Probabilités et Statistique **2013-2014**
Préorientation IC 3ème année

Feuille d'exercices 3.
Variables aléatoires continues et Tables de la loi normale

Exercice 1. Loi Kappa
Soit X la variable aléatoire réelle de densité f_X définie par:

$$f_X(x) = \begin{cases} C\, xe^{-\kappa x} & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

où κ est un paramètre inconnu strictement positif.

1. Déterminez en fonction de κ la valeur de la constante C pour que f_X soit effectivement une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Montrez que l'espérance de la variable aléatoire X est égale à $\frac{2}{\kappa}$.
3. Montrez que sa variance est égale à $\frac{2}{\kappa^2}$.
4. Calculez la probabilité que X soit supérieure à son espérance.

Exercice 2. Durée de vie
La durée de vie T (exprimée en minutes) d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour déterminer l'espérance de vie d'un composant, on teste un grand nombre de composants et l'on obtient le résultat suivant : 2% des composants ont une durée de vie inférieure à 161 heures et 37 minutes. Déterminez l'espérance de vie d'un composant électronique.
2. Déterminez le nombre t_0 tel que $\mathbb{P}(T > t_0) = 0.85$.
3. Sachant que le composant était encore en fonction à la date t_0, quelle est la probabilité qu'il le soit encore à la date $t_1 = 5000$ heures ? Interprétez le résultat obtenu.

Exercice 3. Ascenseur avec charge de tolérance
Un ascenseur peut porter une charge maximale de 500 kg. On admet que le poids (en kilogrammes) d'un individu, pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur, est représenté par une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(75, 4^2)$.

Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter ensemble dans l'ascenseur si l'on veut que le risque de sucharge ne dépasse pas 10^{-6} ?
Indication: On donne pour Z de loi normale centrée et réduite : $\mathbb{P}(Z > 4.75) = 10^{-6}$.

Exercice 4. Premier appel

Pour tout $t > 0$ on appelle N_t la variable aléatoire représentant le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique entre l'instant 0 et l'instant t. On suppose que pour tout $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt, avec $\lambda > 0$. On s'intéresse à la variable aléatoire T qui représente le temps d'attente du premier appel.

1. Pour tout $t > 0$, exprimez l'événement $\{T > t\}$ à l'aide de la variable aléatoire N_t. Calculez ensuite $\mathbb{P}(T > t)$.

2. Déterminez la fonction de répartition et la densité de T. Quelle loi suit T?

Exercice 5. Couple de variables aléatoires continues

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi jointe a pour densité:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } (x,y) \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin \mathcal{D}, \end{cases}$$

où $\mathcal{D}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $\mathcal{D} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : y - x \geq 0\}$.

1. Vérifiez que f est bien une densité de probabilité.

2. Donnez les lois marginales de X et Y.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 1

Question 1. On a
$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = C\int_0^{+\infty} xe^{-\kappa x}dx.$$
Par ailleurs, en utilisant une intégration par partie, on obtient
$$\int_0^{+\infty} xe^{-\kappa x}dx = \left[-x.\frac{1}{\kappa}e^{-\kappa x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\kappa}\int_0^{+\infty} e^{-\kappa x}dx = \frac{1}{\kappa}\left[-\frac{1}{\kappa}e^{-\kappa x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\kappa^2}. \tag{1}$$
Au final, il faut donc choisir $C = \kappa^2$.

Question 2. En appliquant les formules du cours,
$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx = \kappa^2\int_0^{+\infty} x^2e^{-\kappa x}dx.$$
Par ailleurs, en utilisant à nouveau un IPP,
$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-\kappa x}dx = \left[-\frac{x^2}{\kappa}e^{-\kappa x}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\kappa}\int_0^{+\infty} xe^{-\kappa x}dx = \frac{2}{\kappa^3}, \tag{2}$$
où on a utilisé (1) pour la dernière égalité. Finalement
$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\kappa}.$$

Question 3. (*assez calculatoire, donc à sauter si nécessaire*) On commence par calculer, en utilisant (2)
$$\mathbb{E}[X^2] = \kappa^2\int_0^{+\infty} x^3e^{-\kappa x}dx = \kappa^2\left[-\frac{x^3}{\kappa}e^{-\kappa x}\right]_0^{+\infty} + 3\kappa\int_0^{+\infty} x^2e^{-\kappa x}dx = 3\kappa\times\frac{2}{\kappa^3} = \frac{6}{\kappa^2}.$$
Finalement
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{6}{\kappa^2} - \left(\frac{2}{\kappa}\right)^2 = \frac{2}{\kappa^2}.$$

Question 4. En utilisant encore une IPP et le résultat de la question 1, on a
$$\begin{aligned}
P(X > \mathbb{E}[X]) &= P\left(X > \frac{2}{\kappa}\right), \\
&= \int_{2/\kappa}^{+\infty} \kappa^2 xe^{-\kappa x}dx, \\
&= \kappa^2\left[-\frac{x}{\kappa}e^{-\kappa x}\right]_{2/\kappa}^{+\infty} + \kappa\left[-\frac{1}{\kappa}e^{-\kappa x}\right]_{2/\kappa}^{+\infty}, \\
&= 2e^{-2} + e^{-2} \simeq 0.41.
\end{aligned}$$