

Feuille d'exercices 1.
Dénombrement, probabilités et probabilités conditionnelles

Exercice 1. Lancer de dés

On lance deux dés équilibrés à 6 faces. Soit A l'événement '*obtenir un double*' et B '*la somme des lancés est égale à 6*'. Ecrivez l'espace des issues associé à cette expérience puis calculez $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants?

Exercice 2. Jeu de cartes

On tire au hasard trois cartes dans un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité pour que la couleur des trois cartes soit trèfle ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux cartes de même couleur (pique, coeur, carreau, trèfle) ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un as ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir, dans l'ordre: un as, un roi et un coeur ?

Exercice 3. Bon anniversaire !

Si l'on considère qu'il y a 365 jours dans une année, quelle est la probabilité de trouver, dans un groupe de n personnes prises au hasard, au moins deux avec le même jour anniversaire? Calculez cette probabilité pour différentes valeurs de n .

Exercice 4. La dilemme d'Ali Baba

Le sultan dit à Ali Baba: "Voici deux urnes, 4 boules blanches et 4 boules noires. Répartis toi-même les boules dans les urnes. Je rendrai ensuite les urnes indiscernables et tu tireras une seule boule d'une seule des urnes. Tu auras la vie sauve si la boule est blanche".

1. Calculez la probabilité que Ali Baba ait la vie sauve dans chacun des cas suivants:
 - (a) il place les 4 boules blanches dans une urne et les 4 noires dans l'autre urne;
 - (b) il place 2 boules blanches et 2 boules noires dans chaque urne;
 - (c) il place 3 boules blanches dans une urne et puis 1 boule blanche et 4 boules noires dans l'autre urne.
2. Comment Ali Baba maximise-t-il ses chances?

Exercice 5. Alcootest

Un laboratoire a mis au point un alcootest dont les propriétés sont les suivantes:

- il se révèle positif pour quelqu'un qui n'est pas en état d'ébriété dans 2% des cas;
- il se révèle positif pour quelqu'un qui est en état d'ébriété dans 96% des cas.

Lors d'un contrôle d'alcoolémie, on estime que 3% des conducteurs sont en état d'ébriété ce soir-là.

1. Un contrôle avec cet alcootest s'étant révélé positif, quelle est la probabilité que le conducteur ne soit pas en état d'ébriété ?
2. Si le contrôle se révèle négatif, quelle est la probabilité que le conducteur ne soit effectivement pas en état d'ébriété ?
3. Que pensez vous de cet alcootest?

Exercice 6. Systèmes série-parallel

Un système S est constitué de deux sous-systèmes A et B placés en parallèle, le sous-système A étant composé de composants électroniques A_1, A_2 et A_3 placés en série. On suppose que pour $i = 1, 2, 3$, la probabilité que le composant A_i fonctionne au bout d'un an est de 0.9, indépendamment des autres composants. De plus, on admet que la probabilité que le composant B fonctionne au bout d'un an est de 0.95 si le système A fonctionne à ce moment, et de 0.8 sinon. Soit les événements:

- $F = \{ \text{le système } S \text{ fonctionne au bout d'un an} \}$;
- $F_X = \{ \text{le sous-système } X \text{ fonctionne au bout d'un an} \}$, pour $X = A$ ou B .

Calculez les probabilités $\mathbb{P}(F_B)$, $\mathbb{P}(F)$, $\mathbb{P}(F_B|F)$ et $\mathbb{P}(F_A^C \cap F)$.

Exercice 3

Ici, les issues sont de la forme $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ où pour tout i , $\omega_i \in \{1, \dots, 365\}$. On peut donc écrire que

$$\Omega = \{1, \dots, 365\}^n.$$

Les dates d'anniversaire étant indépendantes d'une personne à l'autre, on a

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{365^n} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Il y a équiprobabilité: pour tout événement A , $P(A) = \text{card}(A)/\text{card}(\Omega)$. En particulier, si $A =$ "les personnes sont toutes nées un jour différent", on obtient

$$P(A) = \frac{A_{365}^n}{365^n}.$$

Il suffit ensuite de passer au complémentaire pour avoir le résultat souhaité.