Correction CC2 Proba-Stat

3IC, 2014-2015

Exc. 1 1) $F_{T_1}(x) = F_{T_2}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1-e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x<0. \end{cases}$

2) $$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\int_0^{\infty} x\cdot\left(e^{-\lambda x}\right)'dx$$
$$= \underbrace{\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}}_{0} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = -\left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{\infty} = \boxed{\frac{1}{\lambda}}.$$

$$\mathrm{Var}(T_i) = \mathbb{E}(T_i^2) - \left(\mathbb{E}(T_i)\right)^2.$$
$$\mathbb{E}(T_i^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\int_0^{\infty} x^2\cdot\left(e^{-\lambda x}\right)'dx$$
$$= -\underbrace{\left[x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}}_{0} + 2\underbrace{\int_0^{\infty} x\cdot e^{-\lambda x}\,dx}_{=\frac{1}{\lambda}\cdot\mathbb{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Var}(T_i) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \boxed{\frac{1}{\lambda^2}}.$$

3) $$\mathbb{P}(T<t) = \mathbb{P}(\max(T_1,T_2)<t) = \mathbb{P}(T_1<t \cap T_2<t) \overset{T_1, T_2 \text{ indép.}}{=} \mathbb{P}(T_1<t)\cdot\mathbb{P}(T_2<t)$$
$$= \left[\mathbb{P}(T_1<t)\right]^2 \text{ car } T_1, T_2 \text{ ont la même loi.}$$

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T\leq t) = \left[\mathbb{P}(T_1\leq t)\right]^2 = \begin{cases} \left(1-e^{-\lambda t}\right)^2, & \text{si } t\geq 0 \\ 0, & \text{si } t<0 \end{cases}$$

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} 2\left(1-e^{-\lambda t}\right)\cdot\left(1-e^{-\lambda t}\right)' = 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right), & \text{si } t>0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

4) $$\mathbb{P}(T>3000 \mid T>1000) = \frac{\mathbb{P}(T>3000 \cap T>1000)}{\mathbb{P}(T>1000)} = \frac{\mathbb{P}(T>3000)}{\mathbb{P}(T>1000)} =$$
$$= \frac{1-\mathbb{P}(T\leq 3000)}{1-\mathbb{P}(T\leq 1000)} = \frac{1-\left(1-e^{-3000\lambda}\right)^2}{1-\left(1-e^{-1000\lambda}\right)^2} = \boxed{\frac{2e^{-3000\lambda}-e^{-6000\lambda}}{2e^{-1000\lambda}-e^{-2000\lambda}}}.$$

5) $$\mathbb{E}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t\cdot f_T(t)\,dt = \int_0^{\infty}\left(2t\cdot\lambda e^{-\lambda t} - 2t\lambda e^{-2\lambda t}\right)dt$$
$$= 2\underbrace{\int_0^{\infty} t\cdot\lambda e^{-\lambda t}\,dt}_{=\frac{1}{\lambda}} - \underbrace{\int_0^{\infty} t\cdot 2\lambda e^{-2\lambda t}\,dt}_{\frac{1}{2\lambda}} = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \boxed{\frac{3}{2\lambda}}$$

$$\mathbb{E}(T) = \frac{3}{2\lambda} > \mathbb{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda}.$$

$\boxed{\text{Ex. 2}}$ 1) $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\left[\mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)\right] = \frac{1}{n} \cdot nm = m$

linéarité

$\Rightarrow \overline{X}_n$ estimateur sans biais de m.

Comme les (X_i) sont indép. et de même loi, avec $\mathbb{E}(X_i) = m$,

par la loi des grands nombres on a $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{proba}} m \Rightarrow \overline{X}_n$ estimateur consistant de m.

2) $\overline{X}_n$ est une somme de v.a. indép. de loi normale.

$\overline{X}_n$ suit donc une loi normale de param. $\mathbb{E}(\overline{X}_n)$ et $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$.

$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \frac{n \cdot 1}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{1}{n}\right)$.

indép.

3) $Z = \dfrac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{n}(\overline{X}_n - m) \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - m| \le c) = \mathbb{P}(|Z| \le c\sqrt{n}) = 95\% \Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(Z \le c\sqrt{n})}_{F_Z(c\sqrt{n})} = 97{,}5\%$

par symétrie de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow c\sqrt{n} = 1{,}96 \Rightarrow \underbrace{c = \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}}$.

$\mathbb{P}(-c \le \overline{X}_n - m \le c) = 0{,}95 \Leftrightarrow \mathbb{P}(m \in [\overline{X}_n - c, \overline{X}_n + c]) = 0{,}95$

$\Rightarrow IC_{0,95}(m) = \left[\overline{X}_n \pm \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right]$.

4) $IC_{0,95}(m) = \left[0{,}23 \pm \frac{1{,}96}{\sqrt{100}}\right] = [0{,}23 \pm 0{,}196] = [0{,}034 ; 0{,}426]$.

L'intervalle ne contient pas la valeur 0 (la borne inf. de l'intervalle > 0) $\Rightarrow$ on peut dire que le signal est effectif (à 95%)

5) Les (X_i) sont indép, de même loi et de variance $\sigma^2 = 1$.

Par le TCL on a $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} = \sqrt{n}(\overline{X}_n - m) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$.

6) De la question précédente on déduit que

$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - m| \le d_n) = \mathbb{P}(\sqrt{n}|\overline{X}_n - m| \le \sqrt{n}d_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(|Z| \le \sqrt{n}d_n)$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{P}(|Z| \le \sqrt{n}d_n) = 0{,}99 \Rightarrow \mathbb{P}(Z \le \sqrt{n}d_n) = 0{,}995$

par symétrie de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow F_Z(\sqrt{n}d_n) = 0{,}995 \Rightarrow \sqrt{n}d_n = 2{,}58 \Rightarrow \underbrace{d_n = \frac{2{,}58}{\sqrt{n}}}$.

$\Rightarrow IC_{0,99}(m) = [\overline{X}_n \pm d_n] = \left[\overline{X}_n \pm \frac{2{,}58}{\sqrt{n}}\right]$.

7) $IC_{0,99}(m) = \left[0{,}23 \pm \frac{2{,}58}{\sqrt{100}}\right] = [0{,}23 \pm 0{,}258] = [-0{,}028 ; 0{,}488]$.

L'intervalle contient la valeur 0 $\Rightarrow$ on ne peut pas être sûr (à 99%) que le signal est effectif.