Préparation à l'Agrégation Interne

Vincent GUEDJ

15 juillet 2010

Table des matières

1 Matrices et Déterminants **3**

1.1 Notions fondamentales 4

1.2 Déterminants 5

1.3 Matrices remarquables 8

2 Réduction des endomorphismes **11**

2.1 Notions fondamentales 11

2.2 Sous-espaces propres, sous-espaces caractéristiques 12

2.3 Diagonalisation 14

2.4 Trigonalisation 15

2.5 Pot pourri 15

3 Algèbre bilinéaire **17**

4 Suites de fonctions **21**

4.1 Rappels sur les suites dans les espaces métriques 22

4.2 Exemples d'espaces complets 23

4.3 Plusieurs types de convergence 24

5 Séries de fonctions **27**

5.1 Convergence normale 28

5.2 Séries entières 29

5.3 Séries de Fourier 30

Introduction

Ce document est le support d'un cours-TD de préparation à l'Agrégation Interne dispensé par l'auteur à l'Université Aix-Marseille 1 (Marseille, France) entre septembre 2007 et février 2010.

Le syllabus du cours-TD était le suivant :

1. Notions de base d'algèbre linéaire
2. Réduction des endomorphismes
3. Algèbre bilinéaire
4. Suites et séries numériques
5. Suites et séries de fonctions.

Il existe de nombreuses références qui traitent de ces sujets classiques. Je me suis librement inspiré des livres dont disposent les candidats au moment de leurs épreuves orales.

Le texte contient très probablement de nombreuses coquilles (typos, erreurs ou imprécisions). Merci d'avance de me les signaler en m'écrivant à vincent.guedj@math.univ-toulouse.fr

Bonne lecture !

Chapitre 1

Matrices et Déterminants

Introduction

Voici la première d'une série de feuilles d'exercices sur l'Algèbre linéaire et bilinéaire. Elles comportent beaucoup (trop) d'exercices (une soixantaine), il n'est donc pas question que nous les corrigions tous ensemble.

Pour que les séances vous soit profitables, il faut que vous cherchiez certains de ces exercices chez vous, on corrigera ensuite "à la demande". Notez bien que chercher ne signifie pas trouver et trouver n'est pas nécessairement comprendre...Ne vous découragez donc pas si vous coincez sur de nombreux exercices (voir la plupart), le mécanisme de la compréhension est long, d'autant plus qu'il s'agit là d'une partie lourde du programme (deux pages sur un total de neuf dans le programme officiel paru au B.O. !).

J'ai classé de façon approximative les exercices en plusieurs catégories, *Cours* pour les propriétés qui figurent au programme et que vous devez abolument savoir démontrer, *Entraînement* pour des applications directes du cours ou des exercices pratiques et numériques, *Classique* voire *Grand classique* pour des exercices qui devraient faire partie de votre patrimoine et que tous les examinateurs connaissent (le jour de l'oral il faut qu'il y en ait un peu mais pas trop), *Original* pour des exercices "jolis" qui sortent un peu des sentiers battus (c'est très bien d'en placer un le jour de l'oral).

La plupart de ces exercices sont tirés d'un même recueil (autorisé), pour que vous puissiez les retrouver le jour J (je vous donnerai les références après les séances...). N'allez pas croire que tout ceci n'a pour but que de vous préparer à l'oral. La première épreuve écrite porte (à quelques exceptions près) sur des problèmes de géométrie euclidienne ou d'algèbre linéaire. Ca vaut donc le coup de passer du temps à vous entraîner, bon courage !

1.1 Notions fondamentales

1.1.1 Les notions à connaître absolument

On se donne K un corps de base. Dans votre pratique, K sera soit le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, soit celui des nombres complexes $\mathbb{C}$ (très rarement celui des rationnels, un corps fini, etc).

On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans K. C'est un K-espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations fondamentales, addition de deux matrices et multiplication par un scalaire.

On peut également multiplier une matrice de $M_{n,p}(K)$ et une matrice de $M_{p,q}(K)$, en particulier on peut toujours multiplier deux matrices carrées. On note $M_n(K)$ (ou bien $M(n,K)$) cet ensemble qui a du coup une structure de K-algèbre. On note $GL(n,K)$ l'ensemble des matrices carrées inversibles. C'est un groupe pour cette multiplication, appelé groupe linéaire. C'est sans aucun doute un des groupes les plus importants, il faut donc bien connaître certaines de ses propriétés.

ATTENTION : le produit de matrices n'est pas une opération commutative, ce qui donne lieu à de nombreux exercices qui tournent autour de la question "quand est-ce le cas" (cf Exercices 1,3,16,26).

Voici une liste non exhaustive de notions que vous devez maîtriser et qui interviennent dans les exercices à venir :

- la notion de matrice d'un endomorphisme ;
- la transposée d'une matrice ;
- la base canonique $E_{i,j}$ (et les produits de deux telles matrices) ;
- le rang (via les vecteurs colonnes ou les lignes par exemple) ;
- la trace (c'est une forme linéaire très spéciale sur $M(n,K)$) ;
- la notion de matrices équivalentes et surtout de matrices semblables ;
- les projecteurs et les symétries.

1.1.2 Exercices

Exercice 1 (Grand classique).

Soit $A \in M(n,K)$ telle que $AB = BA$, $\forall B \in M(n,K)$.

1) Montrer que A est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda Id$.

2) Même question en supposant uniquement $AB = BA$, $\forall B \in GL(n,K)$.

Exercice 2 (Entraînement).

Soit $M \in M(n,K)$ une matrice de rang 1. Montrer que $M^2 = Tr(M)M$.

Exercice 3 (Grand classique).

Soit $\varphi : M(n,K) \to K$ une forme linéaire.

1) Montrer qu'il existe une unique $A \in M(n, K)$ telle que

$$\varphi(M) = Tr(AM), \ \forall M \in M(n, K).$$

2) Montrer que si $\varphi(XY) = \varphi(YX)$ pour tout $X, Y \in M(n, K)$, alors φ est proportionnelle à la trace.

Exercice 4 (Grand classique)**.**
Soit $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ deux matrices semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles sont également semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (Entraînement)**.**
Déterminer les matrices $M \in M(n, \mathbb{C})$ telles que M est semblable à $2M$.

Exercice 6 (Classique)**.**
Soit $A \in M(n, K)$ telle que $TrA = 0$. Montrer que A est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

1.2 Déterminants

1.2.1 Ce qu'il faut savoir

Définition. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Alors l'espace des formes n-linéaires alternées sur K est de dimension 1, i.e. elles sont toutes proportionnelles. On fixe la constante de proportionnalité en imposant à une telle forme (non nulle) de valoir 1 sur une base $\mathcal{B}$ de E : c'est le déterminant (relatif à cette base)

Lorsque $E = K^n$, on appelle déterminant (implicitement par rapport à la base canonique) l'unique forme n-linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur la base canonique. Si on écrit les vecteurs les uns à la suite des autres en colonne (par exemple), on obtient ainsi la définition du déterminant d'une matrice carrée.

Formulaire. Il faut connaître (et savoir démontrer) les formules suivantes :
- $\det(AB) = \det A \det B$;
- $\det{}^t A = \det A$;
- $A \in GL(n, K)$ ssi $\det A \neq 0$ et alors $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$;
- $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$;

– Règle de calcul de Sarrus ($n = 3$) ;
– Attention ! $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$...
et surtout la très jolie (et utile) formule

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

où S_n désigne le groupe symétrique (des permutations sur n éléments).

Cofacteurs. On note traditionnellement $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de taille $n-1$ calculé à partir de A en effaçant la ligne i et la colonne j. On appelle cofacteurs d'ordre (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$ et comatrice $Com(A)$ la matrice des cofacteurs. L'intérêt de ces notions réside dans les observations suivantes :

i) Formule de Laplace :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A).$$

Dans la première égalité, on a developpé le determinant par rapport à la j^{eme} colonne, dans la deuxième, on a developpé par rapport à la i^{eme} ligne.

ii) Calcul de l'inverse : si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t Com(A).$$

Lorsque A n'est pas inversible, on a tout de même la relation très utile

$$A^t Com(A) = \det A \cdot Id.$$

Polynôme caractéristique. C'est le polynôme de degré n défini par

$$\chi_A(t) := \det(A - tId).$$

Son coefficient dominant est $(-1)^n$ (Attention, certains auteurs considèrent plutôt $\det(tId - A)$). Ses racines sont les valeurs propres de A . Lorsque $n = 2$, il vient

$$\chi_A(t) = t^2 - \mathrm{trA}\, t + \det A.$$

Comme l'espace vectoriel $M(n, K)$ est de dimension n^2, la matrice A est racine d'un polynôme de degré $\leq n^2$ (pourquoi ?). Le remarquable *Théorème de Cayley-Hamilton* assure qu'elle annule en fait un polynôme de degré n,

$$\chi_A(A) = 0.$$

Il existe de nombreuses démonstrations de ce résultat, certaines très élégantes mais également un peu dangereuses si on ne les maîtrise pas bien à l'oral...La plus laborieuse (mais la plus fiable si vous la travaillez bien) est via la réduction des endomorphismes.

On appelle polynôme minimal le polynôme unitaire de plus bas degré qui annule la matrice A. Une matrice est diagonalisable ssi son polynôme minimal n'a que des racines simples. Une traduction pratique de ce résultat fondamental est qu'une matrice est diagonalisable ssi elle est annulée par un polynôme qui n'a que des racines simples (ce n'est pas nécessairement son polynôme minimal). Par exemple un projecteur (resp. une symétrie) est diagonalisable car il est annulé par $X^2 - X$ (resp. $X^2 - 1$).

1.2.2 Quelques exercices

Exercice 7 (Entraînement)**.** *On note $J \in M(n, \mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer les déterminants de*

$$J - Diag(0, 1, \ldots, 1) \quad et \quad J - Id.$$

On pourra commencer par traiter les cas $n = 2, 3$.

Exercice 8 (Grand classique)**.** *Calculer le déterminant de Vandermonde*

$$V(a_1, \ldots, a_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (Grand classique)**.** *Calculer le déterminant de Cauchy*

$$C(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) := \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \ldots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \ldots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (Grand classique)**.** *Calculer le déterminant de la matrice $bJ + (a-b)Id$ où J désigne la matrice dont tous les coefficients valent* 1.

Exercice 11 (Grand classique)**.**
Soit $A \in M(n, K)$ et $B = ComA$. Montrer que $rang(B) \in \{0, 1, n\}$.

Exercice 12 (Entraînement)**.** *Soit $M \in M(n, \mathbb{Z})$. Montrer que M est inversible dans $M(n, \mathbb{Z})$ ssi* $\det M \in \{\pm 1\}$.

Exercice 13 (Entraînement). *Soit*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de M.
2) Calculer les sous-espaces propres de M.
3) En déduire la valeur de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 (Entraînement). *Soit $A \in M(3, \mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 15 (Classique). *Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^*$ et $M = [x_i x_j] \in M(n, \mathbb{R})$.*
1) Montrer que $rang(M) = 1$.
2) Montrer que M est diagonalisable ssi $\sum x_i^2 \neq 0$.

1.3 Matrices remarquables

1.3.1 Matrices diagonalisables

Les matrices diagonales sont les plus simples à comprendre et à manipuler pour les applications (par exemple pour calculer ses puissances, cf suites définies par une récurrence linéaire...). On essaie donc de se ramener à ce cas en effectuant un changement de base, c'est la notion de matrice diagonalisable (semblable à une matrice diagonale).

Il faut sans cesse vous poser des questions simples sur les notions que vous rencontrez. Par exemple, le produit (resp. la somme) de deux matrices diagonales est une matrice diagonale, ce qui confère à cet ensemble une structure de sous-algèbre de $M(n, K)$.

- En est-il de même des matrices diagonalisables ? (oui—>preuve, non—>contre exemple).
- Est-ce que l'inverse d'une matrice diagonalisable inversible est diagonalisable ?
- Est-ce que si une matrice réelle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, elle l'est sur $\mathbb{R}$? (cf Exercice 1.4).

Le prototype d'une matrice non-diagonalisable est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (pourquoi ?).

Exercice 16 (Grand classique)**.**
Soit $A, B \in M(n, K)$ *deux matrices diagonalisables telles que* $AB = BA$. *Montrer que* A *et* B *sont simultanément diagonalisables.*

Exercice 17 (Classique)**.** *Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans* $M(n, \mathbb{C})$. *Est-ce vrai dans* $M(n, \mathbb{R})$ *?*

Exercice 18 (Entraînement)**.**
Soit P *une matrice de projecteur. Montrer que* $rang(P) = Tr(P)$.

Exercice 19 (Entraînement)**.**
Soit $A \in GL(n, \mathbb{C})$. *Montrer qu'il y a équivalence entre*
i) $\{A^n, n \in \mathbb{Z}\}$ *est borné dans* $M(n, K)$ *;*
ii) A *est diagonalisable et ses valeurs propres sont de module* 1.

Exercice 20 (Entraînement)**.** *Soit* $A \in M(n, \mathbb{C})$ *t.q.* $(||A^n||)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
1) Montrer que les valeurs propres de A *sont de module* ≤ 1 *et que la partie de module* 1 *est diagonalisable.*
2) Montrer que $\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} A^i$ *converge vers un projecteur.*

1.3.2 Matrices nilpotentes

Une matrice $N \in M(n, K)$ est dite nilpotente si $N^s = 0$ pour un entier $s \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble de ces matrices.

Vérifiez que l'ensemble $\mathcal{N}$ n'est pas stable pour l'addition des matrices (pas plus que pour la multiplication) lorsque $n \geq 2$, mais qu'il est connexe.

Montrer qu'une matrice nilpotente n'a que zéro pour valeur propre. Que pensez vous de la réciproque ? sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 21 (Entraînement)**.**
Montrer qu'une matrice nilpotente est diagonalisable ssi elle est nulle.

Exercice 22 (Entraînement)**.** *Montrer que pour* $n = 2$,

$$\mathcal{N} = \{A \in M(2, K) \,/\, Tr(A) = \det(A) = 0\}.$$

Exercice 23 (Entraînement)**.**
Soit $A \in M(n, K)$ *de rang 1. Montrer que* $A \in \mathcal{N}$ *ssi* $Tr(A) = 0$.

Exercice 24 (Entraînement)**.** *Soit* $N \in \mathcal{N}$. *Montrer que* $\det(Id + N) = 1$.

Exercice 25 (Classique)**.** *Soit* $A, B \in M(n, K)$ *telles que* $AB - BA = A$.
1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^nB - BA^n = nA^n.$$

2) Montrer que A *est nilpotente.*
3) Donner un exemple de telles A, B *pour* $n = 2$ *avec* $A \neq 0$.

1.3.3 Matrices triangulaires

L'ensemble $T(n, K)$ des matrices triangulaires supérieures est une sous-algèbre de $M(n, K)$ (qu'est-ce que cela signifie ? pourquoi ?). Lorsque $K = \mathbb{C}$, on a le résultat fondamental suivant.

Toute matrice de $M(n, \mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $T(n, \mathbb{C})$.

On dit aussi que toute matrice complexe est trigonalisable. Il faut
-savoir démontrer ce résultat (par ex. par récurrence) ;
-savoir sur quels corps autres que $\mathbb{C}$ il est valable/non valable ($\mathbb{R}$?) ;
-savoir en déduire le théorème de Cayley-Hamilton ;
-savoir en déduire la décomposition de Chevalley : $\forall A \in M(n, \mathbb{C})$,

$$\exists!(D, N) \in M(n, \mathbb{C}) \text{ tels que } A = D + N \text{ et } DN = ND,$$

avec D diagonalisable et N nilpotente.

Exercice 26 (Classique)**.** *Soit $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ deux matrices qui commutent. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.*

Exercice 27 (Entraînement)**.** *Soit $A \in M(n, K)$ telle que $Tr(A^k) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$. Montrer que $A^n = 0$.*

Exercice 28 (Entraînement)**.** *Soit $N \in M(n, K)$ une matrice nilpotente. Est-ce que N est trigonalisable sur K ?*

Il y a de nombreux autres exemples de matrices spéciales importantes (matrice symétrique, hermitienne, orthogonale, unitaire, positive, magique, stochastique, compagnon, circulante,etc). Vous en rencontrez certaines par la suite, dans les feuilles à venir ainsi que dans les leçons de géométrie, probabilités,...

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes

2.1 Notions fondamentales

2.1.1 Noyau, Image

On se donne E un K-espace vectoriel de dimension finie ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ principalement) et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On rappelle que le noyau

$$Ker(f) := \{x \in E \,/\, f(x) = 0\}$$

est un sev qui mesure le manque d'injectivité de f et que l'image

$$Im(f) := \{y \in E \,/\, \exists x \in E,\ f(x) = y\}$$

est un sev qui mesure le caractère plus ou moins surjectif de f. Comme E est de dimension finie, ces deux sous-espaces sont reliés par la formule

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim E \tag{2.1}$$

qu'il faut savoir démontrer et qui indique en particulier que f est injectif ssi il est surjectif, ssi il est bijectif. Ce résultat est faux en dimension infinie comme l'indique l'Exercice 1.

Notez que lorsque $f : E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, la formule (1) reste valable mais la conséquence injectif=surjectif=bijectif n'est valable que si $\dim E = \dim F$.

Exercice 29 (Entraînement)**.** *Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées muni de la norme $N_\infty(x) := \sup_{n\in N} |x_n|$. On considère*

$$\sigma : x \in E \mapsto y \in E$$

définie par $y_n := x_{n+1}$, le "décalage à gauche".

1) Montrer que $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ est surjectif mais pas injectif.
2) Montrer de même que le décalage à droite est injectif mais pas surjectif.
3) Calculer la norme d'opérateur de ces deux endomorphismes.
4) Calculer les composés de ces deux décalages.

2.1.2 Supplémentaires

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Leur intersection $F \cap G$ est encore un sous-espace vectoriel (vérifiez le !), mais c'est rarement le cas de leur réunion :

Exercice 30 (Entraînement)**.**
Montrer que $F \cup G$ est un sev de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

On considère à la place la somme $F + G$ constituée de toutes les sommes d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On a alors

$$\dim F + \dim G = \dim(F \cap G) + \dim(F + G).$$

On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$, on écrit alors $F+G = F \oplus G$. Si de plus $F+G = E$, on dit que F et G sont supplémentaires et on écrit ainsi $F \oplus G = E$.

Exercice 31 (Classique)**.** *Soit F, F' deux sevs de E. Montrer qu'ils admettent un supplémentaire commun ssi ils ont même dimension.*

Exercice 32 (Classique)**.** *Soit $F, G \subset E$ deux sevs. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Ker(f) = F$ et $Im(f) = G$ ssi $\dim F + \dim G = \dim E$.*

Plus généralement, on dira que des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_s$ sont en somme directe si l'application linéaire

$$\varphi : (x_1, \dots, x_s) \in F_1 \times \cdots \times F_s \mapsto x_1 + \cdots + x_s \in E$$

est injective. Dans ce cas $\dim(F_1 + \cdots + F_s) = \sum \dim F_j$.
Attention. Cette condition implique que $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $i \neq j$, mais elle est beaucoup plus forte que cela lorsque $s \geq 3$. Observez par exemple que les droites

$$F_1 = (x = 0),\ F_2 = (y = 0) \text{ et } F_3 = (x = y)$$

dans $\mathbb{R}^2$ sont d'intersection deux à deux réduites à zéro, mais ne sont pas en somme directe (pourquoi ?). On verra plus loin que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe (de même que les sous-espaces caractéristiques).

2.2 Sous-espaces propres, sous-espaces caractéristiques

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $\lambda \in K$ est valeur propre de f lorsqu'il existe un vecteur non nul x de E (appelé vecteur propre) tel que $f(x) = \lambda x$. Cela revient à dire que l'endomorphisme $f - \lambda Id$ n'est pas injectif. L'ensemble $Ker(f - \lambda Id)$ des vecteurs propres associés à λ s'appelle le sous-espace propre associé à λ.

Exercice 33 (Cours). *Montrer que les sous-espaces propres sont en somme directe. (Pensez à utiliser le déterminant de Vandermonde).*

Exercice 34 (Cours). *Montrer que si les sous-espaces propres sont supplémentaires, i.e.* $\bigoplus_i Ker(f - \lambda_i Id) = E$*, alors* f *est "diagonalisable", c'est à dire qu'il existe une base de* E *dans laquelle la matrice de* f *est diagonale.*

Lorsque f n'est pas diagonalisable, il faut passer à l'analyse des sous-espaces caractéristiques dont la définition utilise l'exercice suivant :

Exercice 35 (Grand classique). *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$*.*

1) Montrer que la suite des noyaux itérés $(Ker(f^j))_{j \in \mathbb{N}}$ *est une suite croissante stationnaire de sevs de* E*.*

2) Montrer que cette suite est de moins en moins croissante, i.e. la suite $(\dim Ker(f^{j+1}) - \dim Ker(f^j))_j$ *est décroissante.*

3) Donner un exemple dans $E = \mathbb{R}^n$ *de* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\dim Ker(f^j) = j$ *pour tout* $0 \leq j \leq n$*.*

4) Exprimer des propriétés analogues sur la suite des images itérées.

Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$ une valeur propre, on peut appliquer l'exercice précédent à l'endomorphisme $(f - \lambda Id)$ et définir le sous-espace caractéristique $C_\lambda(f) := Ker(f - \lambda Id)^m$, où m est le premier entier qui rend la suite des noyaux itérés stationnaire.

Exercice 36 (Cours).

Montrer que les sous-espaces caractéristiques sont en somme directe. (On pourra utiliser le théorème des noyaux qui est rappelé un peu plus loin).

Les sous-espaces caractéristiques servent surtout à réduire les endomorphismes nilpotents, c'est à dire à trouver une base dans laquelle ils ont une expression simple.

Exercice 37 (Entraînement classique). *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *un endomorphisme nilpotent. On note* s *le plus petit entier tel que* $f^s \equiv 0$ *(l'indice de* f*) et* $s(x)$ *le plus petit entier tel que* $f^{s(x)}(x) = 0$*.*

1) Mq pour tout $x \in E$, $s(x) \leq s$, et qu'il existe $x \in E$ tel que $s(x) = s$.

2) On suppose que $s = n = \dim E$. Soit $x \in E$ tel que $s(x) = s = n$. Montrer que la famille $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E. Expliciter la matrice de f dans cette base. Quel est le polynôme minimal de f ?

3) Montrer que pour tout endomorphisme nilpotent non nul d'un ev de dimension deux, il existe une base dans laquelle sa matrice est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3) Donner un exemple dans $\mathbb{R}^3$ d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1. Même question dans $\mathbb{R}^4$ avec indice 2.

2.3 Diagonalisation

2.3.1 Deux exemples fondamentaux

Voici deux exemples élémentaires qu'il faut maîtriser absolument !

Exercice 38 (Cours). *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur (i.e. $p \circ p = p$).*

1) Montrer que $Ker(p) \oplus Ker(p - Id) = E$.

2) En déduire que p est diagonalisable.

Exercice 39 (Cours). *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie (i.e. $s \circ s = s$).*

1) Montrer que $Ker(s + Id) \oplus Ker(s - Id) = E$.

2) En déduire que s est diagonalisable.

2.3.2 Polynômes d'endomorphismes

Les deux exemples précédents sont des cas particuliers du critère simple et fondamental de diagonalisibilité qui va suivre.

Rappelons que si $P = \sum a_i X^i \in K[X]$ est un polynôme, on définit le polynôme d'endomorphisme $P(f) := \sum a_i f^i \in \mathcal{L}(E)$, où f^i désigne comme précédemment l'endomorphisme itéré $f \circ \cdots \circ f$ (i fois). On définit ainsi un morphisme d'algèbre de $K[X]$ vers $\mathcal{L}(E)$ puisque

$$(P + Q)(f) = P(f) + Q(f) \text{ et } (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

Exercice 40 (Cours/ Facile, très utile). *Démontrer le théorème des noyaux qui affirme que si $P, Q \in K[X]$ sont premiers entre eux, alors*

$$Ker(PQ)(f) = Ker\, P(f) \oplus Ker\, Q(f).$$

Exercice 41 (Cours/ Facile, très utile).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable ssi il annule $P(f) = 0$ un polynôme $P \in K[X]$ scindé à racines simples.

Exercice 42 (Classique). *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1) Montrer que si f est diagonalisable, alors f^2 l'est également.

2) Montrer par un exemple simple que la réciproque est fausse.

3) Montrer que si f^2 est diagonalisable, alors

$$(f \text{ diagonalisable }) \Longleftrightarrow Ker\, f = Ker\, f^2.$$

Exercice 43 (Entraînement). *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in K[X]$ tel que $P(0) = 0 \neq P'(0)$ et $P(f) = 0$.*

1) Montrer que $Ker\, f = Ker\, f^2$.

2) En déduire que $Ker\, f \oplus Im\, f = E$.

2.4 Trigonalisation

Notre but ici est de démontrer le deuxième théorème principal au programme sur la réduction des endomorphismes : un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. Nous allons décomposer la preuve en plusieurs exercices. On note $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme,

$$\chi(t) := \Pi_{i=1}^{s}(t - \lambda_i)^{m_i}$$

son polynôme caractéristique et C_i le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i. Ceux-ci sont en somme directe par l'Exercice 8.

Exercice 44 (Cours). *Montrer que $E = \bigoplus_i C_i$ et que chaque sous-espace caractéristique C_i est invariant par f.*

Quitte à raisonner bloc par bloc, on peut donc supposer qu'il n'y a qu'une seule valeur propre que l'on note dans la suite λ.

Exercice 45 (Cours). *Montrer que dans ce cas $f = \lambda Id + n$ avec n nilpotent.*

Il reste donc uniquement à savoir réduire les endomorphismes nilpotents. Cela se fait dans l'esprit de l'Exercice 9... On obtient au passage la réduction de Jordan qu'il est bon de connaitre (bien qu'elle ne soit pas au programme ?) et la décomposition de Dunford : si χ_f est scindé, alors f se décompose de façon unique en

$$f = d + n \text{ avec } d \text{ diagonalisable, } n \text{ nilpotent et } dn = nd.$$

Voici une approche plus simple mais moins précise.

Exercice 46 (Entraînement).

Montrer par récurrence sur la dimension que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini est trigonalisable.

Exercice 47 (Entraînement). *Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M(n, \mathbb{R})$ telles que A est semblable à $2A$.*

2.5 Pot pourri

Exercice 48 (Classique, au programme).
Soit $A \in GL(n, \mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $B \in M(n, \mathbb{C})$ telle que $A = \exp B$.

Exercice 49 (Entraînement). *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n et $\Phi : E \to E$ l'endomorphisme défini par*

$$\Phi(P)(X) = P(X) - P(X-1).$$

1) Calculer $Ker\,\Phi$ et $Im\,\Phi$.
2) Montrer que Φ est nilpotent.
3) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de Φ n'a que des zéros, sauf juste au dessus de la diagonale où elle n'a que des 1.

Exercice 50 (Entraînement). *Résoudre dans $M(2, \mathbb{C})$ l'équation*

$$X^2 = A,$$

où A est une matrice fixée dans $M(2, \mathbb{C})$. On pourra distinguer les cas A diagonalisable/non-diagonalisable.

Exercice 51 (Grand classique). *On se donne $b_1, \ldots, b_n > 0$ et on considère la matrice (compagnon)*

$$M = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

1) On note $e_1, \ldots e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille $\{e_n, Me_n, \ldots, M^{n-1}e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que le polynôme caractéristique de M est également son polynôme minimal.
3) Montrer que M admet une valeur propre positive.

Exercice 52 (Grand classique, au programme).
Montrer qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 53 (Classique). *Soit $A \in M(n, \mathbb{R}^+)$. Montrer que le rayon spectral de A (le plus grand module des valeurs propres complexes) est une valeur propre de A et qu'elle admet un vecteur propre à coordonnées positives.*

Exercice 54 (Classique)**.** *Soit $M \in M(n, \mathbb{Z})$ et p un nombre premier. Montrer que*

$$Tr(M^p) \equiv Tr(M) \text{ modulo } p.$$

Exercice 55 (Original)**.** *Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ avec $P(0)$ impair Montrer que 2^r n'est pas racine de P, quel que soit $r \in \mathbb{Q}_*^+$.*

Chapitre 3

Algèbre bilinéaire

Exercice 56 (Classique/entraînement). *Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes*

1) $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum(i+j)x_i x_j \in \mathbb{R}$ *;*
2) $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum(i^2+ij+j^2)x_i x_j \in \mathbb{R}$ *;*
3) $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum(x_i - x_j)^2 \in \mathbb{R}$ *;*
4) $A \in M(n,\mathbb{R}) \mapsto Tr(A^2) \in \mathbb{R}$.

Exercice 57. *Soit* $A \in M(n,\mathbb{R})$ *une matrice qui préserve la norme,*

$$\|AX\| = \|X\|, \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que $A \in O(n,\mathbb{R})$ *est orthogonale, i.e. est inversible avec* ${}^tA = A^{-1}$.

Exercice 58 (Entraînement). *Quelle est la signature de la forme quadratique*

$$q : A \in M(n,K) \mapsto Tr(A^2) + (TrA)^2 \in \mathbb{R}.$$

On pourra considérer les sev $F = Vect(E_{i,i})$ *et* $G = Vect(E_{i,j} \,/\, i \neq j)$.

Exercice 59 (Cours). *Soit* A *une matrice symétrique réelle définie positive et* B *une matrice symétrique réelle positive. Montrer qu'il existe* $P \in GL(n,\mathbb{R})$ *telle que*

$${}^tPAP = Id \text{ et } {}^tPBP = Diag(1,\ldots,1,0,\ldots,0).$$

Est-ce qu'un résultat analogue subsiste lorsque A *n'est pas définie ?*

Exercice 60 (Grand classique, au programme)**.**
Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Montrer que N provient d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallèlogramme,

$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2N(x)^2 + 2N(y)^2.$$

Exercice 61 (Entraînement)**.** *Soit A, B deux matrices symétriques réelles positives. On suppose que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,*

$$0 \leq^t XAX \leq^t XBX.$$

Montrer que $\det A \leq \det B$*.*

Exercice 62 (Classique)**.** *On considère la forme quadratique*

$$q : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} P(x)P(-x)dx \in \mathbb{R}.$$

1) Déterminer la signature de q.
2) Vérifier qu'il existe pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P_j \in \mathbb{R}_j[X]$ tel que

$$d^j(e^{-x^2})/dx^j = e^{-x^2} P_j(x)$$

et montrer que $\{P_j, j \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthogonale pour q.

Exercice 63 (Cours ?)**.** *Soit q une forme quadratique sur un K-ev E. Soit F un supplémentaire de $Ker\, q$. Montrer que $q_{|F}$ est non dégénérée.*

Exercice 64 (Décomposition polaire)**.**
1) Montrer que pour toute matrice inversible $M \in GL(n,\mathbb{R})$, il existe un couple unique $(O,S) \in O(n,\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = O \cdot S$.
2) Montrer que l'ensemble $O(n,\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est compact dans $M(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ (pour la topologie induite par une norme...laquelle ?).
3) Montrer que

$$\Phi : (O,S) \in O(n,\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto O \cdot S \in GL(n,\mathbb{R})$$

est un homéomorphisme.
4) Est-ce que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est fermé ? borné ? connexe ? convexe ?

Exercice 65 (Entraînement). *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que*

$$\det(Id + A)^{1/n} \geq 1 + \det A^{1/n}.$$

Exercice 66 (Classique). *Soit $f \geq 0$ une fonction continue non identiquement nulle. On considère*

$$\varphi : (P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \mapsto \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)dt \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que φ définit un produit scalaire.

2) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P_n, P_j) = \delta_{n,j}$. Quel vaut $\deg P_n$? Cette suite est-elle unique ?

3) Montrer que P_n a n racines réelles distinctes.

Exercice 67 (Original). *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.*

1) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle AX, X\rangle} dX = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

2) En déduire que si A est donnée sous forme de blocs,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_4 & A_2 \end{bmatrix} \text{ alors } \det A \leq \det A_1 \det A_2.$$

3) En déduire que si $M = (x_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ alors

$$(\det M)^2 \leq \Pi_i \sum_j x_{ij}^2.$$

Chapitre 4

Suites de fonctions

Introduction

Voici la première de deux feuilles d'exercices sur thème des "suites et séries de fonctions". L'ensemble contient une trentaine d'exercices, il est probable que nous ne les corrigerons pas tous.

Pour que les séances vous soit profitables, il faut que vous cherchiez certains de ces exercices chez vous, on corrigera prioritairement ceux auxquels vous avez réfléchi et qui vous posent problème. Notez bien que chercher ne signifie pas trouver et trouver n'est pas nécessairement comprendre. Ne vous découragez donc pas si vous bloquez, le mécanisme de la compréhension est long, d'autant plus qu'il s'agit là d'une partie importante du programme, à la frontière de l'Analyse Fonctionnelle (en gros l'étude topologique des espaces vectoriels de dimension infinie) et de l'Analyse classique en une variable réelle (d'où sont tirés la plupart des exemples, même s'il est plus approprié de faire la théorie des séries entières sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$).

J'ai classé de façon approximative les exercices en plusieurs catégories, *Cours* pour les propriétés qui figurent au programme et que vous devez absolument savoir démontrer, *Entraînement* pour des applications directes du cours ou des exercices pratiques et numériques, *Classique* voire *Grand classique* pour des exercices qui devraient faire partie de votre patrimoine et que tous les examinateurs connaissent (le jour de l'oral il faut qu'il y en ait un peu mais pas trop), *Original* pour des exercices "jolis" qui sortent un peu des sentiers battus (c'est très bien d'en placer un le jour de l'oral).

La plupart de ces exercices sont tirés d'un même recueil (autorisé), pour que vous puissiez les retrouver le jour J (je vous donnerai les références après les séances). S'il est besoin de vous motiver pour travailler ces notions fondamentales en prévision de l'écrit, sachez qu'il est rare qu'elles n'interviennent pas de façon essentielle dans la deuxième épreuve...Alors au travail et bon courage !

4.1 Rappels sur les suites dans les espaces métriques

Les suites de fonctions sont des éléments d'un espace vectoriel topologique (de dimension infinie), dont la topologie est bien souvent (mais pas toujours, attention !) *métrisable*, c'est à dire soit directement donnée par une métrique, soit telle qu'il en existe une (un peu tarabiscottée) qui induit la même topologie.

Il vous faut donc être au point tout d'abord sur la notion de convergence des suites dans les espaces métriques (et de temps en temps également sur un espace topologique plus général).

Exercice 68 (Classique/entraînement).

1) Montrer qu'une suite d'entiers est convergente ssi elle est stationnaire.

2) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un nombre irrationnel et $p_n/q_n \to x$ des approximants rationnels avec $(p_n, q_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Montrer que $p_n \to +\infty$.

Exercice 69 (Cours).

1) Soit (E, d) un espace métrique compact. Montrer qu'une suite d'éléments de E converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.

2) Est-ce vrai si on supprime l'hypothèse de compacité ?

Exercice 70 (Cours). *Soit (E, d) un espace métrique complet et $F \subset E$. Montrer que $(F, d_{|F})$ est complet ssi F est fermé.*

Exercice 71 (Classique).

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer que (E, N) est un Banach (i.e. est complet) ssi toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 72 (Cours). *Soit (E, d) un espace métrique.*

0) Donner un exemple d'une suite de Cauchy non convergente.

1) Montrer qu'une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence.

2) En déduire qu'une suite de Cauchy converge ssi elle admet une valeur d'adhérence.

3) En déduire qu'un espace métrique compact est complet.

Exercice 73 (Grand classique). *Soit (E, d) un espace métrique.*

1) Montrer que si a, b, c sont des réels positifs alors

$$c \leq a + b \Rightarrow \frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

2) En déduire que $\delta := d/(1+d)$ est une distance sur E

3) Montrer que (E, d) est complet ssi (E, δ) est complet.

4.2 Exemples d'espaces complets

Il existe des milliers d'exercices du type "montrer que tel espace de fonctions (ou de chaises) muni de telle distance est complet". Dans le cas des espaces vectoriels, la méthode de démonstration est quasi-systématiquement la même. Avec un peu d'entraînement et de persévérance, vous y arriverez très bien (mais pensez à entretenir votre forme...).

Exercice 74 (Cours). *Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ bornées, muni de la distance d induite par la norme $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.*

1) Montrer que $(\mathcal{B}, d)$ est complet.

2) Montrer que le sous-espace $E \subset \mathcal{B}$ des fonctions continues est fermé.

3) En déduire que $(E, d_{|E})$ est complet. Plus généralement, si E désigne à présent l'espace des fonctions continues sur un espace métrique (K, d_K) à valeurs dans un espace métrique (F, d_F), à quelles conditions sur $(K, d_K), (F, d_F)$, l'espace (E, d) est-il complet pour la distance

$$d(f, g) = \sup_{x \in K} d_F(f(x), g(x)) \ \ ?$$

Pour l'exercice qui suit, vous avez besoin d'un des rares théorèmes du programme sur la régularité d'une limite de suites de fonctions (voir la rubrique "espaces de Banach").

Exercice 75 (Quasi-cours). *Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ muni de*

$$d : (f, g) \in E^2 \mapsto \sum_{j \geq 0} 2^{-j} \frac{N_\infty(f^{(j)} - g^{(j)})}{1 + N_\infty(f^{(j)} - g^{(j)})}.$$

Montrer que d est une distance sur E et que (E, d) est complet.

Exercice 76 (Classique). *Soit $\alpha > 0$. On note $\mathcal{H}_\alpha$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ α-höldériennes, i.e. telles qu'il existe $C > 0$,*

$$\forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

On pose, pour $f \in \mathcal{H}_\alpha$,

$$N_\alpha(f) := |f(0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

1) Montrer que $\mathcal{H}_\alpha$ est constitué uniquement de fonctions constantes si $\alpha > 1$. Dans la suite on suppose donc $\alpha \leq 1$.

2) Donner un exemple de fonction dans $\mathcal{H}_\alpha$ non dérivable. Donner un exemple de fonction continue qui n'est dans aucun $\mathcal{H}_\alpha$.

3) Montrer que $(\mathcal{H}_\alpha, N_\alpha)$ est complet.

4) Mq $\mathcal{H}_\alpha(C) := \{f \in \mathcal{H}_\alpha \,/\, N_\alpha(f) \leq C\}$ est une famille équicontinue.

4.3 Plusieurs types de convergence

Il y a finalement assez peu de choses à savoir : il existe plusieurs types de convergence d'une suite de fonctions, disons pour simplifier de I dans $\mathbb{R}$, où I est un intervalle (convergence simple, uniforme, en norme L^p, presque partout, en mesure, pour une norme höldérienne, etc).

La convergence uniforme est l'une des plus fortes (mais il y a mieux, voir les exercices !). D'un point de vue pratique, on commence par s'intéresser à la convergence simple, puis on regarde le comportement des dérivées si les fonctions sont dérivables : si les dérivées restent uniformément bornées, alors il va y avoir convergence uniforme (pourquoi ?). Sinon, c'est qu'il n'y a probablement pas convergence uniforme.

D'un point de vue théorique, il y a deux théorèmes au programme :
1) "une limite uniforme de fonctions continues est continue" ;
2) "une limite simple de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si la suite des dérivées cv uniformément".

Il faut parfaitement maîtriser ces résultats (énoncés, preuves, utilisations) et savoir itérer le deuxième (pour appréhender les fonctions très régulières).

Exercice 77 (Classique). *On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des normes N_∞ et*

$$N_p(f) := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p},\ p \geq 1.$$

1) Montrer que pour $f \in E$, on a $N_p(f) \leq N_q(f) \leq N_\infty(f)$, pour $p \leq q$.

2) Construire une suite f_j de E qui converge simplement vers 0 et telle que $N_p(f_j) = 1$, $N_\infty(f_j) \to +\infty$.

3) Construire une suite $(g_j) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $N_2(g_j) \to +\infty$ et $N_1(g_j) = 1$.

L'exercice qui suit montre à quel point il est important de préciser le domaine sur lequel a (éventuellement) lieu la convergence uniforme : si elle est courante sur un compact, elle est beaucoup plus contraignante sur un ouvert.

Exercice 78 (Entraînement)**.**

0) Mqu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

1) Donner des exemples de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continues sur $\mathbb{R}$. Est-ce le cas de $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$?

2) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors il existe $a, b > 0$ tels que $|f(x)| \leq a|x| + b$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Mq si $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continues sur $\mathbb{R}$ convergent uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que si une suite de polynômes (P_j) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est un polynôme.

Voici quelques exemples de situations ou la convergence simple agrémentée d'une hypothèse supplémentaire entraîne la convergence uniforme.

Exercice 79 (Classique)**.** *Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.*

1) On suppose que $f_n \in \mathcal{H}_\alpha(C)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf notations Exercice 9). Montrer que $f \in \mathcal{H}_\alpha(C)$ et que (f_n) converge uniformément vers f.

2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction croissante de x. Montrer que si f est continue, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Est-il nécessaire de supposer f continue ?

3) Même question lorsque pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Chapitre 5

Séries de fonctions

Introduction

En principe il ne devrait pas être nécessaire de faire un cours différent pour les suites et pour les séries : une série (de fonctions) converge si et seulement si la suite des sommes partielles converge (simplement, uniformément,etc). Réciproquement, on peut étudier les propriétés d'une suite (f_n) en étudiant la série télescopique de terme général $f_n - f_{n-1}$.

En pratique c'est une toute autre histoire. Pour faire bref, retenez qu'établir la convergence d'une suite est une question fondamentale et difficile et qu'elle est un peu plus facile à appréhender lorsqu'on se la pose en termes de série. Une bonne illustration de ce principe est le concept de convergence normale qui n'a pas d'équivalent (pratique) dans le langage des suites.

Pour étudier en pratique la convergence d'une série de fonctions, on procède dans l'ordre inverse de ce qu'il faut faire pour les suites de fonctions ! On commence par étudier la convergence normale (c'est la plus forte, elle règle 95 % des cas). Si il n'y a pas convergence normale, on étudie la convergence uniforme au moyen de méthodes sophistiquées. Il y a essentiellement deux situations que vous devez connaître :

-les séries alternées (c'est rare mais facile),

-la transformation d'Abel (moins rare, très important, au programme).

Cela règle 4,99 % des cas restants. En tout dernier recours, on s'intéresse à la convergence simple qui n'est pas uniforme, c'est beaucoup plus subtil et rare...donc vous n'avez rien à savoir de particulier (si ce n'est un exemple, voir Exercice 81).

Vous devez enfin connaître un certain nombre de choses sur deux familles particulières (et particulièrement importantes) de séries de fonctions : les séries entières et les séries de Fourier. Tout ce qui se passe dans le disque ouvert de convergence des premières est au programme et est (relativement) simple : on travaille à l'intérieur du domaine de convergence normale. Ça se complique au bord du disque de convergence : la trace d'une série entière sur le bord de son disque de convergence est une série de Fourier et les questions de convergence de ces dernières sont subtiles.

Vous devez bien maîtriser la théorie L^2 des séries de Fourier (c'est à la fois relativement simple et un joli versant de l'algèbre bilinéaire). Il y a de plus trois résultats au programme sur les questions de convergence plus fines :

1) Si une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ alors sa série de Fourier converge normalement et donc tout va bien ! (on a juste besoin de continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux) ;

2) Théorème de Fejer (cvgce uniforme des moyennes de Césaro lorsque f est continue) ;

3) Théorème de Dirichlet (cvgce ponctuelle si...)

Et maintenant...au travail !

5.1 Convergence normale

Exercice 80 (Entraînement)**.** *Etudier le domaine de convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions*

$$\sum_{n\geq 0} u_n(x,y), \quad \text{où } u_n(x,y) = \frac{x^n}{1+y^n}.$$

Exercice 81. *[Grand classique]*

1) Montrer que la série de terme général $\frac{\sin(nx)}{n+1}$ *converge uniformément sur tout intervalle* $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, *mais qu'elle ne converge pas normalement.*

2) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 82 (Classique)**.**

1) Montrer que

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$$

définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_*^+$.

2) Calculer $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x)$ *et trouver un équivalent à* φ *en* 0^+.

Exercice 83 (Classique)**.** *Mêmes questions qu'à l'exercice précédent pour*

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+n^2x}.$$

5.2 Séries entières

Exercice 84 (Cours). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x) = \exp(-1/x) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0.$$

1) Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'elle n'est pas développable en série entière autour de 0.

2) Est-ce que f est développable en série entière autour de $x_0 \in \mathbb{R}^*$?

Exercice 85 (Cours). *Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière. On note R son rayon de convergence.*

1) Montrer que si $a_n = n!$ alors $R = 0$.

2) Montrer que si $a_n = n^{10} A^n$, $A > 0$, alors $R = 1/A$.

3) Montrer que si $a_n = n^{123}/n!$, alors $R = +\infty$.

4) On suppose que $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence.

Exercice 86 (Cours). *Montrer que la fonction exponentielle est DSE sur $\mathbb{R}$ et que*

$$\exp x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 87 (Entraînement). *Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles définies par la récurrence $u_0 = v_0 = 1$ et*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer les Rcv de $\sum_n \frac{u_n t^n}{n!}$, $\sum_n \frac{v_n t^n}{n!}$ et expliciter leurs sommes.

Exercice 88 (Grand classique). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction D.S.E en 0. On note R le rayon de convergence de la série de Taylor en zéro.*

1) Montrer que f est DSE en tout point z_0 tel que $|z_0| < R$.

2) Montrer que si $f(0) \neq 0$ alors $1/f$ est DSE en zéro. Que peut-on dire lorsque $f(0) = 0$?

Exercice 89 (Grand classique). *Soit f une série entière de rayon de convergence infini. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq N[1 + |f(z)|]^N.$$

Montrer que f est un polynôme de degré au plus N.

Exercice 90 (Entraînement). *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{e^t - 1} = 2 \sum_{\geq 1} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 91 (Classique). *On considère*

$$f(z) = \sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{n \log n}.$$

Montrer que quelque soit $\varepsilon > 0$, cette série entière converge uniformément sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq 1$ et $|z-1| \geq \varepsilon\}$.

Exercice 92 (Classique). *Soit $b_n > 0$ tel que $\sum b_n$ diverge et $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.*

1) Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $a_n \sim b_n$.

a) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est 1.

b) Montrer que $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n \geq 0} a_n x^n = +\infty$.

c) Montrer $\sum a_n x^n \sim \sum b_n x^n$ lorsque $x \to 1^-$.

2) En déduire un équivalent en 1^- à $\sum n^{p-1} x^n$.

Exercice 93 (Entraînement). *Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

5.3 Séries de Fourier

Exercice 94 (Classique).

1) Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*-périodique telle que* $f(x) = x^2$ *pour* $|x| \leq \pi$.

2) En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 95 (Entraînement).

1) Soit $\alpha > 0$*. Donner le D.S.F. de la fonction* 2π*-périodique définie par* $f(x) = \cos(\alpha x)$ *sur* $]-\pi, \pi[$.

2) En déduire que

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k \geq 1} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

Exercice 96 (Grand classique). *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

1) Montrer que

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-2i\pi nt} dt \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$.

2) Soit φ *une fonction* T*-périodique continue sur* $\mathbb{R}$*. Montrer que*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\varphi(\lambda t) dt \to \frac{1}{T} \int_0^T \varphi \cdot \int_0^{2\pi} f$$

lorsque $\lambda \to +\infty$.

Exercice 97 (Classique). *Soit* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telle que* $f'' + f \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}$*. Montrer que*

$$f(x) + f(x + \pi) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 98 (Grand classique). *Soit* $a < b$ *et* $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ *telle que* $f(a) = f(b) = 0$*. Montrer que*

$$\int_a^b (f')^2 \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b f^2$$

et caractériser les cas d'égalité. (On pourra se ramener à $[a, b] = [0, \pi]$ *et développer en série de Fourier.)*