INSA de Toulouse - 3A IC Vendredi 10 janvier 2014

Contrôle final de Probabilités et Statistique

Durée 1h30

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème sur 20 est indicatif.

Exercice 1 (3 points)

1. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathcal{N}(1,2)$. Donner la loi de chacune des variables aléatoires suivantes : $S = X+Y$, $T = 3X$ et $V = X+4$.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exercice 2 (5 points)
Soit X une variable aléatoire telle que

$$\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{-k}, \text{ pour } x \geq a,$$

où $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ sont deux paramètres fixés.

1. Déterminer la fonction de répartition de X et montrer que la densité de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} ka^k x^{-(k+1)} & \text{si } x \geq a, \\ 0 & \text{si } x < a. \end{cases}$$

2. Préciser pour quelles valeurs du paramètre k la variable aléatoire X admet une espérance, et donner $\mathbb{E}(X)$ dans ce cas.
3. Pour quelles valeurs de k la variable aléatoire X admet-elle une variance ? Donner $\mathrm{Var}(X)$ dans ce cas.
4. Pour $x > 0,\ y > 0$ calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X > x + y \mid X > x)$.
   Pour $y > 0$ fixé, préciser la limite de cette probabilité quand $x \to \infty$.

Exercice 3 (6 points)
Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre 1, i.e. de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On définit la variable Y par

$$Y = \begin{cases} -1 & \text{si } X < 1, \\ 0 & \text{si } X \in [1,2], \\ 1 & \text{si } X > 2. \end{cases}$$

1. Donner la loi de la variable aléatoire Y.
2. Calculer l'espérance et la variance de Y.
3. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

   Indication : Une variable aléatoire continue U et une variable aléatoire discrète V sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}(\{U \in [a,b]\} \cap \{V = v\}) = \mathbb{P}(U \in [a,b])\mathbb{P}(V = v)$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et v valeur possible de V.

4. Montrer que
$$\mathbb{P}(\{Y=0\}\cap\{X\geq 1\}) = \mathbb{P}(\{Y=0\}\cap\{X\in[1,2]\}).$$
En déduire la valeur de
$$\mathbb{P}(Y=0 \mid X\geq 1).$$
5. De même, calculer
$$\mathbb{P}(X\geq 3 \mid Y=1).$$

Exercice 4 (6 points)
Dans une population de taille N, on souhaite faire un dépistage systématique d'une maladie que l'on peut détecter à l'aide d'une analyse de sang. La solution basique consiste à faire une analyse par personne. On suppose que, pour chaque personne, la probabilité qu'elle soit malade vaut p, indépendamment des autres personnes de la population. On appelle X le nombre de malades dans cette population.

1. Quelle est la loi de X ? Sa moyenne ? Son écart-type ?
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X, pour N grand ?
3. On cherche à présent à estimer p.
   (a) Donner un estimateur de p. Calculer son espérance et sa variance.
   (b) Sachant que l'on a observé 32 malades dans une population de taille N=641, donner un intervalle de confiance pour p de niveau de confiance 95%.
   (Justifier les étapes de la construction de l'intervalle de confiance.)

Quelques données numériques : Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et F_Z sa fonction de répartition. On a les valeurs approchées suivantes :
$$F_Z(0.95) = 0.829,\ F_Z(1.65) = 0.95,\ F_Z(1.96) = 0.975.$$