Contrôle final de Probabilités et Statistique

Durée 1h30

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème sur 20 est approximatif.

Exercice 1 (10 pts)
On considère un système formé de deux composants électroniques montés en parallèle. On modelise les durées de vie de ces composants (exprimées en heures) par des variables aléatoires T_1 et T_2 indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$, i.e. de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $T = \max(T_1, T_2)$ la durée totale de fonctionnement du système.

1. Déterminer la fonction de répartition des variables aléatoires T_1 et T_2.
2. Montrer que $\mathbb{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda}$, puis calculer $\mathrm{Var}(T_i)$, pour $i = 1, 2$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{P}(T < t) = [\mathbb{P}(T_1 < t)]^2$. En déduire que T admet comme densité de probabilité la fonction:

$$f_T(x) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x}) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Sachant que le système a fonctionné déjà pendant 1000 h, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore pendant au moins 2000 h supplémentaires?
5. Calculer la durée moyenne de fonctionnement du système et vérifier qu'elle est plus grande que la durée de vie moyenne de chacun des deux composants.

Exercice 2 (10 pts)
Un appareil de télécommunication reçoit un signal stocké à chaque (petit) pas de temps dans une suite de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ supposées indépendantes et de même loi normale de moyenne m et variance 1.

Cet appareil doit détecter un signal effectif (correspondant à une moyenne m non nulle), en le différenciant d'un bruit (correspondant à une moyenne $m = 0$).

1. Montrer que $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ est un estimateur consistant et sans biais pour m.
2. Donner la loi de $\bar{X}_n$. (Justifier).
3. Pour n fixé, déterminer $c > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \leq c) = 95\%.$$

En déduire un intervalle de confiance pour m de niveau de confiance 95%.

4. *Application numérique*: Calculer cet intervalle de confiance si on suppose que pour une suite de $n = 100$ observations on a obtenu une moyenne empirique $\bar{x}_n = 0.23$.

   Peut-on être sûr à 95% que le signal reçu est un signal effectif (pas un bruit)?

5. On suppose dans la suite que les X_i ne suivent pas une loi normale, mais une loi quelconque de moyenne m et de variance 1.

   Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)$ converge en loi quand $n \to \infty$ et préciser la loi limite.

6. Déterminer une suite de nombre réels $d_n > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \leq d_n) \longrightarrow 99\% \quad \text{quand } n \to \infty.$$

   En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour m, de niveau de confiance 99%.

7. *Application numérique*: Calculer cet intervalle de confiance si on suppose que pour $n = 100$ observations on a obtenu une moyenne empirique $\bar{x}_n = 0.23$.

   Peut-on être sûr à (approximativement) 99% que le signal reçu est un signal effectif?

   Indication: Quelques valeurs de la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

   $F_Z(0.99) = 0.84, F_Z(1.65) = 0.95,\ F_Z(1.96) = 0.975,\ F_Z(2.33) = 0.99, F_Z(2.58) = 0.995.$