

Feuille d'exercices 3.
Variables aléatoires continues et Tables de la loi normale

Exercice 1. Loi uniforme

Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$ telle que, pour tout intervalle inclu dans $[0, 1]$, la probabilité que U appartienne à cet intervalle est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.

1. Déterminez la fonction de répartition de U , sa densité de probabilité, son espérance et sa variance.
2. Soit U de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $X = -\frac{\ln(U)}{\lambda}$, avec $\lambda > 0$. Déterminez la fonction de répartition et la densité de X . Quelle loi suit X ?

Exercice 2. Durée de vie

La durée de vie T (exprimée en minutes) d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour déterminer l'espérance de vie d'un composant, on teste un grand nombre de composants et l'on obtient le résultat suivant : 2% des composants ont une durée de vie inférieure à 161 heures et 37 minutes. Déterminez l'espérance de vie d'un composant électronique.
2. Déterminez le nombre t_0 tel que $\mathbb{P}(T > t_0) = 0.85$.
3. Sachant que le composant était encore en fonction à la date t_0 , quelle est la probabilité qu'il le soit encore à la date $t_1 = 5000$ heures ? Interprétez le résultat obtenu.

Exercice 3. Ascenseur avec charge de tolérance

Un ascenseur peut porter une charge maximale de 500 kg. On admet que le poids (en kilogrammes) d'un individu, pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur, est représenté par une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(75, 4^2)$.

Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter ensemble dans l'ascenseur si l'on veut que le risque de surcharge ne dépasse pas 10^{-6} ?

Indication: On donne pour Z de loi normale centrée et réduite : $\mathbb{P}(Z > 4.75) = 10^{-6}$.

Exercice 4. Premier appel

Pour tout $t > 0$ on appelle N_t la variable aléatoire représentant le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique entre l'instant 0 et l'instant t . On suppose que pour tout $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt , avec $\lambda > 0$. On s'intéresse à la variable aléatoire T qui représente le temps d'attente du premier appel.

1. Pour tout $t > 0$, exprimez l'événement $\{T > t\}$ à l'aide de la variable aléatoire N_t . Calculez ensuite $\mathbb{P}(T > t)$.
2. Déterminez la fonction de répartition et la densité de T . Quelle loi suit T ?

Exercice 5. Couple de variables aléatoires continues

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi jointe a pour densité:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } (x, y) \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \mathcal{D}, \end{cases}$$

où \mathcal{D} est le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 donné par $\mathcal{D} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 : y - x \geq 0\}$.

1. Vérifiez que f est bien une densité de probabilité.
2. Donnez les lois marginales de X et Y .
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?