Rattrapage de Probabilités et Statistique

Durée 1h30

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème sur 20 est indicatif.

Exercice 1 (7 points)

1. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que
$$\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 .$$
2. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathcal{N}(1,2)$. Donner la loi de chacune des variables aléatoires suivantes : $S = X+Y$, $T = 3X$ et $V = X+4$.
3. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Donner la loi de chacune des variables aléatoires suivantes : $S = X+Y$, $T = 3X$ et $V = X+4$.
4. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
5. Enoncer le Théorème Central Limite.
6. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Proposer un estimateur de la variance σ^2.

Exercice 2. (6 points)

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et Y une variable aléatoire indépendante de Z telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$. On pose $X = YZ$.

On note F_Z la fonction de répartition de Z.

1. Calculer l'espérance de Y.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(X \leq t \mid Y = 1)$ et $\mathbb{P}(X \leq t \mid Y = -1)$ en fonction de F_Z.
3. En déduire une expression de la fonction de répartition de X à l'aide de F_Z.
4. Montrer que X suit aussi une loi normale centrée et réduite.

   Indication : En dérivant par rapport à t la relation obtenue à la question précédente, vous pourriez déduire une relation entre les densités f_X et f_Z.
5. Vérifier que l'on a bien $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$.
6. Calculer $\mathbb{P}(Z > 1 \ \cap \ X > 1)$. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Tourner la page S.V.P. .../...

Exercice 3. (4 points)

Dans un intervalle de temps d'une heure, un système de communication doit recevoir n signaux $s_1, \ldots, s_n$, mais pas forcément dans cette ordre. Pour tout $i = 1, \ldots, n$ on note U_i l'instant auquel le signal s_i est réceptionné. On suppose que les variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$, de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit S l'instant de reception du premier signal, autrement dit $S = \min(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

1. Pour $t \in [0,1]$, calculer $\mathbb{P}(U_1 \leq t)$, puis $\mathbb{E}(U_1)$ et $\mathrm{Var}(U_1)$.
2. Pour $t \in [0,1]$, montrer que
$$\mathbb{P}(S > t) = (1-t)^n.$$
3. En déduire la fonction de répartition, puis la densité de la variable aléatoire S.
4. Calculer $\mathbb{E}(S)$.

Exercice 4. (3 points)

Le poids de paquets de poudre de lessive, à l'issue de l'empaquetage, est supposé suivre une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. L'écart-type, égal à 5, représente la variabilité du poids due à l'imprécision de la machine. La moyenne m est elle supposée égale à 710 gr. Toutes les heures, 10 paquets sont prélevés au hasard et pesés. Les poids correspondants sont notés $X_1, \ldots, X_{10}$. On supposera par la suite que les X_i sont des variables indépendantes de même loi $\mathcal{N}(710, 25)$.

1. Calculer $\mathbb{E}(\bar{X}_{10})$ et $\mathrm{Var}(\bar{X}_{10})$.
2. Quelle est la loi de $\bar{X}_{10}$ (à justifier).
3. Afin de vérifier la conformité du poids des paquets, on décide d'interrompre la production à chaque fois que $\bar{X}_{10} \leq t$. Déterminer le réel t de telle sorte que
$$\mathbb{P}(\bar{X}_{10} \leq t) = 5\%.$$

Quelques données numériques : Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et F_Z sa fonction de répartition. On a les valeurs approchées suivantes :

$$F_Z(0.95) = 0.829, \ F_Z(1.65) = 0.95, \ F_Z(1.96) = 0.975.$$