

Contrôle de Probabilités et Statistique

Durée 1h

*Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le barème sur 14 est approximatif.*

Exercice 1 (5 pts.)

On suppose qu'à chaque naissance il y a une probabilité p pour que le bébé soit un garçon, avec $0 < p < 1$, indépendamment entre les différentes naissances. On s'intéresse à une famille qui a deux enfants et on note A l'événement "le premier enfant est une fille", B l'événement "le deuxième enfant est un garçon" et C l'événement "les deux enfants sont de même sexe".

1. Ecrire l'espace des issues. Montrer que la probabilité que le 1er enfant soit un garçon et le second une fille est égale à $p(1-p)$.
2. Donner $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$ en fonction de p .
3. Montrer que les événements A et B sont indépendants.
4. Montrer que les événements B et C sont indépendants si et seulement si $p = 1/2$.
5. Montrer que pour $p = 1/2$ les événements A et C sont aussi indépendants.
6. Pour p quelconque dans $]0, 1[$, calculer $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

Exercice 2 (5 pts.)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $Z = X + Y$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(Z = 2)$ et $\mathbb{P}(Z = 3)$. Montrer que $\mathbb{P}(Z = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Z .

Indication : Vous pouvez admettre et utiliser le résultat suivant (dérivée seconde d'une série géométrique) :

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)r^{k-2} = \frac{2}{(1-r)^3}, \text{ pour } r \in]-1, 1[.$$

Exercice 3 (4 pts.)

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune initialement 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire au hasard une boule dans U_1 et sans la regarder on la place dans U_2 , puis on tire au hasard une boule dans U_2 . On s'intéresse à la couleur des deux boules tirées successivement.

1. Ecrire l'espace des issues ainsi que la probabilité associée à chaque issue.
2. Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit de couleur blanche ?
3. Sachant que la deuxième boule est de couleur blanche, quelle est la probabilité que la première soit de couleur noire ?