Probabilités et Statistique **2012-2013**
Préorientation IC 3ème année

Feuille d'exercices 2.
Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Compagnie aérienne

Pour maximiser son profit, une compagnie aérienne décide de vendre 100 billets pour 97 places. On suppose que chaque passager annule sa réservation avec une probabilité de 5% et indépendamment des autres passagers. On note X le nombre d'annulations.

1. Déterminez la loi de la variable aléatoire X.
2. Calculez le nombre moyen d'annulations.
3. Quelle est la probabilité pour que tous les passagers aient une place ?

Exercice 2. Durée de vie

Une entreprise commercialise un composant electronique dont la durée de vie est supposée aléatoire. Tant qu'il fonctionne, et dans des conditions d'utilisation 'normales', ce composant a une probabilité p de tomber en panne chaque année. Ce comportement est supposé indépendant d'une année sur l'autre pendant toute sa durée de vie. De même, la valeur de p est supposée inchangée pendant toute la période d'utilisation. On note T l'année à laquelle le composant tombe en panne ($T = 1$ si il tombe en panne au cours de la première année, ...).

1. Quelle est la loi de T ? Vérifiez que la somme des probabilités vaut 1.
2. Calculer la durée de vie moyenne d'un composant électronique.
3. Déterminer $\mathbb{P}(T > 3)$, la probabilité que le composant fonctionne au moins 3 ans.
4. Déterminer $\mathbb{P}(T > 5|T > 2)$, la probabilité que le composant fonctionne plus de 5 ans sachant qu'il est en service depuis 2 ans.
5. Comparer les deux probabilités calculées aux questions précédentes et commenter la modélisation de cette durée de vie.

Exercice 3. Durée de vie, en série

On considère un système formé de deux composants électroniques montés en série, de probabilités respectives p et p' de tomber en panne chaque année, indépendamment entre eux et d'une année à une autre. Pour $i = 1, 2$ on note T_i l'année à laquelle le composant i tombe en panne. On appelle T l'année à laquelle le système tombe en panne.

1. Exprimez T en fonction de T_1 et T_2.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculez la probabilité que le système fonctionne au moins k ans.
3. Déduisez-en $\mathbb{P}(T = k)$. Quelle est la loi de T?

Exercice 4. Pontes de tortues
Le nombre d'oeufs pondus par une tortue au cours d'une ponte est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que chaque oeuf a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'arriver à éclosion, indépendamment des autres et du nombre d'oeufs pondus. Pour chaque i, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème oeuf est arrivé à éclosion, et 0 sinon. Enfin, on note Y le nombre de bébés tortues issus d'une ponte.

1. Quelle loi suivent les variables aléatoires Y_i?
2. Écrire Y en fonction des Y_i et de X.
3. Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = j\}$, pour j entier fixé ?
4. En déduire la loi de Y.

Exercice 5. "Somme de Poisson"
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs μ et λ. Déterminez la loi de la somme $S = X + Y$.