *Soit $H = \{(x \cos y, x \sin y, y) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ un hélicoïde.*

1) Montrer que c'est une surface réglée et que les droites du réglage sont des directions asymptotiques.

2) Montrer que les hélices tracées sur H sont également des directions asymptotiques.

Exercice 79. *On dit que deux surface $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ ont un point de contact d'ordre k en $p \in S_1 \cap S_2$ lorsqu'il existe un difféomorphisme local f envoyant S_1 sur S_2 qui admet le développement limité $f(m) = f(p) + o(||m-p||^k)$ au voisinage de p.*

1) Montrer que S_1 et S_2 ont un point de contact d'ordre 1 en $p \in S_1 \cap S_2$ si et seulement si elles ont même plan tangent en p.

2) Montrer que S_1 et S_2 ont un point de contact d'ordre 2 en $p \in S_1 \cap S_2$ si et seulement si elles ont même plan tangent et même deuxième forme fondamentale en p.

Exercice 80. *On considère la pseudosphère de paramétrisation*

$$\varphi(s,\theta) = (f(s)\cos\theta, f(s)\sin\theta, h(s))$$

où

$$f(s) = e^s \quad et \quad h(s) = \int_0^s \sqrt{1-e^{2t}}dt$$

Montrer que $K \equiv -1$.

Exercice 81 (Formule de Meusnier [16])**.** *Soit α une courbe tracée sur une surface $S \subset \mathbb{R}^3$, passant par $p \in S$ avec vecteur tangent unitaire v. Montrer que*

$$II_p(v,v) = \kappa\cos\theta,$$

où θ est l'angle entre la normale principale à α et la normale à S en p et κ est la courbure de α en p.

Exercice 82. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $p \in S$. On suppose que toutes les courbes tracées sur S et passant par p ont une courbure au moins égale à $c > 0$. Montrer que la courbure de Gauss de S en p est au moins égale à c^2.*

Exercice 83.

1) Dessiner la surface de révolution S paramétrée par

$$\varphi : (t,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto (t\sin\theta, t\cos\theta, \log t) \in \mathbb{R}^3$$

et calculer sa courbure.

2) On considère l'hélicoïde H paramétré par

$$\psi : (t,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer que sa courbure au point de paramètre $(t,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est la même que celle de S.

3) Montrer que S et H ne sont pas localement isométriques.

16. Jean-Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place, général de la Révolution, géomètre et ingénieur français (1754-1793).

Exercice 84. *Montrer que l'ellipsoïde*

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \right\}$$

et la sphère unité sont difféomorphes mais pas isométriques.

Exercice 85. *Soit $a > 0$. Montrer que la caténoïde*

$$\varphi : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a\mathrm{Ch}\, s \cos t, a\mathrm{Ch}\, s \sin t, as) \in \mathbb{R}^3,$$

est une surface minimale.

Exercice 86. *Soit $a > 0$. Montrer que l'hélicoïde*

$$\varphi : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a\mathrm{Sh}\, s \cos t, a\mathrm{Sh}\, s \sin t, at) \in \mathbb{R}^3,$$

est une surface minimale.

Exercice 87. *On souhaite montrer que la surface d'Enneper*

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right) \in \mathbb{R}^3$$

est une surface minimale.

1) Montrer que les coefficients de la première forme fondamentale sont

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2 \text{ et } F = 0.$$

2) Montrer que les coefficients de la seconde forme fondamentale sont

$$P = 2,\ Q = -2 \text{ et } R = 0.$$

3) Montrer que les courbures principales sont

$$k_1 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2},\ k_2 = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

et conclure.

Exercice 88. *Soit $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces régulières et $f : S_1 \to S_2$ une application différentiable qui est un difféomorphisme local en tout point.*

Montrer que S_2 est orientable si S_1 l'est. En déduire que l'orientabilité est préservée par les difféomorphismes.

Exercice 89. *Soit S une surface régulière couverte par deux paramétrisations (φ, U), (ψ, V) telles que $\varphi(V) \cap \varphi(W)$ a deux composantes connexes W_1, W_2. On suppose que le changement de coordonnées a un jacobien positif dans W_1 et négatif dans W_2. Montrer que S n'est pas orientable.*

Exercice 90. *Montrer que le ruban de Möbius n'est pas une surface orientable.*

Montrer que si une surface S a un ouvert difféomorphe au ruban de Möbius, alors S n'est pas orientable.

Exercice 91. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $p \in S$ un point qui n'est pas un ombilic. Montrer qu'il existe une paramétrisation régulière de S au voisinage de p telle que $F \equiv Q \equiv 0$.*

Exercice 92. . *Soit $\varphi : U \to S \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation locale d'une surface S au voisinage d'un point $p \in S$. Soit $X = a\varphi_u + b\varphi_v$ un champ de vecteurs tangent à S et $\gamma =]-\varepsilon, +\varepsilon[\to S$ une courbe tracée sur S telle que*

$$\gamma(0) = p \text{ et } \gamma'(0) = V \in T_pS.$$

On note $(u(t), v(t)) := \varphi^{-1}(\gamma(t))$ et $a(t) = a(u(t), v(t))$, $(b(t) = b(u(t), v(t))$.

Montrer que l'expression de la dérivée covariante de X par rapport à V est donnée par :

$$\begin{aligned} D_V(X)(p) &= \left(a' + \Gamma^1_{11}au' + \Gamma^1_{12}av' + \Gamma^1_{12}bu' + \Gamma^1_{22}bv'\right)\varphi_u \\ &+ \left(b' + \Gamma^2_{11}au' + \Gamma^2_{12}av' + \Gamma^2_{12}bu' + \Gamma^2_{22}bv'\right)\varphi_v \end{aligned}$$

Exercice 93. *Soit S une surface et γ une courbe tracée sur S. Soit X, Y deux champs de vecteurs tangents à S, parallèles le long de γ. Montrer que*

$$t \mapsto \langle X \circ \gamma(t), Y \circ \gamma(t) \rangle$$

est une fonction constante. En déduire que le transport parallèle préserve les longueurs et les angles.

Exercice 94. *Soit N le vecteur normal à une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$. Soit $\gamma : I \to S$ une courbe tracée sur S à vitesse constante. Montrer que γ est une géodésique si et seulement si*

$$\det(N, \gamma', \gamma'') \equiv 0.$$

Exercice 95. *Soit* $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (t^2, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ *une courbe tracée sur la surface plane* $S = \{(x, y, z) \,|\, z = 0\}$. *Est-ce une géodésique ?*

Exercice 96. *Calculer les géodésiques de la sphère.*

Exercice 97.

1) Calculer les géodésiques d'un cylindre droit.

2) Vérifier que deux points d'une génératrice sont joints par une hélice et que celle-ci est une géodésique qui ne minimise pas la distance.

Exercice 98. *Calculer les géodésiques du cône* $\mathcal{C}$ *paramétré par*

$$\varphi : (s, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (s\cos\theta, s\sin\theta, s) \in \mathcal{C}.$$

Exercice 99. *Soit* $S \subset \mathbb{R}^3$ *une surface régulière qui contient une droite* D. *Montrer que celle-ci est une géodésique de* S *(lorsqu'elle est parcourue à vitesse constante).*

Exercice 100. *Soit* $S \subset \mathbb{R}^3$ *une surface régulière et* γ *une courbe tracée sur* S. *Montrer que* γ *est une géodésique si et seulement si la normal principale à* γ *coincide en tout point avec la normale à* S.

Exercice 101. *Soit* S *une surface de révolution,*

$$\varphi : (s, \theta) \mapsto (f(s)\cos\theta, f(s)\sin\theta, h(s))$$

avec $(f')^2 + (h')^2 \neq 0$ *et* $f > 0$ *de sorte que* S *est régulière. Soit*

$$\gamma : t \mapsto \varphi(s(t), \theta(t))$$

une géodésique de S. *Montrer la relation de Clairaut*[17]

$$f^2(s(t))\theta'(t) \equiv \text{constante}.$$

Exercice 102. *Soit* $S \subset \mathbb{R}^3$ *une surface de révolution. On appelle méridienne l'intersection d'un plan avec l'axe de révolution de* S. *Montrer que les méridiennes sont des géodésiques.*

17. Alexis Claude Clairaut, mathématicien français(1713-1765).

Exercice 103. *Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère l'hélicoide droit donné par la paramétrisation*

$$\varphi : (s, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \mapsto (s \cos\theta, s \sin\theta, a\theta).$$

Calculer ses géodésiques.

Exercice 104. *Soit S une surface régulière, $p \in S$ et $v \in T_pS$. Soit $\gamma(t, v)$ l'unique géodésique telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$. Montrer que pour tout $\lambda \neq 0$,*

$$\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v).$$

Exercice 105. *La distance entre deux points d'une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$ est définie par*

$$d_S(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) \,|\, \gamma \text{ courbe tracée sur } S \text{ t.q. } \gamma(0) = p \text{ et } \gamma(1) = q\}.$$

Vérifiez que

1. $d_S(p, q) = d_S(q, p)$;
2. $d_S(p, q) \leq d_S(p, r) + d_S(r, q)$;
3. $d_{\mathbb{R}^3}(p, q) \leq d_S(p, q)$.

En déduire que d_S est une distance.

Exercice 106. *Soit $p, q \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ deux points de la sphère unité. Montrer que la distance intrinsèque entre ces deux points est donnée par*

$$d_S(p, q) = \arccos(P \cdot Q)$$

et qu'elle est réalisée par un des arcs du grand cercle passant par p et q.

Exercice 107. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface et d_S la distance intrinsèque. Pour $p \in S$ et $\varepsilon > 0$ on note*

$$S_\varepsilon(p) := \{q \in S \,|\, d_S(p, q) < \varepsilon\}.$$

Montrer que

$$\ell(\partial S_\varepsilon(p)) = 2\pi\varepsilon - \frac{\pi}{3} K_S(p)\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3),$$

où K_S désigne la courbure de Gauss de S.

Exercice 108. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière définie localement par une paramétrisation $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$. On note n son vecteur normal unitaire.*

Soit $\gamma : I \to S$ une courbe paramétrée à vitesse unité, tracée sur S. Le vecteur $t = \gamma'$ est donc un vecteur unitaire tangent à γ et à S. On note $g = n \wedge t$: c'est une vecteur tangent à S qui constitue avec t une base de l'espace tangent à S en $p = \gamma(s)$.

Les vecteurs (t, g, n) constituent une base directe de $\mathbb{R}^3$, le repère correspondant (avec origine le point $p = \gamma(s)$) s'appelle le repère de Darboux.

1) Montrer qu'il existe des coefficients γ_n (courbure normale), γ_g (courbure géodésique) et τ_g (torsion géodésique) tels que

$$\begin{pmatrix} t' \\ g' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_g & \gamma_n \\ -\gamma_g & 0 & -\tau_g \\ -\gamma_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ g \\ n \end{pmatrix}$$

2) Montrer que γ est une géodésique de S si et seulement si sa torsion (en tant que courbe gauche) est égale à sa torsion géodésique.

Exercice 109. *Montrer que pour tout polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$*

$$S - A + F = 2.$$

Exercice 110. *On note p le nombre de sommets sur chaque face d'un polyèdre convexe régulier et q le nombre de faces se rencontrant en chaque sommet. Montrer que*

$$pF = 2A = qS$$

et utiliser la formule d'Euler pour en déduire qu'il y a exactement cinq polyèdres convexes réguliers.

Exercice 111. *Soit $T = (ABC)$ un triangle géodésique sur la sphère S^2 et α, β, γ les angles associés. Montrer la formule de Girard*[18]

$$\text{Aire(T)} = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Exercice 112. *Calculer la caractéristique d'Euler*
- *d'un tore ;*
- *d'un bretzel.*

Exercice 113. *Montrer que la caractéristique d'Euler du ruban de Möbius est nulle.*

18. Albert Girard, mathématicien français (1595-1632).

Exercice 114. *Un ballon de football est constitué en général d'un certain nombre de pentagones et d'hexagones. On note P le nombre de pentagones, H le nombre d'hexagones, et S, A, F les caractéristiques de la décomposition cellulaire qu'ils définissent.*

1) Montrer que $S = (5P + 6H)/3$ et $A = (5P + 6H)/2$.

2) En utilisant le fait que la caractéristique d'Euler-Poincaré de la sphère est 2, montrer qu'il y a nécessairement 12 pentagones.

Exercice 115. *Soit S_1, S_2 deux surfaces. Montrer que la caractéristique d'Euler de leur somme connexe $S_1 \sharp S_2$ est*

$$\chi(S_1 \sharp S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Chapitre 3

Variétés

Ce dernier chapitre est consacré à la généralisation des courbes et des surfaces en dimension supérieure : les variétés.

Nous commençons par définir les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ et leurs espaces tangents. Nous introduisons les propriétés fondamentales des applications différentielles entre sous-variétés (immersion, submersion, plongement, difféomorphismes).

Après quelques rappels d'algèbre multilinéaire, nous définissons les formes différentielles et construisons la différentielle extérieure. Nous abordons ensuite la notion de changement de variables et le théorème de Stokes. Il s'agit d'un premier contact et vous aborderez ces notions plus en profondeur dans le module de topologie différentielle.

Nous introduisons ensuite la notion de variété abstraite et de structure différentiable. Nous passons en revue de nombreux exemples de variétés orientables (sphères, tores, espaces projectifs de dimension impaire), comme non-orientables (bouteille de Klein [1], espaces projectifs de dimension paire).

Les groupes de Lie fournissent une source d'exemples particulièrement intéressants pour la géométrie différentielle. Nous donnons des informations parcellaires sur les groupes les plus classiques (groupe linéaire, groupe spécial linéaire, groupes orthogonal et unitaire).

Afin de vous inciter à compléter vos lectures et à vous situer dans le paysage de la recherche récente en Mathématiques, nous indiquons (sans démonstration) quelques éléments de la classification des variétés de basse dimension, à difféomorphismes près.

Comme d'habitude les exercices sont regroupés en fin de chapitre.

1. Felix Christian Klein, mathématicien allemand (1849-1925). Il a énoncé le très influent programme d'Erlangen, qui ramène l'étude des différentes géométries à celle de leurs groupes de symétrie respectifs.

3.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Dans la suite V_p (resp. W_p) désigne un voisinage ouvert d'un point p dans $\mathbb{R}^n$ et on note B^n la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

3.1.1 Définition

Comme nous l'avons déjà réalisé dans le cas des courbes et des surfaces, il y a plusieurs façons équivalentes de définir les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.1.1. *Soit M un sous-ensemble (non vide) de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq d \leq n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $p \in M$, il existe une paramétrisation régulière $f : B^d \to V_p \cap M$ de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ sur un voisinage $V_p \cap M$ de p dans M.*
2. *Pour tout $p \in M$, il existe une application $h : B^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ différentiable et un voisinage ouvert $V_p \cap M$ de p tels que*
$$V_p \cap M = \{(x, y) \in B^d \times \mathbb{R}^{n-d} \,|\, y = h(x)\} \cap V_p.$$
3. *Pour tout $p \in M$, il existe une submersion $g : V_p \to \mathbb{R}^{n-d}$ définie dans un voisinage $V_p \subset \mathbb{R}^n$ de p, telle que*
$$V_p \cap M = g^{-1}(g\{p\}).$$
4. *Pour tout $p \in M$ il existe un difféomorphisme f d'un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans un voisinage $W_p \subset \mathbb{R}^n$ de p, tel que*
$$f(V \cap \mathbb{R}^d \times \{0\}) = W_p \cap M.$$

Une *paramétrisation régulière* $f : B^d \to M$ est une application lisse telle que pour tout $q \in B^d$, la différentielle $D_q f$ est injective : on dit que c'est une *immersion*. Lorsqu'une immersion réalise un homéomorphisme sur son image, on parle alors de *plongement*. Une *submersion* est une application différentiable dont la différentielle en tout point est surjective, nous en reparlerons plus loin.

Démonstration. La démonstration est une conséquence du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites, de la même façon que ce que nous avons déjà démontré dans le cas des courbes et des surfaces.

Si M admet une paramétrisation régulière $f : B^d \to M$ avec $f(0) = p$, alors $D_0 f$ est de rang d. Quitte à changer l'ordre des f_j, on peut supposer que la matrice $[\partial f_i / \partial x_j(0)]_{1 \leq i,j \leq d}$ est inversible. Le théorème d'inversion locale assure que
$$\phi : x \in B^d \mapsto (f_1(x), \ldots, f_d(x)) \in \mathbb{R}^d$$

est inversible au voisinage de 0. On peut alors, au voisinage de p, exprimer M comme le graphe de

$$h : x \in B^d(\varepsilon) \mapsto (f_{d+1} \circ \phi^{-1}(x), \ldots, f_n \circ \phi^{-1}(x)) \in \mathbb{R}^{n-d}.$$

Cela montre que (1) $\Rightarrow$ (2). Réciproquement, si M est le graphe d'une telle application h, alors

$$f : x \in B^d \mapsto (x_1, \ldots x_d, h(x)) \in \mathbb{R}^n$$

est une paramétrisation régulière de M, donc (2) $\Rightarrow$ (1).

Supposons à nouveau que M admet une paramétrisation régulière $f : B^d \to M$ avec $f(0) = p$ et que la matrice $[\partial f_i/\partial x_j(0)]_{1\leq i,j\leq d}$ est inversible. Le théorème d'inversion locale assure que

$$\phi : (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mapsto f(x) + (0, y) \in \mathbb{R}^n$$

est un difféomorphisme local puisque la différentielle à l'origine

$$D_0\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \\ 0 & \mathrm{I}_{n-d} \end{bmatrix}$$

est inversible. Comme $\phi(y = 0) = M$, on en déduit (1) $\Rightarrow$ (4).

Réciproquement si $M = \phi(y = 0)$ est localement l'image du sous-espace $(y_1 = \ldots = y_{n-d} = 0)$ par un difféomorphisme ϕ, alors

$$f : x \in B^d \mapsto \phi(x, 0) \in M \subset \mathbb{R}^n$$

est une paramétrisation régulière de M, donc (4) $\Rightarrow$ (1).

Soit $g : x \in V \subset \mathbb{R}^n \mapsto (g_{d+1}(x), \ldots, g_n(x)) \in \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion telle que $p \in M = g^{-1}(0)$. Puisque D_pg est surjective, on peut supposer (quitte à changer l'ordre des x_j) que la matrice $[\partial g_i/\partial x_j(0)]_{d+1\leq i,j\leq n}$ est inversible. Il résulte du théorème des fonctions implicites qu'il existe une application lisse $h : B^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $g^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \,;\, y = h(x)\}$, donc (3) $\Rightarrow$ (2).

Réciproquement si M est le graphe de $h : B^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ alors $M = g^{-1}(0)$ où

$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^n \mapsto (y_1 - h_1(x), \ldots, y_{n-d} - h_{n-d}(x)) \in \mathbb{R}^{n-d}$$

est une submersion. Il s'ensuit que (2) $\Rightarrow$ (3). $\square$

Définition 3.1.2. *Une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $d \in [1, n]$ est un ensemble M qui vérifie l'une des propriétés équivalentes ci-dessus.*

Exemple 3.1.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La sphère unité*

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ *de dimension* n*. Vous pouvez le justifier en vérifiant par exemple que* 1 *est une valeur régulière de la fonction*

$$f : x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto ||x^2|| \in \mathbb{R},$$

donc $S^n = f^{-1}(1)$ *vérifie le troisième item de la Proposition 3.1.1.*

Exemple 3.1.4. *L'ensemble des matrices symétriques réelles*

$$\mathrm{Sym(n, \mathbb{R})} := \{\mathrm{A} \in \mathcal{M}(\mathrm{n}, \mathbb{R}) \,|\, {}^{\mathrm{t}}\mathrm{A} = \mathrm{A}\}$$

est une sous-variété de dimension $n(n+1)/2$ *de* $\mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$*. Cela résulte aisément du premier item de la Proposition 3.1.1 puisque* $\mathrm{Sym(n, \mathbb{R})}$ *admet la paramétrisation linéaire qui associe aux* $n(n+1)/2$ *coefficients*

$$a_{ij},\ 1 \leq i \leq n, i \leq j \leq n,$$

la matrice (a_{ij}) *dont les coefficients pour* $j < i$ *sont définis par* $a_{ij} = a_{ji}$*.*

Plus généralement tout sous-espace vectoriel de dimension d *de* $\mathbb{R}^n$ *est une sous-variété de dimension* d*.*

3.1.2 Espace tangent

L'espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est défini comme pour le cas des courbes et des surfaces par :

Définition 3.1.5. *Soit* $M \subset \mathbb{R}^n$ *une sous-variété et* $p \in M$*. On note* T_pM *l'espace tangent à* M *en* p*, constitué des vecteurs* $p + v \in \mathbb{R}^n$ *tels qu'il existe une courbe* $\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to M$ *tracée sur* M *avec*

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v.$$

L'espace tangent T_pM est clairement un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension égale à celle de M. Nous laissons le lecteur démontrer dans l'Exercice 116 qu'il peut également être défini ainsi :

Proposition 3.1.6. *Soit* $M \subset \mathbb{R}^n$ *une sous-variété de dimension* d *et* $g : V_p \to \mathbb{R}^{n-d}$ *une submersion définie dans un voisinage* V_p *de* $p \in M$*, telle que* $V_p \cap M = g^{-1}(g\{p\})$*. Alors*

$$T_pM = p + \ker D_pg.$$

Étant donnée $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension d, on note

$$TM = \cup_{p \in M} T_p^{vect}M = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \,|\, v \in T_p^{vect}M\},$$

où $T_p^{vect}M$ désigne la partie vectorielle de T_pM.

Lemme 3.1.7. *L'ensemble TM est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de dimension $2d$. On l'appelle le fibré tangent.*

Démonstration. Le fibré tangent est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \,|\, p \in M \text{ et } v \in T_p^{vect} M\}.$$

Ecrivons localement M sous-forme d'un graphe,

$$M \cap V_p = \{(x, y) \in B^d \times \mathbb{R}^{n-d} \,|\, y = h(x)\},$$

où $h = (h_1, \ldots, h_{n-d})$ est une application lisse des d variables $x = (x_1, \ldots, x_d)$. L'espace tangent $T_p^{vect} M$ au point $p = (x, h(x))$ est l'espace vectoriel engendré par les d vecteurs tangents

$$\left(1, 0, \ldots, 0, \frac{\partial h_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h_{n-d}}{\partial x_1}\right), \ldots, \left(0, 0, \ldots, 1, \frac{\partial h_1}{\partial x_d}, \ldots, \frac{\partial h_{n-d}}{\partial x_d}\right).$$

En notant $T_1(x), \ldots T_d(x)$ ces vecteurs tangents, on en déduit une paramétrisation locale régulière de TM,

$$TM \cap (V_p \cap \mathbb{R}^n) = \varphi(B^d \times \mathbb{R}^d)$$

où

$$\varphi : (x, \lambda) \in B^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \left(x, h(x), \sum_{i=1}^{d} \lambda_i T_i(x)\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

□

Vous étudierez dans le module de Topologie (différentielle) la notion de fibré vectoriel sur une variété. Le fibré tangent et son dual, le fibré cotangent, sont les exemples les plus importants. Les sections du premier, i.e. les applications différentiables,

$$X : M \to TM$$

qui associent à chaque $p \in M$ un élément $X(p)$ de son espace tangent T_pM sont les *champs de vecteurs*. Les sections du second sont les *formes différentielles*.

3.1.3 Applications différentiables

Définition 3.1.8. *Soit $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ des sous-variétés et $f : M_1 \to M_2$ une application continue. On dit que f est différentiable si pour toute paramétrisation locale $\varphi : U \subset \mathbb{R}^d \to M_1$, la fonction*

$$f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^m$$

est différentiable.

Il est clair que la définition ne dépend pas du choix de la paramétrisation locale (φ, U). Une définition alternative utile est fournie par le résultat suivant :

Lemme 3.1.9. *Soit $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ des sous-variétés. Une application continue $f : M_1 \to M_2$ est différentiable si et seulement si elle est localement la restriction d'une application différentiable $F : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

Démonstration. Ecrivons localement M_1 sous forme du graphe d'une fonction de d variables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-d}$,

$$M_1 \cap V_p = \{(x, y) \in B^d \times \mathbb{R}^{n-d} \,|\, y = h(x)\}.$$

On lui associe la paramétrisation locale,

$$x \in B^d \mapsto \varphi(x) = (x, h(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Si f est (localement) la restriction à M_1 d'une application différentiable F d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, alors

$$x \mapsto f \circ \varphi(x) = F(x, h(x))$$

est différentiable, comme composée de fonctions différentiables.

Réciproquement on écrit localement M_1 comme l'image (d'une partie) du plan de coordonnées $(x_{d+1} = \cdots = x_n = 0)$ par un difféomorphisme local ψ. On note p la projection sur les d premières coordonnées,

$$p : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0)$$

et $P = \psi \circ p \circ \psi^{-1}$ la projection correspondante sur M. L'application $F = f \circ P$ est une extension différentiable de f. □

On vérifie aisément que la différentielle d'un tel prolongement F au voisinage d'un point $p \in M_1$ envoie un vecteur tangent $v \in T_pM_1$ linéairement sur un vecteur tangent de $T_{f(p)}M_2$, de façon indépendante du choix de l'extension. Cela permet de définit la différentielle de f en p,

$$D_pf : T_pM_1 \to T_pM_2.$$

Définition 3.1.10. *Soit $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ des sous-variétés et $f : M_1 \to M_2$ une application différentiable. On dit que f est un difféomorphisme si f est bijective et admet un inverse différentiable.*

Notons que si $f : M_1 \to M_2$ est un difféomorphisme, alors M_1 et M_2 ont même dimension et pour tout $p \in M_1$, D_pf est un isomorphisme de T_pM_1 sur T_pM_2. Mais faites attention : vous vérifierez dans l'Exercice 139 que la réciproque est fausse.

Définition 3.1.11. *Soit $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ des sous-variétés. Une application différentiable $f : M_1 \to M_2$ est*

1. *une immersion si pour tout $p \in M_1$, $D_p f$ est injective ;*
2. *une submersion si pour tout $p \in M_1$, $D_p f$ est surjective ;*
3. *un plongement si c'est une immersion et un homéomorphisme sur son image.*

Vous étudierez dans les exercices des exemples ainsi que des critères pour établir qu'une application est un plongement.

Définition 3.1.12. *Soit $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ des sous-variétés et $f : M_1 \to M_2$ une application différentiable. On dit que*

1. *$p \in M_1$ est un point critique si $D_p f$ n'est pas surjective ;*
2. *$q \in M_2$ est une valeur critique de f si c'est l'image d'un point critique ;*
3. *$p \in M_1$ est un point régulier si $D_p f$ est surjective ;*
4. *$q \in M_2$ est une valeur régulière de f si ce n'est pas une valeur critique.*

Notez que la définition n'est intéressante que lorsque $\dim M_1 \geq \dim M_2$.

Lemme 3.1.13. *Soit $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ des sous-variétés telles que $\dim M_1 \geq \dim M_2$. Soit $f : M_1 \to M_2$ une application différentiable. La préimage de toute valeur régulière de f est une sous-variété de dimension $\dim M_1 - \dim M_2$.*

Il s'agit d'une généralisation de l'item iii de la Proposition 3.1.1.

Démonstration. Soit $p \in M_1$ un point régulier de f et $q = f(p) \in M_2$ une valeur régulière. On note $d_i = \dim M_i$ et on fixe une paramétrisation $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{d_1} \to M_1$ de M_1 au voisinage de $p = \varphi(0)$.

On fixe également $\psi : (M_2, q) \to (\mathbb{R}^{d_2}, \psi(q))$ un difféomorphisme local au voisinage de q. Alors $\psi(q)$ est une valeur régulière de

$$F := \psi \circ f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}.$$

Il résulte de la Proposition 3.1.1 que $F^{-1}(F(0))$ est une variété de dimension $d_1 - d_2$. Il en va de même de

$$f^{-1}(q) = f^{-1}(f(p)) = \varphi(F^{-1}(F(0))).$$

□

3.2 Formes différentielles

3.2.1 Formes multilinéaires alternées

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 3.2.1. *On note $\Lambda^k(E)$ l'espace des formes k-linéaires alternées. Ce sont les applications multilinéaires $\alpha : E^k \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\alpha(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

s'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$. On note $\deg \alpha = k$ le degré de α.

En fait il suffit de supposer que $\alpha(x_1, \ldots, x_k) = 0$ lorsque $x_{i+1} = x_i$ et vous montrerez dans l'Exercice 121 que

$$\alpha(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(x_1, \ldots, x_k),$$

pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_k$, où Σ_k désigne le groupe symétrique sur k éléments et ε est la signature de la permutation $\sigma \in \Sigma_k$.

Remarque 3.2.2. *Pour $k = 1$ la condition d'antisymétrie est vide. L'espace des formes 1-linéaires alternées est simplement l'espace des formes linéaires sur E, i.e. $\Lambda^1(E) = E^*$.*

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\{e^1, \ldots, e^n\}$ sa base duale. On définit le produit extérieur des formes e^i par

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \varepsilon(\sigma) e^{i_1}(x_{\sigma(1)}) \cdots e^{i_k}(x_{\sigma(k)}).$$

Proposition 3.2.3. *Les formes $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ sont des k-formes alternées ; elles forment une base de l'espace $\Lambda^k(E)$ qui est donc de dimension $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.*

Nous laissons le lecteur démontrer ce fait dans l'Exercice 120. Vous vérifierez également qu'il n'existe pas de k-forme alternée non nulle lorsque $k \geq n + 1$ (voir Exercice 122).

Corollaire 3.2.4. *L'espace $\Lambda^n(E)$ est de dimension 1.*

Vous retrouvez ici la définition originale du déterminant par rapport à une base fixée $(e_1, \ldots e_n)$: c'est l'unique forme n-linéaire alternée $\det \in \Lambda^n(E)$ telle que $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Si on décompose n vecteurs dans cette base, $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, le caractère n-linéaire alterné donne alors

$$\det(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

Définition 3.2.5. *Orienter E c'est choisir l'une des deux composantes connexes de $\Lambda^n(E) \setminus \{0\}$.*

Exemple 3.2.6. *Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, on note $dx_1, \dots, dx_n$ la base duale de la base canonique. Toute forme n-linéaire alternée est un mutliple de la n-forme $dx_1 \wedge \cdots dx_n$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire alors*

$$f^* dx_1 \wedge \cdots dx_n = \det f \, dx_1 \wedge \cdots dx_n.$$

Fin C10 2015

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 3.2.7. *On définit $\Lambda : \Lambda^k(E) \times \Lambda^\ell(E) \to \Lambda^{k+\ell}(E)$, le produit extérieur de formes multilinéaires alternées par*

$$\alpha \wedge \beta(x_1, \dots, x_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k \times \Sigma_\ell} \frac{\varepsilon(\sigma)}{k!\ell!} \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \beta(x_{\sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma(k+\ell)}).$$

Nous résumons certaines propriétés de ce produit extérieur dans la proposition suivante :

Proposition 3.2.8. *Le produit extérieur est associatif. Il commute avec les isomorphismes et vérifie*

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{\deg \alpha \cdot \deg \beta} \alpha \wedge \beta.$$

Démonstration. A faire en Exercice 123. □

Vous vérifierez que si $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+\ell}$ dont des 1-formes, alors cette notation est cohérente avec celle utilisée plus haut, car

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \wedge (\alpha_{k+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{k+\ell}) = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{k+\ell}.$$

Notez également que ce produit extérieur correspond au produit vectoriel lorsque $n = 3$ et $E = \mathbb{R}^3$.

3.2.2 Formes différentielles

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une forme différentielle α de degré k dans U est la donnée en tout point $x \in U$ d'une k-forme linéaire alternée, qui dépend de façon lisse de x. Concrètement,

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

où les $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ sont des fonctions lisses. Par convention, les formes différentielles de degré 0 sont les fonctions lisses.

Soit à présent M une variété différentielle (dans un premier temps M est une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^n$, mais vous noterez que les définitions sont indépendantes du plongement).

Définition 3.2.9. *Une forme différentielle α de degré k sur M est la donnée, sur chaque espace tangent T_xM d'une k-forme linéaire alternée, qui dépend de façon lisse de x.*

On note $\Omega^k(M)$ l'espace des k-formes différentielles sur M. L'espace $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions lisses sur M.

On définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ de formes différentielles, en considérant le produit extérieur $\alpha(x) \wedge \beta(x)$ des formes multilinéaires alternées sur les espaces tangents T_xM.

Proposition 3.2.10. *Le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ d'une k-forme différentielle α et d'une ℓ-forme différentielle β sur M est une $(k+\ell)$-forme différentielle. Si γ est une troisième forme différentielle alors :*

1) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \cdot \deg \beta} \beta \wedge \alpha$;

2) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$;

3) si $f : N \to M$ est une application différentiable, alors $f^*\alpha$ (resp. $f^*\beta$) est une k-forme (resp ℓ-forme) différentielle sur N. De plus

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

Démonstration. Ces propriétés résultent des propriétés correspondantes pour les applications multilinéaires. □

3.2.3 Différentielle extérieure

Soit M une variété différentielle.

Proposition 3.2.11. *Il existe une application linéaire $d : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ unique telle que*

1. *d envoie $\Omega^k(M)$ sur $\Omega^{k+1}(M)$;*
2. *$d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ coincide avec la différentiation des fonctions ;*
3. *$\forall (\alpha, \beta) \in \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M)$, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \beta$;*
4. *$d \circ d = 0$.*

Démonstration. On commence par observer qu'une telle application est nécessairement locale : si α est une forme qui s'annule dans un ouvert U, alors $d\alpha$ s'annule dans U. En effet soit χ une fonction lisse identique à 1 à l'extérieur de U et qui s'annule au voisinage d'un point $x \in U$. Alors $\alpha = \chi\alpha$, donc la propriété (3) implique $d\alpha = d\chi \wedge \alpha + \chi d\alpha$, ce qui implique $d\alpha(x) = 0$.

On peut donc travailler dans une carte et se ramener à la construction de d dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ une forme différentielle de degré k. Les propriétés (3) et (4) impliquent

$$d\alpha = \sum d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Le terme de droite étant déterminé de façon unique par la propriété (2), on en déduit l'unicité de d.

Nous montrons à présent l'existence de d. La formule précédente définit $d\alpha$ dans n'importe quelle carte, donc globalement puisque d est une application locale. Les deux premières propriétés sont clairement satisfaites. Par linéarité il suffit de vérifier (3) pour des formes $\alpha = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ et $\beta = g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$. Comme

$$\alpha \wedge \beta = fg\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k},$$

la règle de Leibnitz donne

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\ &= (gdf + fdg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\ &= df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge g\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\ &+ (-1)^k f\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dg \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Il suffit également de démontrer la propriété (4) pour une forme $\alpha = f\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Il vient, en notant $f_j = \partial f / \partial x_j$ et $f_{j\ell} = \partial^2 f / \partial x_j \partial x_\ell$,

$$\begin{aligned} d^2\alpha &= d(df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{j=1}^{n} d\left(f_j\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} d\left(f_j\right) \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{j,\ell=1}^{n} f_{j\ell} dx_\ell \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= -\sum_{j,\ell=1}^{n} f_{j\ell} dx_j \wedge dx_\ell \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = 0, \end{aligned}$$

puisque $dx_j \wedge dx_\ell = -dx_\ell \wedge dx_j$ tandis que $f_{j\ell} = f_{\ell j}$. □

Définition 3.2.12. *L'unique application linéaire de la Proposition 3.2.11 s'appelle la différentielle extérieure.*

3.2.4 Intégration des formes différentielles

Intégration des 1-formes différentielles

Soit M une variété différentielle et $\alpha \in \Omega^1(M)$ une 1-forme différentielle. Si $x \in M$, alors $\alpha(x) \in T_x^* M$ est une forme linéaire qui associe un scalaire $\alpha(x) \cdot v$ à un vecteur tangent $v \in T_x M$. Soit $\gamma : I \to M$ une courbe paramétrée régulière tracée sur M.

Définition 3.2.13. *L'intégrale de α le long de γ est*

$$\int_\gamma \alpha := \int_{t\in I} \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Il est entendu ici que l'on intègre sur un intervalle compact, ou bien que l'on prend la limite (au sens de l'intégrale de Lebesgue) des intégrales sur une suite exhaustive de compacts.

Lemme 3.2.14. *Soit $\phi : J \to I$ un difféomorphisme croissant, i.e. un changement admissible de paramétrisation qui préserve le sens de parcours de la courbe $\Gamma = \gamma(I)$. Soit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : J \to M$. Alors*

$$\int_{\tilde{\gamma}} \alpha = \int_\gamma \alpha.$$

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de changement de variables. Comme $\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\phi(t))\phi'(t)$, il vient

$$\int_{t\in J} \alpha(\tilde{\gamma}(t))\cdot\tilde{\gamma}'(t)dt = \int_{t\in J} \alpha(\gamma(\phi(t)))\cdot\tilde{\gamma}'(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{t\in I} \alpha(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt.$$

□

Notez par contre que le signe de l'intégrale change si l'on change le sens de parcours de la courbe $\Gamma = \gamma(I)$. On peut donc définir l'intégrale $\int_\Gamma \alpha$ de α le long d'une *courbe géométrique compacte orientée* Γ.

Définition 3.2.15. *Une courbe géométrique Γ est orientée si l'on choisit de façon continue une orientation de $T_p\Gamma$, $p \in \Gamma$.*

Lorsque Γ est paramétrée, fixer une orientation revient à fixer un sens parcours de la courbe. Toutes les courbes (sous-variétés de dimension 1) sont orientables. Il n'en n'est pas de même en dimension plus grande, comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent, dans le cas des surfaces.

Pour définir $\int_\Gamma \alpha$, on utilise une *partition de l'unité* : on fixe un recouvrement de Γ par un nombre fini d'ouverts $(U_i)_{1\leq i\leq s}$ tels que $\Gamma \cap U_i$ est paramétrée. On considère (voir Exercice 134) une famille (χ_i) de fonctions lisses à support compact dans les U_i telles que $\sum_{i=1}^s \chi \equiv 1$ et on pose

$$\int_\Gamma \alpha := \sum_{i=1}^s \int_{\Gamma\cap U_i} \chi_i\alpha.$$

Nous laissons le lecteur vérifier en Exercice 134 que cette définition est indépendante du choix des U_i et des χ_i.

Intégration des formes volumes

Soit $f : M \to N$ une application lisse entre deux variétés différentielles. Soit α une n-forme différentielle sur N. Alors $f^*\alpha$ est une n-forme différentielle sur M définie par

$$(f^*\alpha)_p(v_1, \dots, v_n) = \alpha_{f(p)}(d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_n)).$$

Nous laissons le lecteur vérifier cela dans l'Exercice 133.

Définition 3.2.16. *Soit V est une variété de dimension n admettant la paramétrisation régulière $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to V$. Soit α une n-forme différentielle sur V. On définit*

$$\int_V \alpha := \int_U \alpha_{\varphi(x)}(d_x\varphi(e_1), \dots, d_x\varphi(e_n))dx = \int_U \varphi^*\alpha,$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Une n-forme différentielle dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$h(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

où h est une fonction lisse. Si $f : U' \to U$ est un difféomorphisme alors

$$f^*(h(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \mathrm{Jac}(f) \cdot h \circ f \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

où $\mathrm{Jac}(f)$ désigne le jacobien de f. Lorsque ce dernier est positif, la formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^n$ assure ainsi que

$$\int_U \varphi^*\alpha = \int_{U'} (\varphi \circ f)^*\alpha,$$

c'est à dire que, comme dans le cas des 1-formes, $\int_V \alpha$ dépend de l'*orientation*[2] de V mais pas de la paramétrisation φ :

Définition 3.2.17. *Soit V une variété différentielle compacte orientée de dimension n et soit α une n-forme différentielle sur V. Soit $(U_i)_i$ un recouvrement ouvert fini tel que $U_i \cap V$ est paramétrée, et soit (χ_i) une partition de l'unité. On pose*

$$\int_V \alpha := \sum_i \int_{V \cap U_i} \chi\alpha.$$

Nous laissons le lecteur vérifier que cette définition ne dépend pas des choix qui ont été faits. Nous encourageons également le lecteur, dans une deuxième lecture, à vérifier que ces notions s'étendent au cas des variétés abstraites, en remplaçant le mot *paramétrisation* par *carte*.

La formule de changement de variables s'exprime à présent ainsi :

2. Voir section 3.3.4 pour la définition d'une variété orientable : c'est la généralisation naturelle de celle que nous avons vue pour les surfaces.

Théorème 3.2.18. *Soit M, N deux variétés différentielles orientées de dimension n. Soit $f : M \to N$ un difféomorphisme qui préserve l'orientation. Soit α une n-forme différentielle sur N, alors*

$$\int_M f^*\alpha = \int_N \alpha.$$

Théorème de Stokes

Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. Un théorème d'intégration que vous connaissez depuis de nombreuses années est la formule

$$\int_I df = \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) = \int_{\partial I} f.$$

Notez que l'on impose implicitement un sens de parcours de l'intervalle I et un sens de parcours induit de son bord $\partial I = \{b\} - \{a\}$ (qui n'est pas connexe). Cette formule fondamentale se généralise ainsi :

Théorème 3.2.19. *Soit M une variété différentielle orientée de dimension n à bord ∂M. Soit η une $(n-1)$-forme sur M à support compact. Alors*

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} i^*\eta,$$

où $i^*\eta$ désigne la trace de η sur le bord de M.

Le bord ∂M est ici muni de l'orientation induite par celle de M. La démonstration du théorème de Stokes est relativement élémentaire, elle se ramène à une intégration par parties en une variable réelle. La vraie difficulté est en fait de donner un sens précis à l'énoncé : qu'est-ce qu'une variété à bord (pensez à la boule unité $M = B^n$ et la sphère unité $\partial M = S^{n-1}$) ? qu'est-ce que l'orientation induite ? Qu'est-ce que la trace $i^*\eta$? Nous renvoyons le lecteur au livre [Warner] pour plus de détails.

Fin C11 2015

3.3 Variétés abstraites

Les sous-variétés différentielles de $\mathbb{R}^n$ sont les analogues non-linéaires des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Comme en algèbre linéaire, il est très utile de s'affranchir de l'espace ambiant et de définir la notion de variété différentielle abstraite, même si celles-ci peuvent (au final) être plongées dans $\mathbb{R}^n$.

3.3.1 Variétés topologiques

Définition 3.3.1. *Un espace topologique séparé M à base dénombrable est une variété topologique de dimension n si tout point $p \in M$ a un voisinage ouvert V_p homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

On parle également de variété $\mathcal{C}^0$, ou d'espace localement euclidien. Rappelons qu'une base d'un espace topologique est une collection d'ouverts telle que tout ouvert de l'espace s'écrit comme réunion des éléments de la base. Cette hypothèse a de nombreuses conséquences.

On appelle dimension topologique de M l'entier n. Elle est bien définie (i.e. V_p ne peut pas être homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $p \neq n$) grâce au théorème de Brouwer [3].

Nous listons sans démonstration quelques unes des propriétes d'une variété topologique M :

1. il y a au plus un nombre dénombrable de composantes connexes ;
2. la topologie est métrisable ;
3. il existe des partitions de l'unité ;
4. tout ouvert de M est une variété topologique de même dimension ;
5. M est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs ;
6. M est localement compacte.

Définition 3.3.2. *Un couple (U, φ) où U est un ouvert de M et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ s'appelle une carte de M.*

Une collection de cartes (U_i, φ_i) qui recouvrent M est appelé un atlas (topologique) de M.

Définition 3.3.3. *Soit M une variété topologique. Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes telles que $U \cap V \neq \emptyset$, l'application*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

est un homéomorphisme appelé changement de carte, ou fonction de transition.

3.3.2 Variétés différentielles

Définition 3.3.4. *On dit qu'un atlas est différentiable si les changements de cartes sont des difféomorphismes.*

On dit qu'une carte (U, φ) est compatible avec un atlas différentiable (U_i, φ_i) si les changements de coordonnées $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ sont différentiables sur leurs domaines de définition.

On dit que deux atlas différentiables sont compatibles si chaque carte de l'un est compatible avec l'autre atlas. Notez que la réunion de deux atlas différentiables compatibles est encore un atlas différentiable. Chaque atlas différentiable est donc contenu dans un unique atlas différentiable *maximal* (la réunion de tous les atlas différentiables compatibles avec lui).

3. Luitzen Egbertus Jan Brouwer, mathématicien hollandais (1881-1966).

Définition 3.3.5. *Une structure différentiable sur une variété topologique M est la donnée d'un atlas différentiable maximal.*

Une variété différentielle de dimension n est une variété topologique de dimension n munie d'une structure différentiable.

Exemple 3.3.6.

1) L'exemple modèle est bien entendu $\mathbb{R}^n$ muni de l'atlas maximal à une carte $(\mathbb{R}^n, \varphi)$ où $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x \in \mathbb{R}^n$ est l'identité.

2) Toute surface régulière de $\mathbb{R}^3$ muni de l'atlas associé à une famille de paramétrisations régulières.

3) On considère $M = \mathbb{R}$ muni des deux atlas à une carte $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ et $(\mathbb{R}, \varphi_2)$ où

$$\varphi_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}.$$

Ces deux atlas ne sont pas compatibles et induisent donc deux structures différentiables distinctes pour $\mathbb{R}$. Celles-ci sont cependant difféomorphes (Exercice 127).

Exemple 3.3.7. *Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une variété différentielle (pour la structure différentielle "canonique"). Le groupe linéaire*

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, c'est donc une variété différentielle de dimension n^2.

Plus généralement, toute sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (telle que définie plus haut) est une variété différentielle (vous le démontrerez dans l'Exercice 128). Une *surface* est une variété de dimension deux. On peut montrer (théorème de Whitney) que toute surface abstraite se plonge

- soit dans $\mathbb{R}^3$ (cf chapitre 3 de ce cours)
- soit dans $\mathbb{R}^4$.

De même toute variété abstraite de dimension n peut se plonger dans $\mathbb{R}^{2n}$. La borne sur la dimension est optimale, on verra des exemples de surfaces compactes (bouteille de Klein, plan projectif réel) qui ne peuvent pas être réalisées comme des surfaces compactes de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.3.8. *L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui passent par l'origine. Une telle droite est définie par un vecteur directeur non nul $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$: la droite est alors l'ensemble*

$$\{(tx_0, \ldots, tx_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Deux vecteurs directeurs d'une même droite sont équivalents pour la relation d'équivalence "multiplication par un réel non nul", on note

$$[x_0 : \cdots : x_n] := \{(tx_0, \ldots, tx_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$

la classe d'équivalence correspondante : c'est la droite privée de l'origine. Il s'ensuit que l'espace projectif réel est un quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{[x]\} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{R}^*.$$

On le munit de la topologie quotient : un ensemble U de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est ouvert ssi $\pi^{-1}U$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est la projection canonique. Nous laissons le lecteur vérifier que cette topologie est métrisable, ainsi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une variété topologique de dimension n.

On définit un atlas différentiel comme suit. On recouvre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ par $(n+1)$ cartes (U_i, φ_i), $0 \leq i \leq n$, où

$$U_i = \{[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \,|\, x_i \neq 0\}$$

et

$$\varphi_i : [x] \in U_i \mapsto (x_0/x_i, \ldots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \ldots, x_n/x_i) \in \mathbb{R}^n.$$

Le lecteur vérifiera sans peine que les fonctions de transition $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont lisses (là où elles sont définies) : leurs fonctions coordonnées sont des fractions rationnelles simples dont les dénominateurs ne s'annulent pas.

3.3.3 Applications différentiables

Tout le calcul différentiel local peut être transféré aux variétés, en composant avec des cartes locales (à la source et au but). Nous reprenons brièvement ici quelques unes des notions essentielles.

Difféomorphismes

Soit M, N deux variétés différentielles de dimension m, n et $f : M \to N$ une application continue. Soit $p \in M$ et (U, φ) et (V, ψ) des cartes de M, N au voisinage de $p, f(p)$. L'application

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

est différentiable si et seulement si il en est de même de toute autre application $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ associée à des cartes $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ et $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$: cela résulte aisément de ce que les changements de carte sont des difféomorphismes.

Définition 3.3.9. *Soit M, N deux variétés différentielles de dimension m, n et $f : M \to N$ une application continue.*

L'application f est différentiable si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable pour toutes cartes (U, φ) et (V, ψ) de M, N. On dit que f est un difféomorphisme si de plus f est bijective et $f^{-1} : N \to M$ est différentiable.

Lorsque $N = \mathbb{R}$, on parle plutôt de fonction (à valeurs réelles) différentiable. Lorsque $M = I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, on obtient la notion de courbe (paramétrée) tracée sur N.

Toute propriété locale invariante par difféomorphisme a un sens sur une variété différentielle. Indiquons par exemple :

Définition 3.3.10. *Soit M, N deux variétés. Une application différentiable $f : M \to N$ est*

1. *une immersion si pour tout $p \in M$, $D_p f$ est injective ;*
2. *une submersion si pour tout $p \in M$, $D_p f$ est surjective ;*
3. *un plongement si c'est une immersion et un homéomorphisme sur son image.*

De la même façon, on dira qu'un sous-ensemble V d'une variété différentielle M (de dimension n) est une *sous-variété* différentielle, si et seulement si pour toute carte (U, φ) de M, $\varphi(U \cap V)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Vous vérifierez que les fibres $f^{-1}(q)$ d'une submersion sont des variétés (lorsque q est dans l'image de l'application f) et qu'une immersion envoie un petit voisinage ouvert sur une variété.

Remarque 3.3.11. *Un célèbre résultat de Whitney assure que l'on peut plonger toute variété différentielle M de dimension n dans $\mathbb{R}^{2n}$, i.e. il existe un plongement $f : M \to \mathbb{R}^{2n}$. Cela permet de réaliser une telle variété abstraite comme une sous-variété $f(M)$ de $\mathbb{R}^{2n}$, puisque M et $f(M)$ sont difféomorphes.*

Vous montrerez dans Exercice 130 le résultat plus facile suivant : toute variété différentielle compacte se plonge dans $\mathbb{R}^N$ pour N assez grand.

Fibré tangent et champs de vecteurs

L'espace tangent est l'ensemble des vecteurs tangents aux courbes tracées sur la variété :

Définition 3.3.12. *Soit M une variété différentielle et $p \in M$.*

1) Deux courbes $\gamma_1, \gamma_2 :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to M$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ sont dites équivalentes si pour toute carte (φ, U) de M au voisinage de $p \in M$, on a $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$. On appelle vecteur tangent à p en M la classe d'équivalence de telles courbes.

2) L'espace tangent T_pM est l'ensemble des vecteurs tangents à M en p.

Notez qu'il suffit de vérifier l'égalité $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ pour une seule carte (U, φ). Une telle carte identifie T_pM à $\mathbb{R}^n$, où $n = \dim M$. Un changement de carte donne une identification qui diffère de la première par un isomorphisme (la différentielle du changement de carte), ainsi T_pM a une structure d'espace vectoriel réel de dimension n.

Lemme 3.3.13. *Soit M, N deux variétés différentielles et $f : M \to N$ une application différentiable.*

1) L'application f induit une application linéaire $D_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ appelée la différentielle de f en p.

2) Si f est une immersion surjective, alors pour tout $p \in M$,

$$T_{f(p)} N = \mathrm{Im}\, \mathrm{D_p f}.$$

3) Si f est une submersion, alors pour tout $q \in f(M)$, $M_q := f^{-1}(q)$ est une sous-variété de M telle que pour tout $x \in M_q$,

$$T_x M_q = \ker D_x f.$$

Notez en particulier que si $V \subset M$ est une sous-variété de M alors $T_p V$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $T_p M$.

Démonstration. On utilse des cartes locales pour M au voisinage d'un point p, et N au voisinage de $f(p)$ pour se ramener au cas des sous-variétés de $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{R}^n$) qui a déjà été traité. □

Nous avons observé que la réunion TM des espaces tangents à une sous-variété M de dimension n de $\mathbb{R}^N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{N^2}$ de dimension n^2. Il en va de même pour une variété abstraite M. Considérons

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M = \{(p, v) \mid p \in M \text{ et } v \in T_p M\}$$

et

$$\pi : (p, v) \in TM \to p \in M$$

la projection canonique sur M.

On munit le *fibré tangent* TM d'une structure différentielle comme suit. Si (φ, U) est une carte pour M, on considère la carte $(D\varphi, \pi^{-1} U)$ de TM définie par

$$D\varphi(p, v) = (\varphi(p), D_p \varphi(v)).$$

Nous laissons le lecteur vérifier que les fonctions de transition de l'atlas correspondant sont bien lisses.

Définition 3.3.14. *Soit M une variété différentielle. Un champ de vecteurs est une section lisse du fibré tangent TM, i.e. une application différentiable $X : M \to TM$ telle que $\pi \circ X = \mathrm{Id}$.*

Autrement dit pour tout $p \in M$, $X(p) \in T_p M$ est un vecteur tangent à M en p, et l'application $p \mapsto X(p)$ est lisse.

Il y aurait beaucoup de choses à dire sur les champs de vecteurs (lien avec les dérivations, crochet de Lie, flots associés, etc). Nous renvoyons le lecteur intéressé au module de Topologie différentielle.

Fibré cotangent et formes différentielles

Le fibré cotangent est l'ensemble des espaces tangents duaux :

Définition 3.3.15. *Soit M une variété différentielle de dimension d. Le fibré cotangent est*

$$T^*M := \cup_{p\in M} T_p^*M.$$

Nous laissons le lecteur vérifier que T^*M admet une structure de variété différentielle de dimension $2d$. On note

$$\tilde{\pi} : (p, \xi) \in T^*M \mapsto p \in M$$

la projection canonique.

Définition 3.3.16. *Soit M une variété différentielle de dimension d. Une section lisse $\alpha : M \to T^*M$ de $\tilde{\pi}$ est une 1-forme différentielle.*

On note $\Omega^1(M)$ l'espace des 1-formes différentielles.

Nous laissons le lecteur vérifier que cette définition coincide bien avec celle utilisée dans le cadre des variétés plongées dans $\mathbb{R}^n$. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse alors pour tout $p \in M$, la différentielle

$$d_pf : T_pM \to \mathbb{R} \simeq T_{f(p)}\mathbb{R}$$

est une forme linéaire sur l'espace tangent T_pM, donc

$$df : p \in M \mapsto d_pf \in T_p^*M \subset T^*M$$

est une section lisse de T^*M.

Définition 3.3.17. *Une 1-forme différentielle est exacte si c'est la différentielle d'une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$.*

Une 1-forme différentielle α n'est pas nécessairement exacte. Une condition nécessaire est que α soit *fermée*, i.e. $d\alpha = 0$. Toute 1-forme différentielle fermée est localement exacte (lemme de Poincaré, cf Exercice 132). L'être mathématique qui décrit l'obstruction pour une 1-forme différentielle fermée d'être globalement exacte est un groupe : c'est le premier *groupe de cohomologie de de Rham*[4] de la variété M.

On peut étendre au contexte des variétés abstraites le produit extérieur, la différentielle extérieure, et toutes les opérations rencontrées dans le cadre des variétés plongées. Nous noterons comme précédemment $\Omega^k(M)$ les formes différentielles de degré k. Dans la section suivante, nous faisons le lien entre la notion de variété orientable et l'existence de certaines formes différentielles de degré maximal.

4. Georges de Rham (1903-1990), mathématicien et alpiniste suisse, spécialiste de topologie différentielle.

3.3.4 Variétés orientables

Rappelons qu'une base orthonormée du plan $\mathbb{R}^2$ est directe si et seulement si les vecteurs forment un angle $+\pi/2$ (elle est indirecte lorsque l'angle vaut $-\pi/2 = 3\pi/2 \bmod 2\pi$). Dans $\mathbb{R}^3$, on décrète qu'une base orthonormée est directe par la règle des trois doigts, etc.

Plus généralement si E est un espace euclidien de dimension finie, deux bases orthonormées sont images l'une de l'autre par une isométrie, dont le déterminant peut valoir $+1$ ou -1. Fixer une orientation, c'est choisir une classe d'équivalence de bases orthonormées de même signe.

Définition 3.3.18. *Soit M une variété différentielle. On dit que M est orientable si on peut choisir une orientation de chaque espace tangent de façon continue.*

De façon équivalente, M est orientable si et seulement si on peut choisir un atlas constitué de cartes à valeurs dans des espaces vectoriels orientés, telles que les changement de cartes préservent l'orientation.

Notez que cela correspond bien à la définition donnée au Chapitre 2 dans le cas des surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$. En effet, choisir de façon continue un vecteur normal à une surface S plongée dans $\mathbb{R}^3$ (muni de son orientation canonique), revient à choisir de façon continue une orientation des espaces tangents $T_p(S)$ en imposant que si (v_1, v_2) est une base de T_pS, la base $(v_1, v_2, N(p))$ est directe.

Un dernier point de vue équivalent utilise les formes différentielles de degré maximal (i.e. égal à la dimension de la variété) :

Proposition 3.3.19. *Soit M une variété différentielle de dimension n. Alors M est orientable si et seulement si il existe une n-forme différentielle sur M qui ne s'annule nulle part.*

Nous laissons la preuve en Exercice 135.

Exemple 3.3.20. *La sphère $S = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une variété orientable. En effet, on fixe une orientation de $\mathbb{R}^{n+1}$, on observe que $T_pS = p^\perp$ est l'orthogonal de p et on choisit l'orientation d'une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$ de $T_p(S)$ de sorte que $(v_1, \ldots, v_n, v)$ soit une base directe de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Comme le laisse penser la définition, les questions d'orientation sont subtiles et nous ne nous attarderons pas dessus. Mentionnons sans démonstration les faits remarquables suivants :

- Toute variété compacte connexe de dimension 1 est orientable.
- Toute hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n$ est orientable.
- Un produit de variétés orientables est orientable.

Vous vérifierez dans l'Exercice 129 qu'un produit de variétés différentielles admet une structure de variété différentielle. Comme le cercle unité S^1 est

orientable, il résulte de l'assertion ci-dessus que le tore

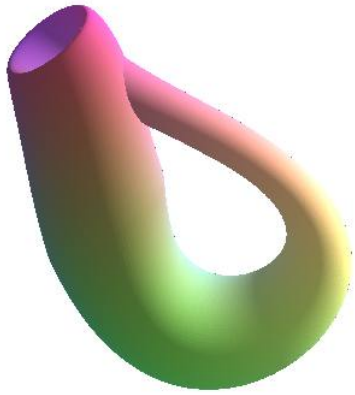
$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq (S^1)^n$$

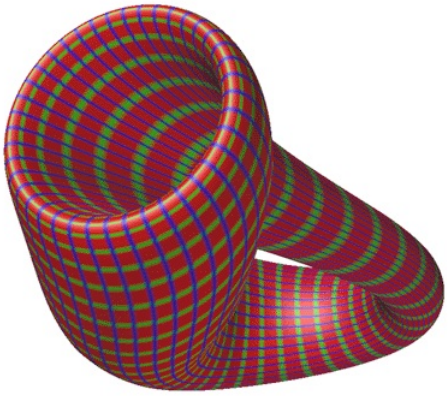
est une variété compacte orientable de dimension n.

Exemple 3.3.21. *Le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ n'est pas orientable. Cela peut se voir en observant qu'il contient un ouvert difféomorphe à la bande de Möbius. Le même argument s'applique à la bouteille de Klein (cf Exercice 145).*

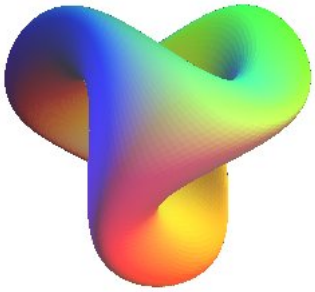
Plus généralement les espaces projectifs $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ne sont pas orientables lorsque n est pair (voir Exercice 147).

Il s'ensuit que le plan projectif et la bouteille de Klein sont des surfaces qui ne peuvent pas être réalisées (plongées) dans $\mathbb{R}^3$. On considère à la place des immersions pour les représenter dans $\mathbb{R}^3$. En voici deux pour la bouteille de Klein,





Et voici la *surface de Boy*, immersion du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^3$,



La surface de Boy peut être vue comme une sphère dont on a recollé deux à deux les points antipodaux. On peut également la construire en recollant le bord d'un disque sur le bord d'un ruban de Möbius.

Vous vérifierez dans les exercices que ces surfaces peuvent être plongées dans $\mathbb{R}^4$ (comme promis par le théorème de Whitney).

3.3.5 Variétés complexes

Soit M une variété différentielle de dimension paire $2n$. On identifie $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathbb{C}^n$ pour un choix de structure complexe. Un atlas (U_i, φ_i) est alors constitué d'ouverts U_i recouvrant M et d'homéomorphismes

$$\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}^n$$

à valeurs dans $\mathbb{C}^n$.

Définition 3.3.22. *On dit que l'atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ est holomorphe si les changements de carte $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont des biholomorphismes, i.e. des difféomorphismes holomorphes.*

Une application $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ est holomorphe si chacune de ses fonctions coordonnées $f_i : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, i.e. vérifie les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}_j} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Définition 3.3.23. *Une variété complexe M de dimension complexe $n = \dim_{\mathbb{C}} M$ est une variété topologique de dimension (réelle) $2n$ munie d'un atlas holomorphe maximal.*

Exemple 3.3.24. *Les ouverts de $\mathbb{C}^n$, les sous-variétés complexes de $\mathbb{C}^n$ sont des exemples de variétés complexes.*

Exemple 3.3.25. *L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ensemble des droites complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$ passant par l'origine, est une variété complexe compacte de dimension complexe n,*

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*.$$

Lorsque $n = 1$, on obtient la sphère de Riemann[5]*,*

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2.$$

Lemme 3.3.26. *Toute variété complexe de dimension complexe n est une variété différentielle réelle de dimension réelle $2n$ qui est orientable.*

Démonstration. La preuve se résume à observer que les jacobiens réels des changements de carte sont tous positifs : ce sont les modules au carré des jacobiens complexes. □

Réciproquement, toute surface différentiable réelle orientable admet une structure complexe (un atlas holomorphe maximal) : on parle alors de *surface de Riemann*. Vous étudierez cette notion dans le module d'Analyse Complexe.

5. Georg Friedrich Bernhard Riemann, mathématicien allemand très influent (1826-1866).

3.4 Groupes de Lie classiques

3.4.1 Définition

Définition 3.4.1. *Un groupe de Lie est une variété G munie d'une structure de groupe différentielle, i.e. telle que les opérations de multiplication*

$$(g_1, g_2) \in G \times G \mapsto g_1 \cdot g_2 \in G$$

et d'inversion

$$g \in G \mapsto g^{-1} \in G$$

sont lisses.

Exemples 3.4.2.

1. *Le groupe général linéaire $GL(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles inversibles de taille n. C'est un ouvert de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ (image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application déterminant qui est lisse), donc une variété réelle de dimension n^2. L'application $(A, B) \mapsto A \cdot B$ est lisse sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ donc sur $GL(n, \mathbb{R})$ également ; l'application $A \mapsto A^{-1}$ est lisse sur $GL(n, \mathbb{R})$ puisque l'inverse s'exprime de façon lisse par*

$$A^{-1} = \frac{{}^t ComA}{\det A},$$

où $ComA$ désigne la matrice des cofacteurs de A.

2. *De façon analogue, le groupe général linéaire $GL(n, \mathbb{C})$ est un groupe de Lie qui est une variété complexe de dimension n^2.*
3. *Le groupe orthogonal $O(n, \mathbb{R})$ est le sous-groupe fermé de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ défini par les conditions $A^t A = \mathrm{Id}$. Le lecteur vérifiera dans l'Exercice 153 que c'est une sous-variété réelle de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$.*
4. *Le groupe unitaire $U(n, \mathbb{C})$ est le sous-groupe fermé de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ défini par les conditions $A^t \overline{A} = \mathrm{Id}$. C'est une sous-variété réelle de dimension n^2, mais (attention !) ce n'est pas une sous-variété complexe.*

Dans la suite nous noterons K en lieu et place de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour éviter des répétitions inutiles.

Proposition 3.4.3. *Un groupe de Lie est une variété orientable.*

Démonstration. Soit G une groupe de Lie, on note e son élément neutre. On choisit une n-forme linéaire η sur $T_e G$ non nulle. La translation à droite de vecteur g, $h \in G \mapsto h + g \in G$, est un difféomorphisme qui induit un isomorphisme $g^* : T_g G \to T_e G$ entre espaces tangents. La n-forme linéaire $g^*\eta$ est non nulle et fournit une orientation de $T_g G$.

Il s'ensuit que $g \mapsto g^*\eta$ est une n-forme différentielle sur G qui ne s'annule nulle part et fournit donc une orientation de G. Notez que cette forme est invariante par translation. C'est la généralisation du cas $G = \mathbb{R}^n$ muni de $\eta(x) = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. □

Lemme 3.4.4. *L'application déterminant*

$$\det : A \in \mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$$

est telle que

$$\det(A + H) = \det A + \operatorname{tr}\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{ComA} \cdot \mathrm{H}\right) + \mathrm{o(H)},$$

où ComA *désigne la comatrice de* A.

Il s'ensuit que det *est une submersion au voisinage de chaque matrice* A *de rang* $\geq n - 1$, *en particulier au voisinage de* $A = \mathrm{Id}$.

Démonstration. Rappelons que l'ensemble des matrices inversibles est dense. Par continuité, il suffit donc d'établir cette identité lorsque $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Nous laissons le lecteur vérifier que

$$\det(\mathrm{Id} + K) = 1 + \mathrm{tr(K)} + \mathrm{o(K)}.$$

Comme $\det(A+H) = \det A \cdot \det(\mathrm{Id} + A^{-1}H)$ et $A^{-1} = (\det A)^{-1}\, {}^{t}\mathrm{ComA}$, il vient

$$\begin{aligned} \det(A + H) &= \det A \left\{1 + \operatorname{tr}\left(\det \mathrm{A}\right)^{-1} {}^{\mathrm{t}}\mathrm{ComA} \cdot \mathrm{H}\right)\right\} + o(H) \\ &= \det A + \operatorname{tr}\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{ComA} \cdot \mathrm{H}\right) + \mathrm{o(H)}. \end{aligned}$$

La différentielle du déterminant en A est donc $H \mapsto \operatorname{tr}\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{ComA} \cdot \mathrm{H}\right)$. Cette forme linéaire est surjective si et seulement si elle est non identiquement nulle, i.e. lorsque ${}^{t}\mathrm{ComA} \neq 0$. Cela revient à dire que l'un des mineurs de A d'ordre $n - 1$ est non nul, i.e. A est de rang $n - 1$ ou n. □

Corollaire 3.4.5. *Le groupe spécial linéaire*

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

des matrices carrées de taille n *et de déterminant* 1 *est une sous-variété de dimension* $n^2 - 1$ *de* $\mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. *Son espace tangent en* Id *est*

$$T_{\mathrm{Id}} SL(n, \mathbb{R}) = \{H \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})\,;\ \mathrm{tr}H = 0\}.$$

Démonstration. Comme det est une submersion au voisinage de Id, la Proposition 3.1.1 assure que $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1} \det(\{\mathrm{Id}\})$ est une hypersurface. □

3.4.2 L'application exponentielle

Etant donnée $A \in \mathcal{M}(n, K)$, on pose

$$\exp A := \sum_{j \geq 0} \frac{A^j}{j\,!}.$$

Cette série converge normalement sur toute partie bornée de l'espace de Banach $\mathcal{M}(n,K)$ muni d'une de ses normes. En effet comme celles-ci sont toutes équivalentes (dimension finie), on peut en choisir une qui est matricielle, i.e. vérifie $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$. Il s'ensuit que $||A^j|| \leq ||A||^j$ donc

$$\sum_{j\geq 0} \frac{||A^j||}{j\,!} \leq \sum_{j\geq 0} \frac{||A||^j}{j\,!} = \exp ||A|| < +\infty.$$

Le théorème de Cayley [6]-Hamilton [7] assure que A^n s'exprime en fonction des A^j, $0 \leq j \leq n-1$. L'exponentielle $\exp A$ est donc en fait un polynôme de degré $n-1$ en la matrice A. Attention cependant : les coefficients de ce polynôme dépendent bien sûr de la matrice A !

Nous résumons ici quelques propriétés importantes de cet opérateur :

Théorème 3.4.6. *L'application $A \in \mathcal{M}(n,K) \mapsto \exp A \in \mathcal{M}(n,K)$ est une application différentiable telle que $D_0 \exp = Id$. Elle vérifie*

1. $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$ *si* $AB = BA$ *;*
2. $\exp(-A) = \exp A^{-1}$ *;*
3. $\exp({}^tA) = {}^t \exp A$ *;*
4. $\det \exp A = \exp(\mathrm{tr} A)$ *;*
5. $\exp \mathcal{M}(n,\mathbb{C}) = GL(n,\mathbb{C})$ *;*

Démonstration. L'exponentielle dépend clairement de façon lisse de A. En développant

$$(A+H)^j = A^j + \sum_{\ell=0}^{j-1} A^{j-1-\ell} H A^\ell + o(H)$$

on obtient une formule (un peu) compliquée pour la différentielle de l'exponentielle. Celle-ci se simplifie lorsque A et H commutent, par exemple lorsque $A = 0$: il vient dans ce cas $(0+H)^j = H + o(H)$ si $j = 1$ et $= o(H)$ si $j \geq 2$ donc

$$\exp(0+H) = \mathrm{Id} + H + o(H).$$

On en déduit que $D_0 \exp = Id$. L'exponentielle réalise donc un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}(n,K)$ sur un voisinage de Id.

Plus généralement si A et B commutent, la formule du binôme s'applique

$$\frac{1}{j!}(A+B)^j = \sum_{\ell=0}^{j} \frac{1}{j!} \binom{j}{\ell} A^\ell B^{j-\ell} = \sum_{\ell=0}^{j} \frac{A^\ell}{\ell!} \frac{B^{j-\ell}}{(j-\ell)!}$$

d'où

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B.$$

6. Arthur Cayley (1821-1895), mathématicien anglais.
7. Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), physicien irlandais.

On en déduit que l'exponentielle d'une matrice A est une matrice inversible, avec $\exp A \cdot \exp(-A) = \exp(A - A) = \exp 0 = \mathrm{Id}$ donc $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

On montre de façon similaire que $\exp({}^tA) = {}^t \exp A$ et que pour toute matrice de changement de bases $P \in GL(n, K)$, on a

$$P \cdot \exp A \cdot P^{-1} = \exp(P \cdot A \cdot P^{-1}).$$

On peut donc trigonaliser A pour établir

$$\det \exp A = \exp(\mathrm{tr} A).$$

Il reste à établir la surjectivité de l'exponentielle sur $GL(n, \mathbb{C})$ (elle n'est pas injective, donnez quelques exemples). Etant donnée $B \in GL(n, \mathbb{C})$, il s'agit de construire $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ telle que $\exp A = B$. On peut décomposer $B = D + N$ avec D diagonalisable inversible, N nilpotente et $DN = ND$ (décomposition de Dunford). On peut réecrire cette décomposition $B = D \cdot (\mathrm{Id} + N')$ avec $N' = D^{-1}N$ nilpotente.

En diagonalisant on trouve une matrice Δ telle que $\exp \Delta = D$. Il reste donc à trouver une matrice nilpotente n qui commute avec Δ telle que $\exp n = \mathrm{Id} + N'$. On peut encore réduire N' pour se ramener au cas d'un bloc de Jordan. Nous laissons le soin au lecteur d'exhiber n dans ce cas. □

3.4.3 Sous groupes fermés de $GL(n, K)$

On commence par s'intéresser aux sous-groupes à un paramètre de $GL(n; K)$, i.e. aux morphismes continus du groupe additif $\mathbb{R}$ dans $GL(n, K)$.

Proposition 3.4.7. *Les sous-groupes à un paramètre de $GL(n; K)$ sont les $t \mapsto \exp(tX)$, où $X \in \mathcal{M}(n, K)$.*

Démonstration. Soit $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t) \in GL(n, K)$ un sous-groupe à un paramètre. Supposons φ différentiable. Comme $\varphi(s + t) = \varphi(s) \cdot \varphi(s)$, on obtient $\varphi(0) = \mathrm{Id}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \cdot \varphi'(0).$$

Posons $X = \varphi'(0)$. Alors $t \mapsto \exp(-tX)\varphi(t)$ est constante et vaut Id en $t = 0$, donc $\varphi(t) = \exp(tX)$.

Il reste à justifier que φ est différentiable. Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse à support compact concentré près de l'origine, telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$.

La convolée $\varphi * \rho$ est une application lisse qui vérifie

$$\varphi * \rho(t) = \int_{\mathbb{R}} \rho(t - s)\varphi(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \rho(s)\varphi(t - s)ds = A \cdot \varphi(t),$$

avec $A = \int_{\mathbb{R}} \rho(s)\varphi(-s)ds$. Comme φ est continue et $\varphi(0) = \mathrm{Id}$, on en déduit que A est inversible si le support de ρ est suffisamment proche de l'origine. Il en résulte que $\varphi(t) = A^{-1}\varphi * \rho(t)$ est lisse. □

Théorème 3.4.8. *Soit G un sous-groupe fermé de $GL(n, K)$. Alors G est une sous-variété réelle de $GL(n, K)$ dont l'espace tangent en* Id *est*

$$\mathcal{G} := \{X \in \mathcal{M}(n, K) \; ; \; \exp(tX) \in G \;\; \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

Cela montre que tout sous-groupe fermé de $GL(n, K)$ est un groupe de Lie. Il est vrai, plus généralement, que tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un groupe de Lie.

Démonstration. L'ensemble

$$\mathcal{G} := \{X \in \mathcal{M}(n, K) \; ; \; \exp(tX) \in G \; \forall t \in \mathbb{R}\},$$

s'appelle l'algèbre de Lie du groupe G. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, K)$ qui est stable par le crochet de Lie,

$$(X, Y) \mapsto [X, Y] := XY - YX,$$

comme vous le vérifierez dans l'Exercice 154.

Le point clef de la démonstration est de montrer, lorsque G est fermé, qu'il existe un voisinage V de la matrice nulle dans $\mathcal{G}$ et un voisinage W de Id dans G, tels que l'application exponentielle réalise un homéomorphisme entre V et W. C'est l'analogue du résultat démontré au chapitre précédent dans le cas des surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$.

Le théorème d'inversion locale assure que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre un voisinage V' de 0 dans $\mathcal{M}(n, K)$ et un voisinage W' de Id dans $GL(n, K)$, puisque nous avons calculé $D_0 \exp = \mathrm{Id}$. On pose $V = V' \cap \mathcal{G}$ et $W' = W \cap G$. On obtient bien ainsi des voisinages ouverts de 0 et Id dans $\mathcal{G}$ et G. De plus exp envoie bien $\mathcal{G}$ dans G donc V dans W. La difficulté est de montrer que caractère surjectif de cette restriction. Nous laissons le soin au lecteur de le vérifier. □

Exemple 3.4.9. *Le groupe $SO(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé, c'est donc une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$. Son espace tangent en* Id *est l'ensemble des matrices antisymétriques, comme le lecteur le vérifiera dans l'exercice 155.*

Exemple 3.4.10. *Le groupe $SL(n, K)$ est un sous-groupe fermé, c'est donc une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$. Son algèbre de Lie est l'ensemble des matrices de trace nulle, comme le lecteur le vérifiera dans l'exercice 156.*

3.5 Classifications

Dans cette dernière section, nous évoquons sans démonstration quelques résultats (certains spectaculaires) qui vous donneront une petite idée de recherches récentes en topologie et géométrie différentielle.

3.5.1 Structures différentielles

Une question fondamentale en topologie différentielle est de classer toutes les structures différentiables non difféomorphes existant sur un espace topologique donné.

S.Donaldson [8] a démontré en 1985 qu'il existe une infinité de telles structures sur $\mathbb{R}^4$. Celles qui ne sont pas difféomorphes à la structure différentiable usuelle de $\mathbb{R}^4$ sont appelées structures différentiables exotiques. Ce travail lui a valu la médaille Fields en 1986. Pour $n \neq 4$ il existe une unique structure différentiable sur $\mathbb{R}^n$, a difféomorphisme près.

J.Milnor a démontré en 1956 qu'il existe 28 structures différentiables distinctes sur la sphère S^7. Ces travaux en topologie différentielle lui ont valu la médaille Fields en 1962. E.Brieskorn [9] a montré en 1966 que l'on peut retrouver ces 28 structures en considérant l'intersection de la variété complexe

$$\{z \in \mathbb{C}^5 \,;\, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0\},$$

$1 \leq k \leq 28$, avec une petite sphère centrée à l'origine. Ces sphères sont appelées sphères de Brieskorn.

C'est un problème encore ouvert aujourd'hui de déterminer le nombre de structure différentiables de la sphère S^4.

Dans une direction différente, mentionnons le théorème de plongement de H.Whitney qui garantit que toute variété différentielle M de dimension n peut être plongée dans $\mathbb{R}^{2n}$. L'astuce que Whitney inventa pour démontrer ce résultat en 1936 a joué un rôle important dans la preuve de Smale de la conjecture de Poincaré en dimension $n \geq 5$ (voir plus bas).

3.5.2 Topologie de basse dimension

Pour simplifier la discussion, nous nous limitons ici au cas des variétés compactes sans bord.

Courbes

Comme nous l'avons entr´aperçu au chapitre 1, il existe une seule variété compacte sans bord de dimension 1, c'est le cercle unité :

Théorème 3.5.1. *Toute variété compacte connexe de dimension (réelle)* 1 *est difféomorphe à la sphère* S^1.

On peut bien entendu se poser d'autres questions plus fines, en imposant au difféomorphisme de préserver une métrique, etc. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 1, où il a été démontré que deux courbes planes sont *isométriques*

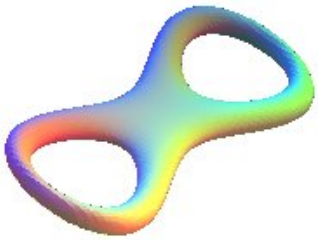
8. Sir Simon Kirwan Donaldson, mathématicien britannique (1957-).
9. Egbert Valentin Brieskorn (1936-2013), mathématicien allemand.

(i.e. image l'une de l'autre par une isométrie plane) si et seulement si elles ont même courbure. Un résultat similaire a également été démontré pour les courbes gauches.

Surfaces

Théorème 3.5.2. *Toute variété compacte connexe orientable de dimension (réelle)* 2 *est difféomorphe*
-soit à la sphère S^2*,*
-soit à un tore à g *trous, où* $g = \text{genre(X)}$.

Rappelons qu'un tore à g trous peut être défini comme une somme connexe de g copies d'un tore de révolution. Voici un tore à deux trous,



que l'on peut réaliser comme un épaississement de la lemniscate de Bernoulli.

Les surfaces non orientables sont difféomorphes à une somme connexe de g copies de l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Il s'ensuit que toute surface compacte (connexe, sans bord) est déterminée, à homéomorphisme (ou difféomorphisme) près, par deux informations : sa caractéristique d'Euler et son orientabilité.

Variétés de dimension trois

Théorème 3.5.3 (Perelman 2003)**.** *Toute variété simplement connexe (sans bord) de dimension trois est homéomorphe à la* 3*-sphère.*

Cet énoncé fut proposé par H.Poincaré en 1904 et a fait l'objet de travaux considérables tout au long du XXe siècle, où il fut connu sous le nom de *conjecture de Poincaré*. On peut plus généralement se demander si *toute variété compacte de dimension* n *qui est homotopiquement équivalente à la sphère unité est homéomorphe à la sphère unité* . Cet énoncé a été démontré

- en dimension $n \geq 5$ par S.Smale [10] (médaille Fields en 1966) ;
- en dimension $n = 4$ par M.Freedman [11] (médaille Fields en 1986).

10. Stephen Smale, mathématicien américain (1930-).
11. Michael Hartley Freedman, mathématicien américain (1951-).

Le cas $n = 3$ a resisté très longtemps et suscité plusieurs preuves incorrectes. La preuve de Perelman [12] est un tour de force et une surprise : alors que le problème relève de la topologie, la démonstration utilise une machinerie analytico-géométrique spectaculaire : l'étude du flot de Ricci, une approche initiée par R.Hamilton [13].

La médaille Fields a été décernée à Perelman (qui l'a refusée) en 2006 pour ses travaux, qui démontrent également la conjecture de géométrisation de Thurston [14] (médaille Fields en 1982), ce qui achève la classification des variétés de dimension trois.

Il n'est pas raisonnable dans un cours de Master 1 d'essayer de vous expliquer cette classification. Si cela vous intéresse, nous avons plusieurs spécialistes à l'Institut de Mathématiques de Toulouse qui se feront une joie de vous en apprendre plus sur ce sujet !

3.5.3 Variétés complexes

Il est probablement illusoire de penser un jour classifier les variétés différentielles réelles de dimension quatre. Une approche raisonnable est d'imposer des conditions/propriétés restrictives qui limitent le champ d'investigation.

On peut par exemple se limiter aux variétés qui admettent une structure complexe. Toutes les surfaces réelles *orientables* admettent une telle structure, on parle alors de surfaces de Riemann.

Les surfaces de Riemann (i.e. variétés complexes de dimension 1) compactes sont classifiées, à difféomorphisme près, par leur genre. Ce n'est cependant pas la bonne notion d'équivalence : il est plus naturel de les classifier à difféomorphisme holomorphe près (on parle de biholomorphisme). On obtient alors les informations suivantes :

- toute surface de Riemann de genre $g = 0$ est biholomorphe à la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$;
- une surface de Riemann de genre $g = 1$ est biholomorphe à un tore complexe $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau]$, où $\Im(\tau) > 0$ (on les appelle des courbes elliptiques) ;
- les classes d'équivalence de surfaces de Riemann de genre $g \geq 2$ sont très nombreuses, leur géométrie très riche fait l'objet de travaux actuels (dans le cadre de la Géométrie Hyperbolique, de la Géométrie Algébrique, etc).

La classification des surfaces complexes compactes (i.e. les variétés différentielles réelles compactes de dimension quatre qui admettent une structure complexe) a été entreprise par les géomètres algébristes italiens au 19ème

12. Grigori Iakovlevitch Perelman, mathématicien russe (1966-).
13. Richard S. Hamilton, mathématicien américain (1943-).
14. William Paul Thurston, mathématicien américain (1946-2012).

siècle, puis complétée par les écoles russes (notamment O.Zariski [15]) et japonaises (notamment K.Kodaira [16], médaille Fields en 1954). En fait, une classe particulière de surfaces reste encore mystérieuse (la "classe VII_0") et occupe les recherches passionnées de mathématiciens actuels.

En dimension (complexe) supérieure à trois, les choses se compliquent et on se restreint généralement à considérer les variétés complexes compactes *projectives*, i.e. celles qui peuvent se plonger dans un espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Ces variétés ont une structure plus riche et se situent au carrefour de l'Analyse (complexe), de la Géométrie différentielle et de la Géométrie Algébrique, permettant un joyeux mélange des points de vue et techniques.

La classification de ces variétés en dimension (complexe) trois a été un tour de force du mathématicien japonais S.Mori [17] (médaille Fields en 1990). L'extension de ces résultats en dimension plus grande fait l'objet de recherches actuelles acharnées, notamment à Toulouse !

3.6 Exercices

Exercice 116. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension d et $g : V_p \to \mathbb{R}^{m-d}$ une submersion définie dans un voisinage V_p de $p \in M$, telle que $V_p \cap M = g^{-1}g\{p\}$. Montrer que*

$$T_pM = p + \ker D_pg.$$

En déduire que T_pM est un sous-espace affine de dimension d.

Exercice 117. *Soit $g \in \mathbb{N}^*$. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le disque unité fermé et $D_1, \dots D_g$ des disques deux à deux disjoints contenus dans D,*

$$D_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \leq r_i^2\}.$$

On considère

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1 - [x^2 + y^2])\Pi_{i=1}^g \left((x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2\right) \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z^2 = f(x, y)\}$$

est une sous-variété compacte et connexe de $\mathbb{R}^3$. Représentez la.

2) Vérifier que M n'est pas simplement connexe. Combien a-t'elle de trous ?

15. Oscar Zariski, mathématicien russe (1899-1986) très influent dans le domaine de la géométrie algébrique.

16. Kunihiko Kodaira, mathématicien japonais (1915-1997), fondateur de l'école japonaise de géométrie algébrique.

17. Shigefumi Mori, mathématicien japonais (1951-).

Exercice 118. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ une immersion. Montrer, à l'aide du théorème d'inversion locale, que f s'écrit localement comme la composée de*

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$$

et d'un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 119. *Soit $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion. Montrer, à l'aide du théorème d'inversion locale, que g s'écrit localement comme la composée de*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mapsto y \in \mathbb{R}^{n-d}$$

et d'un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 120. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. Soit $(e^i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E^*. Montrer que les formes $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ sont des k-formes alternées et qu'elles forment une base de l'espace $\Lambda^k(E)$. En déduire la dimension de $\Lambda^k(E)$.*

Exercice 121. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\alpha \in \Lambda^k(E)$ une forme k-linéaire alternée. Montrer que*

$$\alpha(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(x_1, \ldots, x_k),$$

pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_k$, où Σ_k désigne le groupe symétrique sur k éléments et ε est la signature de la permutation $\sigma \in \Sigma_k$.

Exercice 122. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. Montrer qu'il n'existe pas de k-forme alternée non nulle lorsque $k \geq n + 1$.*

Exercice 123. *Montrer que le produit extérieur est associatif, qu'il commute avec les difféomorphismes et vérifie*

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{\deg \alpha + \deg \beta} \alpha \wedge \beta.$$

Exercice 124. *Montrer que le paraboloïde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$ est difféomorphe à un plan.*

Exercice 125. *On considère dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ la quadrique*

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \,;\, ||x||^2 - ||y||^2 = 1\}.$$

Montrer que Q est difféomorphe à $S^{n-1} \times \mathbb{R}^p$.

Exercice 126. *Soit S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Montrer que l'application*

$$f : (x, y, z) \in S^2 \mapsto (-x, -y, -z) \in S^2$$

est un difféomorphisme.

Exercice 127. *On considère $M = \mathbb{R}$ muni des deux atlas à une seule carte $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ et $(\mathbb{R}, \varphi_2)$ où*

$$\varphi_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que ces deux atlas ne sont pas compatibles.

2) Montrer que les deux structures différentiables correspondantes sont difféomorphes.

Exercice 128. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension d. Montrer que M admet une structure différentiable (autrement dit les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ sont bien des variétés "abstraites").*

Exercice 129.

1) Montrer que le produit de deux variétés différentielles est une variété différentielle, de dimension la somme des dimensions.

2) Montrer que le tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ admet une structure différentiable qui en fait une variété différentielle compacte, difféomorphe à $(S^1)^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.

Exercice 130. *Soit M une variété différentielle compacte de dimension d. Soit $\mathcal{A}$ un atlas fini à N cartes. Montrer que M se plonge dans $\mathbb{R}^{N(d+1)}$.*

Exercice 131. *On considère la 1-forme différentielle*

$$\alpha(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

dans $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Soit Γ_R le cercle centré à l'origine et de rayon R, orienté dans le sens trigonométrique. Montrer que pour tout $R > 0$,

$$\int_{\Gamma_R} \alpha = 2\pi.$$

Exercice 132. *Montrer que toute 1-forme différentielle fermée est localement exacte (lemme de Poincaré).*

Exercice 133. *Soit $f : M \to N$ une application lisse entre deux variétés différentielles. Soit α une k-forme différentielle sur N. Montrer que $f^*\alpha$ est une k-forme différentielle sur M définie par*

$$(f^*\alpha)_p(v_1, \ldots, v_k) = \alpha_{f(p)}(d_p f(v_1), \ldots, d_p f(v_k)).$$

Exercice 134.

1) Soit $(U_i)_{1\leq i\leq s}$ un recouvrement ouvert fini d'un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe des fonctions lisses χ_i à support compact dans U_i telles que

$$\sum_{i=1}^{s} \chi_i \equiv 1.$$

2) Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe géométrique compacte orientée et α une 1-forme différentielle sur Γ. Montrer que la définition de $\int_\Gamma \alpha$,

$$\int_\Gamma \alpha := \sum_{i=1}^{s} \int_{\Gamma\cap U_i} \chi_i \alpha.$$

est indépendante du choix des U_i et des χ_i.

Exercice 135. *Soit M une variété différentielle de dimension n. Montrer que M est orientable si et seulement si il existe une n-forme différentielle sur M qui ne s'annule nulle part.*

Exercice 136. *Soit $P \in \mathbb{R}[x_0, \ldots, x_n]$ un polynôme homogène tel que $D_x P \neq 0$ si $x \neq 0$. Montrer que*

$$H_P = \{[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \,|\, P(x) = 0\}$$

est une hypersurface de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Montrer un résultat similaire pour les hypersurfaces de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Exercice 137. *Montrer que le tore $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i] = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times i\mathbb{Z}$ admet une structure de variété complexe compacte de dimension (complexe) 1.*

Exercice 138. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface et $q \in \mathbb{R}^3 \setminus S$. Montrer que*

$$f : p \in S \mapsto ||p - q|| \in \mathbb{R}$$

est différentiable.

Vérifier que $p \in S$ est un point critique de f si et seulement si la droite joignant p à q est normale à S au point p.

Exercice 139. *On considère l'application*

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que f est une application surjective qui est un difféomorphisme local au voisinage de chacun des points de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mais que ce n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 140. *Soit $f : M \to N$ une application lisse entre deux variétés différentielles. On suppose f est une immersion injective et propre. Montrer que c'est un plongement.*

Exercice 141. *Montrer que l'application*

$$f : [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mapsto \frac{(yz, zx, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}^4$$

est un plongement du plan projectif dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 142. *Montrer que la lemniscate*

$$f : e^{i\theta} \in S^1 \mapsto (\cos\theta, \sin(2\theta)) \in \mathbb{R}^2$$

est une immersion propre qui n'est pas un plongement.

Exercice 143.

1) Montrer que l'application

$$f : t \in]-1, +\infty[\mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \in \mathbb{R}^2$$

est une immersion injective qui n'est pas un plongement.

2) Montrer que l'application

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$$

est injective, propre, mais n'est pas un plongement.

Exercice 144. *Soit M une variété différentielle de dimension d. Soit TM son fibré tangent. Montrer que l'application $p \in M \mapsto (p, 0) \in TM$ est un plongement.*

Exercice 145. *La bouteille de Klein est définie comme le quotient de* $\mathbb{R}^2$ *par le groupe de transformations engendré par*

$$(x, y) \mapsto (x + 1, y) \text{ et } (x, y) \mapsto (-x, y + 1).$$

1) Munir la bouteille de Klein d'une structure de variété.
2) Donner une immersion de la bouteille de Klein dans $\mathbb{R}^3$.
3) Donner un plongement de la bouteille de Klein dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 146. *Soit* $S \subset \mathbb{R}^3$ *une surface régulière. Le gradient d'une fonction différentiable* $f : S \to \mathbb{R}$ *est une application différentiable* $\nabla f : S \to \mathbb{R}^3$ *telle que*

$$\langle \nabla f(p), v \rangle_p = Df_p(v),$$

pour tout $v \in T_p(S)$.

1) Montrer que si E, F, G *sont les coefficients de la première forme fondamentale dans une paramétrisation* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, *alors*

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \varphi_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} \varphi_v.$$

2) On fixe $p \in S$ *et on laisse varier* v *dans le cercle unité de* $T_p(S)$ *(i.e.* $|v| = 1$*). Montrer que* $Df_p(v)$ *est maximal si et seulement si*

$$v = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$

3) Si $\nabla f \neq 0$ *pour tout point de la courbe de niveau* $C = \{q \in S \mid f(q) = cst\}$, *montrer que* C *est régulière et* ∇f *est normal à* C *en tout point de* C.

Exercice 147. *Montrer que les espaces projectifs* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *sont orientables si* n *est impair, non orientables si* n *est pair.*

Exercice 148.
1) Mq $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *s'identifie au quotient de la sphère* S^n *par le groupe* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2) Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 149.
1) Montrer que la caractéristique d'Euler de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *est* $\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = 1$.
2) Montrer que la somme connexe de deux copies de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *est la bouteille de Klein et en déduire la caractéristique d'Euler de la bouteille de Klein.*

Exercice 150. *On considère le ruban de Möbius, i.e. la surface M de $\mathbb{R}^3$ définie par la paramétrisation*

$$\varphi(t,v) = ((1+t\cos v)\cos(2v), (1+t\cos v)\sin(2v), t\sin v)\,,$$

où $v \in \mathbb{R}$ et $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$. Montrer que M est difféomorphe à la surface abstraite obtenue comme le quotient

$$M \simeq \mathbb{R} \times [-1,+1] \ \sim$$

où

$$(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \ x' = x+k \ \ \&\ \ y' = (-1)^k y.$$

Exercice 151. *Montrer que si on colle deux rubans de Möbius le long de leur bord, on obtient une bouteille de Klein (attention, cela ne peut se "voir" que dans $\mathbb{R}^4$!).*

Exercice 152. *Montrer que $GL(n,\mathbb{R})$ et $GL(n,\mathbb{C})$ sont des ouverts denses de $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$. Montrer que $GL(n,\mathbb{C})$ est connexe, mais pas $GL(n,\mathbb{R})$.*

Exercice 153. *Montrer que le groupe orthogonal*

$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \,|\, A^t A = \mathrm{Id}\}$$

et le groupe spécial orthogonal

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \,|\, A^t A = \mathrm{Id} \ \ et\ \ \det \mathrm{A} = 1\}$$

sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$ dont on précisera la dimension.

Exercice 154. *Soit G un groupe de Lie et*

$$\mathcal{G} := \{X \in \mathcal{M}(n,K)\ ;\ \exp(tX) \in G\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

l'algèbre de Lie du groupe G. Montrer que $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}(n,K)$ qui est stable par le crochet de Lie,

$$(X,Y) \mapsto [X,Y] := XY - YX.$$

Exercice 155. *Montrer que l'algèbre de Lie du groupe spécial orthogonal $SO(n,K)$ est l'ensemble des matrices antisymétriques.*

Exercice 156. *Montrer que l'algèbre de Lie de $SL(n,K)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle. Quelle est la dimension de $SL(n,K)$?*

Exercice 157. *Montrer que la* 2*-forme différentielle*

$$\eta(x,y) = \frac{dx \wedge dy}{\pi[1+x^2+y^2]^2}$$

définit sur $\mathbb{R}^2$ *une mesure de probabilité qui s'étend en une forme volume lisse sur la sphère* S^2*.*

Exercice 158. *Soit* $A \in Sym^+(n,\mathbb{R})$ *une matrice réelle symétrique définie positive.*

1) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

2) En déduire que $\det A \leq \det A_1 \cdot \det A_2$*, lorsque* $A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 \end{bmatrix}$*, puis que*

$$\det A \leq \Pi_{i=1}^n a_{ii}.$$

Exercice 159. *Montrer que le volume de la sphère unité de* $\mathbb{R}^n$ *est*

$$\operatorname{Vol} S^n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})},$$

où Γ *désigne la fonction définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt.$$

Bibliographie

[Audin] Michèle Audin. *Géométrie.* L3M1, EDP Sciences(2006).

[BerGos] M.Berger et B.Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* P.U.F. (1987).

[Doss] C.Doss-Bachelet, J.-P.Françoise, C.Piquet. *Géométrie différentielle avec 80 figures.* Ellipses (2000).

[DoCarmo] M.DoCarmo. *Differential Geometry of curves and surfaces.* Prentice Hall (1976).

[Spivak] M.Spivak *Differential Geometry* Vol II, Publish or Perish Inc (1979).

[Warner] F.Warner *Foundations of differential manifolds and Lie groups.* Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. ix+272 pp.