Contrôle de Probabilités et Statistique

Durée 1h

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le barème sur 16 est approximatif.

Exercice 1 (9 pts.)
Théo et Vincent ont décidé d'aller ce soir au cinéma. Théo peut être au cinéma à 20h avec probabilité 1/4, ou à 20h30 avec probabilité 3/4. De manière indépendante, Vincent peut être au cinéma à 20h avec probabilité 2/3, où à 20h30 avec probabilité 1/3. Chacun a promis à l'autre de **l'attendre pour rentrer** dans la salle.

1. Quelle est la probabilité qu'ils assistent à la séance de 20h ? Même question pour la séance de 20h30.

A 20h, ils ont le choix entre le film A (qu'ils choisissent avec probabilité 2/3), et le film B (qu'ils choisissent avec probabilité 1/3). A 20h30, ils ont le choix entre le film A (qu'ils choisissent avec probabilité 1/4), et le film C (qu'ils choisissent avec probabilité 3/4).

2. Quelle est la probabilité pour qu'ils aient vu le film B ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'ils aient vu le film A ?
4. Sachant qu'ils ont vu le film A, quelle est la probabilité pour qu'ils aient assisté à la séance de 20h30 ? Les événements "voir le film A" et "assister à la séance de 20h30" sont-ils indépendants ?
5. Sachant que Vincent arrive à 20h30, quelle est la probabilité pour qu'il voit le film A ?

La place de cinéma coûte 6 euros à 20h mais 9 euros à 20h30. Soit X la variable aléatoire représentant l'argent total dépensé par Théo et Vincent pour l'achat des places.

6. Donner la loi de la variable aléatoire X.
7. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 (7 pts.)
On s'intéresse dans cet exercice à la durée de vie (en années) d'un certain composant. Ce composant s'use au fur et à mesure : la probabilité de tomber en panne au cours d'une année évolue donc avec le temps.

Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on suppose que le composant a une probabilité de $(n-1)/n$ de tomber en panne à l'année n si il fonctionnait à la fin de l'année $n-1$. La probabilité de tomber en panne au cours de la première année est donc supposée égale à 0.

Soit T la variable aléatoire désignant l'année à laquelle le composant tombe en panne.

1. Quelle est la probabilité que le composant ne tombe pas en panne au cours de l'année n, sachant qu'il fonctionnait à la fin de l'année $n-1$?
2. Déterminer $\mathbb{P}(T=2)$ et $\mathbb{P}(T=3)$. Montrer que
$$\mathbb{P}(T=k) = \frac{k-1}{k!} \quad ,\forall k \in \mathbb{N}^\star.$$
3. Vérifier que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=k) = 1$.
4. Calculer l'espérance de T.

Exercice 2

1). Soit B_n ='le composant fonctionne à la fin de l'année $n-1$' et A_n ='le composant tombe en panne au cours de l'année n'. D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(A_n/B_n) = \frac{n-1}{n}.$$

Par passage au complémentaire, on obtient donc

$$\mathbb{P}(A_n^c/B_n) = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

2). La variable T est à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $T = k$ si et seulement si le composant a fonctionné les $k-1$ premières années et est tombé en panne l'année k. D'après les données de l'énoncé, on a donc

$$P(T = k) = 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k-1} \times \frac{k-1}{k} = \frac{k-1}{k!}.$$

3.) ...

4). Par définition de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$