Correction CC1 de Proba - Stat

3 IC , 2013-2014

Exc. 1

1) $\Omega = \{(G,G), (G,F), (F,G), (F,F)\}$ avec G = garçon, F = fille

$\mathbb{P}((G,F)) \underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}(G) \times \mathbb{P}(F) = p \times (1-p)$.

indép. des naissances

2) $\mathbb{P}(A) = 1-p$, $\mathbb{P}(B) \overset{\text{par énoncé}}{=} p$, $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}((F,F)) + \mathbb{P}(G,G) \overset{\text{indép. des naissances}}{=} (1-p)^2 + p^2$

$= 1 + p^2 - 2p + p^2 = \underline{1 - 2p + 2p^2}$

3) Les événements A et B sont indépendantes car on a supposé que les différentes naissances sont indép.

4) B et C indép. $\Leftrightarrow \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$.

Mais $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}((G,G)) = p^2$, donc

B et C indép. $\Leftrightarrow p^2 = p \times (1 - 2p + 2p^2)$ (*)

Comme $p \neq 0$, (*) $\Leftrightarrow p = 1 - 2p + 2p^2 \Leftrightarrow 2p^2 - 3p + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$; $p_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} < \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$

Comme on a supposé dans l'énoncé que $p \neq 1$, la seule solution est donc $p = \frac{1}{2}$.

B et C indép. $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$.

5) Si $p = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}((F,F)) = (1-p)^2 = \frac{1}{4} = \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{\frac{1}{2}} \times \underbrace{\mathbb{P}(C)}_{\frac{1}{2}}$

donc A et C sont indép.

6) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

car $A \cap B \cap C$ est un événement impossible.

On a donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$, ce qui montre que les événements A, B, C ne sont pas indép. dans leur ensemble, même si ils sont indép. 2 à 2 pour $p = \frac{1}{2}$.

Exc. 2 $X, Y \sim$ Géom (p), indép., $Z = X + Y$

1) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p(1-p)^{k-1} = -p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)^k]'$

$= -p \Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k}_{=}\Big]' = -p \left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right)' = -p \left(\frac{1}{p}\right)' = -p \cdot \frac{-1}{p^2} = \boxed{\frac{1}{p}}$.

2)

$$\mathbb{P}(Z=2) = \mathbb{P}(X+Y=2) = \mathbb{P}(X=1 \cap Y=1) \underset{\text{X, et Y indep.}}{=} \mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1) = p\times p =$$

$$\mathbb{P}(Z=3) = \mathbb{P}(X+Y=3) = \mathbb{P}(X=1 \cap Y=2) + \mathbb{P}(X=2\cap Y=1)$$

$$\underset{\text{indep}}{=} \underbrace{\mathbb{P}(X=1)}_{p}\times\underbrace{\mathbb{P}(Y=2)}_{p(1-p)} + \underbrace{\mathbb{P}(X=2)}_{p(1-p)}\times\underbrace{\mathbb{P}(Y=1)}_{p} = \underline{2p^2(1-p)}$$

$$\mathbb{P}(Z=n) = \mathbb{P}(X+Y=n) = \mathbb{P}(X=1\cap Y=n-1) + \mathbb{P}(X=2\cap Y=n-2) + \dots + \mathbb{P}(X=n-1 \cap$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X=i \cap Y=n-i) \underset{\text{indep.}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{\mathbb{P}(X=i)}_{p(1-p)^{i-1}} \times \underbrace{\mathbb{P}(Y=n-i)}_{p(1-p)^{n-i-1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = \underline{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}, \quad \text{pour } n\geq 2$$

3) $$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,\mathbb{P}(Z=n) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p^2(1-p)^{n-2} \underset{\text{indication}}{=} p^2\times\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \boxed{\frac{2}{p}}.$$

Une autre méthode :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X+Y) \underset{\text{linéarité}}{=} \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}+\frac{1}{p} = \boxed{\frac{2}{p}}.$$

Exc. 3 1) $\Omega = \{(b,b),(b,n),(n,b),(n,n)\}$,

b = blanche

n = noire

B_1 = boule blanche en premier

B_2 = boule blanche en deuxième

$$\mathbb{P}((b,b)) = \mathbb{P}(B_1\cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{4}{10}\times\frac{5}{11} = \frac{2}{11}.$$

$$\mathbb{P}((b,n)) = \mathbb{P}(B_1\cap B_2^c) = \mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}(B_2^c|B_1) = \frac{4}{10}\times\frac{6}{11} = \frac{12}{55}$$

$$\mathbb{P}((n,b)) = \mathbb{P}(B_1^c\cap B_2) = \mathbb{P}(B_1^c)\times\mathbb{P}(B_2|B_1^c) = \frac{6}{10}\times\frac{4}{11} = \frac{12}{55}$$

$$\mathbb{P}((n,n)) = \mathbb{P}(B_1^c\cap B_2^c) = \mathbb{P}(B_1^c)\times\mathbb{P}(B_2^c|B_1^c) = \frac{6}{10}\times\frac{7}{11} = \frac{21}{55}.$$

2) $$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1\cap B_2) + \mathbb{P}(B_1^c\cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}(B_2|B_1) + \mathbb{P}(B_1^c)\times\mathbb{P}(B_2|B_1^c)$$

(la formule des probabilités totales)

$$= \frac{2}{11}+\frac{12}{55} = \frac{22}{55} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

3) $$\mathbb{P}(B_1^c|B_2) = \frac{\mathbb{P}(B_1^c\cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} = \frac{\mathbb{P}(B_1^c)\times\mathbb{P}(B_2|B_1^c)}{\mathbb{P}(B_2)} = \frac{\frac{12}{55}}{\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{6}{11}}.$$

(formule de Bayes)