Correction CC1 Proba-Stat

3IC, 2014–2015

Exc. 1 On note T l'événement "Théo arrive à 20h"

T^c " —"— 20h30"

V "Vincent arrive à 20h"

V^c " —"— 20h30".

On a $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(V) = \frac{2}{3}$; T et V événements indép.

1) $\mathbb{P}(T \cap V) \underset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}(V) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$ → la proba qu'ils assistent à la séance de 20h

$\mathbb{P}(T^c \cup V^c) = 1 - \mathbb{P}(T \cap V) = 1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$ → la proba qu'ils assistent à la séance de 20h30.

2) On note H l'événement "ils arrivent à 20h"

On a $H = T \cap V$ et $\mathbb{P}(H) = \frac{1}{6}$.

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap H) = \mathbb{P}(B | H) \times \mathbb{P}(H) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{18}}$.

3) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap H) + \mathbb{P}(A \cap H^c) = \mathbb{P}(A|H) \times \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(A|H^c) \times \mathbb{P}(H^c)$

(formule des probabilités totales) $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{9} + \frac{5}{24} = \boxed{\frac{23}{72}}$

4) $\mathbb{P}(H^c | A) = \frac{\mathbb{P}(H^c \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A | H^c) \times \mathbb{P}(H^c)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{5}{6}}{\frac{23}{72}} = \frac{\frac{5}{24}}{\frac{23}{72}} = \boxed{\frac{15}{23}}$

(formule de Bayes)

$\frac{15}{23} = \mathbb{P}(H^c | A) \neq \mathbb{P}(H^c) = \frac{5}{6}$ ⇒ H^c et A ne sont pas indép.

5) Réponse : $\frac{1}{4}$ par l'énoncé

6) $\mathbb{P}(X = 12) = \mathbb{P}(H) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X = 18) = \mathbb{P}(H^c) = \frac{5}{6}$.

X prend seulement deux valeurs : 12 ou 18.

7) $\mathbb{E}(X) = 12 \cdot \frac{1}{6} + 18 \cdot \frac{5}{6} = 2 + 15 = \boxed{17}$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$= 12^2 \cdot \frac{1}{6} + 18^2 \cdot \frac{5}{6} - 17^2 = 24 + 18 \cdot 15 - 17^2 =$

$= 24 + (17+1)(17-2) - 17^2 = 24 - 17 - 2 = \boxed{5}$.

$\boxed{\text{Exc. 2}}$

1) $1 - \frac{n-1}{n} = \boxed{\frac{1}{n}}$

2) $\mathbb{P}(T=2) = \frac{2-1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

$\mathbb{P}(T=3) = \frac{1}{2} \times \frac{3-1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

$$\mathbb{P}(T=k) = \underbrace{1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{k-1}}_{\text{la proba. de ne pas tomber en panne les } k-1 \text{ premières années}} \times \underbrace{\frac{k-1}{k}}_{\text{la proba de tomber en panne la } k\text{-ème année}} = \boxed{\frac{k-1}{k!}}.$$

3) $$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}}_{= e} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}}_{= e-1} = e - (e-1) = \boxed{1}.$$

4) $$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{P}(T=k) = \sum_{k=2}^{\infty} k \times \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \boxed{e} \simeq 2{,}71 .$$

Rappel : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ donc $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.