

**Feuille d'exercices 4.**  
**Théorèmes limites - Estimation**

**Exercice 1.** Un producteur de vin vend des bouteilles de contenu déclaré de 750 ml. On suppose que la machine de remplissage automatique des bouteilles produit un contenu aléatoire (exprimé en ml) modélisé par une variable aléatoire  $X$ , de loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

1. En supposant l'écart-type connu  $\sigma = 20$  ml, à quelle valeur de  $m$  devrait le producteur régler sa machine si il veut être sûr à 90% qu'une bouteille est remplie avec un contenu suffisant?
2. Un étudiant en statistique, en stage chez le producteur, sélectionne au hasard  $n = 51$  bouteilles de vin dans la cave. Il mesure le contenu de chacune des bouteilles et trouve un contenu moyen  $\bar{x}_n = 760$  ml avec un écart-type  $s_n = 24.2$  ml. Construisez un intervalle de confiance pour  $m$  de niveau de confiance 90%, dans les deux cas suivants:
  - (a) l'écart-type  $\sigma$  est supposé connu et égal à 20 ml;
  - (b) l'écart-type  $\sigma$  est supposé inconnu.

**Exercice 2. Estimation de la moyenne**

Une balance fournit la masse d'un objet avec un écart-type de  $\sigma = 1$  mg. On admet que le résultat d'une pesée suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  où  $m$  est un paramètre inconnu correspondant à la valeur moyenne. On réalise  $N$  mesures indépendantes  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .

1. Proposer un estimateur de  $m$ , et donner sa loi.
2. Donner la formule d'un intervalle de confiance pour  $m$  avec coefficient de sécurité 95%.
3. Quelle est la valeur minimale de  $N$  pour laquelle la longueur de l'intervalle de confiance est inférieure à 0,3 mg ?

**Exercice 3. Sondage**

La veille des élections présidentielles on effectue un sondage auprès de  $n$  personnes, afin d'estimer la proportion  $p$  de personnes dans la population totale qui ont l'intention de voter pour un certain candidat. On note  $\hat{p}_n$  la proportion de personnes interrogées qui affirment avoir l'intention de voter pour ce candidat.

1. Déterminer le nombre minimal  $n$  de personnes que l'on doit interroger si l'on veut être sûr à 95% d'estimer  $p$  avec une précision de 1%:

$$\mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| \leq 1\%) \geq 95\%$$

- (a) en utilisant l'inégalité de Chebychev;
  - (b) en utilisant le théorème central limite.
2. Un sondage effectué sur  $n = 100$  personnes indique que 51% des personnes interrogées ont l'intention de voter pour ce candidat. Donnez un intervalle de confiance asymptotique pour  $p$  de niveau 95%.
  3. Même question si ce pourcentage est observé avec un échantillon de  $n = 10000$  personnes.

**Exercice 4. Test**

Un hôpital utilise un même médicament sous deux dilutions, la forme A étant plus diluée que la forme B. Un lot de ce médicament arrive à l'hôpital. Malheureusement, le fabricant a oublié d'étiqueter le lot. Le laboratoire de l'hôpital effectue donc une série de 10 dosages pour déterminer s'il s'agit de la forme A ou B. S'il s'agit de la forme A, le résultat d'un dosage suit la loi  $\mathcal{N}(300, 50)$ . S'il s'agit de la forme B, cette loi est  $\mathcal{N}(600, 50)$ . Les résultats des 10 dosages ont donné

528 467 659 568 619 614 601 539 543 577

Effectuez un test permettant de se décider entre la forme A ou B, si on veut contrôler la probabilité de se tromper en décidant qu'il s'agit de la forme A.