Probabilités et Statistique **2013-2014**
Préorientation IC 3ème année

Feuille d'exercices 2.
Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Compagnie aérienne
Pour maximiser son profit, une compagnie aérienne décide de vendre 100 billets pour 97 places. On suppose que chaque passager annule sa réservation avec une probabilité de 5% et indépendamment des autres passagers. On note X le nombre d'annulations.

1. Déterminez la loi de la variable aléatoire X.
2. Calculez le nombre moyen d'annulations.
3. Quelle est la probabilité pour que tous les passagers aient une place ?

Exercice 2. Durée de vie
Une entreprise commercialise un composant electronique dont la durée de vie est supposée aléatoire. Tant qu'il fonctionne, et dans des conditions d'utilisation 'normales', ce composant a une probabilité p de tomber en panne chaque année. Ce comportement est supposé indépendant d'une année sur l'autre pendant toute sa durée de vie. De même, la valeur de p est supposée inchangée pendant toute la période d'utilisation. On note T l'année à laquelle le composant tombe en panne ($T = 1$ si il tombe en panne au cours de la première année, ...).

1. Quelle est la loi de T ? Vérifiez que la somme des probabilités vaut 1.
2. Calculez la durée de vie moyenne d'un composant électronique.
3. Déterminez $\mathbb{P}(T > 3)$, la probabilité que le composant fonctionne au moins 3 ans.
4. Déterminez $\mathbb{P}(T > 5|T > 2)$, la probabilité que le composant fonctionne plus de 5 ans sachant qu'il est en service depuis 2 ans.
5. Comparez les deux probabilités calculées aux questions précédentes et commentez la modélisation de cette durée de vie.

Exercice 3. Durée de vie, en série
On considère un système formé de deux composants électroniques montés en série, de probabilités respectives p et p' de tomber en panne chaque année, indépendamment entre eux et d'une année à une autre. Pour $i = 1, 2$ on note T_i l'année à laquelle le composant i tombe en panne. On appelle T l'année à laquelle le système tombe en panne.

1. Exprimer T en fonction de T_1 et T_2.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité que le système fonctionne au moins k ans.
3. En déduire $\mathbb{P}(T = k)$. Quelle est la loi de T?

Exercice 4. Contrôle qualité
Une entreprise de construction produit des objets sur une chaîne de montage. La probabilité qu'un objet produit par celle-ci soit défectueux est égale à p. On suppose que le nombre d'objets produits en une heure par cette chaîne est une v.a.r. Y suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On s'intéresse dans cet exercice au nombre d'objets défectueux, cette quantité étant désignée par X par la suite.

1. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(X = i|Y = j)$. En déduire la loi du couple (X, Y).

2. Déterminer la loi de X.

3. Quel est le nombre moyen d'objets non-défectueux produits par la chaîne de montage en une heure?

4. Montrer que les variables aléatoires X et $Y - X$ sont indépendantes.

Exercice 5. "Somme de Poisson"
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs μ et λ. Déterminez la loi de la somme $S = X + Y$.