CC2 Probas
IC3

2013 - 2014

Correction

Exercice 1

1°. $X \sim N(0,1)$ $\quad Y \sim N(1,2)$

$S = X + Y \sim N(1,3)$

$T = 3X \sim N(0,9)$ $\quad (Var(3X) = 9 Var(X))$

$V = X + 4 \sim N(4,1)$.

2°. $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ $\quad Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$

$X+Y$ à valeurs ds $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{l=0}^{k} \{X=l\} \cap \{Y=k-l\}\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X=l \cap Y=k-l)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X=l)\,\mathbb{P}(Y=k-l)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{l}}{l!}\, e^{-\lambda_2}\frac{(\lambda_2)^{k-l}}{(k-l)!}$$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \times \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k} C_k^l \lambda_1^l \lambda_2^{k-l}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}.$$

Exercice 2

1°. $\mathbb{P}(X<a) = 1 - \mathbb{P}(X \geq a) = 0$.

et $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ $\quad (t \geq a)$

$= 1 - \mathbb{P}(X > t)$

$$= \begin{cases} 1 - \left(\frac{t}{a}\right)^{-k} = 1 - \left(\frac{a}{t}\right)^k, & t \geq a \\ 0, & \text{si } t < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_X(t) = k\left(\frac{t}{a}\right)^{-k-1} \times \frac{1}{a}, \text{ si } t \geq a$$

$= k a^k t^{-(k+1)}$ $\quad$ (et 0 sinon)

2°. $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx$

$= \int_a^{+\infty} k a^k \frac{1}{x^k}\,dx < +\infty$

si $k > 1$. (intégrale de Riemann)

Dans ce cas :

$$\mathbb{E}[X] = k a^k \left[x^{-k+1} \times \frac{1}{1-k} \right]_a^{+\infty}$$

$$= -k \cancel{a^k} \times \cancel{a}^{-k+1} \times \frac{1}{1-k}$$

$$= a \frac{k}{k-1}.$$

3/ $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

et $\mathbb{E}[X^2] = \int_a^{+\infty} k a^k \frac{1}{x^{k-1}} dx < +\infty$

si $k-1 > 1 \Leftrightarrow k > 2$.

Dans ce cas,

$$\mathbb{E}[X^2] = k a^k \left[x^{2-k} \times \frac{1}{2-k} \right]_a^{+\infty}$$

$$= -k \cancel{a^k} a^{2-\cancel{k}} \times \frac{1}{2-k}$$

$$= a^2 \frac{k}{k-2}.$$

et donc $Var(X) = a^2 \left(\frac{k}{k-2} - \frac{k^2}{(k-1)^2} \right)$.

4/ $\mathbb{P}(X > x+y / X > x)$ $(x \geq a)$.

$$= \frac{\mathbb{P}(\{X > x+y\} \cap \{X > x\})}{\mathbb{P}(X > x)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > x+y)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{a^k}{(x+y)^k} \times \frac{x^k}{a^k}$$

$$= \frac{x^k}{(x+y)^k} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Si $x+y < a$: $\mathbb{P}(X > x+y \mid X > x) = 1$

$x < a$, $x+y \geq a$: $\mathbb{P}(X > x+y \mid X > x) = \frac{a^k}{(x+y)^k}$.

Exercice 3

1/ Y à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

$P(Y = -1) = P(X < 1) = \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - e^{-1}$.

$P(Y = 0) = \int_1^2 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_1^2 = e^{-1} - e^{-2}$.

$P(Y = 1) = \int_2^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-2}$.

2°/ $\mathbb{E}[Y] = -(1-e^{-1}) + 1 \times e^{-2}$

$= e^{-1} + e^{-2} \mp 1.$

$\mathbb{E}[Y^2] = (1-e^{-1}) + e^{-2} = 1 + e^{-2} - e^{-1}.$

et $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \dots$

3°/ On a par exemple :

$P(\{Y=0\} \cap \{X<1\}) = 0$

$\neq P(Y=0)\, P(X<1).$

donc X et Y ne sont pas indépendantes.

4°/ $P(\{Y=0\} \cap \{X>2\}) = 0$

donc $\mathbb{P}(\{Y=0\} \cap \{X \geq 1\}) = \mathbb{P}(\overbrace{Y=0 \cap X \in [1,2]}^{\text{le même événement}})$

$= \mathbb{P}(X \in [1,2])$

On a donc :

$$P(Y=0 / X \geq 1) = \frac{P(Y=0 \cap X \in [1,2])}{P(X \geq 1)}$$

$$= \frac{\overbrace{P(Y=0 / X \in [1,2])}^{=1}\, P(X \in [1,2])}{P(X \geq 1)}$$

$$= \frac{e^{-1} - e^{-2}}{e^{-1}} = 1 - \frac{e^{-2}}{e^{-1}}.$$

5°/ De même,

$P(X \geq 3 / Y = 1) = P(X \geq 3 / X > 2).$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq 3)}{\mathbb{P}(X > 2)} = \frac{e^{-3}}{e^{-2}} = e^{-1}.$$

Exercice 4

1°/ Soit $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{ème personne est malade} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$X = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \mathcal{B}(N, p)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = Np$ et $\mathrm{Var}(X) = Np(1-p).$

2°/ TCL ($\mathrm{Var}(X_i) < +\infty$)

$$\frac{X - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \xrightarrow[N \to +\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$$ donc $X \overset{\text{loi}}{\approx} \mathcal{N}(Np, Np(1-p))$

3°/ a) $\hat{p} = \frac{X}{N} = \overline{X_N}$

$\mathbb{E}[\hat{p}] = p$ et $\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{N}.$

4. On cherche t t.q $P(|\bar{X}_N - p| \leq t) = 95\%$.

On :

$$P(|\bar{X}_N - p| \leq t) = P\left(\frac{\sqrt{N}\,|\bar{X}_N - p|}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{t\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

$$\underset{N \text{ grand}}{\overset{\text{TCL}}{\simeq}} P\left(|Z| \leq \frac{t\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right).$$

$$\rightsquigarrow \frac{t\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}} = 1{,}96 \Leftrightarrow t = \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}.$$

donc

$$\mathbb{P}\left(p \in \left[\bar{X}_N \pm \frac{1{,}96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}\right]\right) \simeq 95\%$$

$\longrightarrow$ remplacer $p(1-p)$ par $\bar{X}_N(1-\bar{X}_N)$

donne

$$IC_{95\%}(p) = \left[\bar{X}_N \pm 1{,}96\frac{\sqrt{\bar{X}_N(1-\bar{X}_N)}}{\sqrt{N}}\right].$$

<u>A.N</u> : $N = 641$, $\bar{X}_N = \frac{32}{641}$

$$IC_{95\%}(p) = \left[\frac{32}{641} \pm 1{,}96 \times \frac{\sqrt{\frac{32}{641}\left(1 - \frac{32}{641}\right)}}{\sqrt{641}}\right].$$