Correction

Rattrapage examen de Probabilités et Statistiques

IC 3, 24/01/2011

Exercice 1

1) $Z = X + Y$

$$Z \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(Z=-1) = \mathbb{P}(X=-1, Y=0) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathbb{P}(X=-1)\,\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(X=-1, Y=1) + \mathbb{P}(X=0, Y=0) = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X=-1, Y=2) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Z=2) = \mathbb{P}(X=0, Y=2) + \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{P}(Z=3) = \mathbb{P}(X=1, Y=2) = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 0 + \frac{1+2}{3} = \boxed{1}, \quad \mathrm{Var}(Z) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{2}{3} + \left(\frac{5}{3} - 1\right) = \boxed{\frac{4}{3}}$$

2) Z et X indép. $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(Z=k, X=i) = \mathbb{P}(Z=k)\,\mathbb{P}(X=i)$ $\forall\, k, i$.

$$\mathbb{P}(Z=3, X=1) = \mathbb{P}(Z=3) = \frac{1}{9} \neq \mathbb{P}(Z=3)\,\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

$\Rightarrow$ Z et X ne sont pas indép.

3) $$\mathbb{E}(\sqrt{Y}) = \sqrt{0}\cdot\frac{1}{3} + \sqrt{1}\cdot\frac{1}{3} + \sqrt{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1+\sqrt{2}}{3}.$$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

1) $$\mathbb{E}(R) = \int_0^3 r \cdot f_R(r)\,dr = \frac{2}{9}\int_0^3 (3r^2 - r^3)\,dr$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\left[r^3 - \frac{r^4}{4}\right]_0^3 = \frac{2}{9}\left(27 - \frac{81}{4}\right) = 6 - \frac{9}{2} = \boxed{1{,}5}.$$

2) $S = 4\pi R^2$

$$\mathbb{E}(S) = 4\pi\,\mathbb{E}(R^2) = 4\pi\cdot\int_0^3 r^2\cdot f_R(r)\,dr =$$

$$= 4\pi\cdot\frac{2}{9}\int_0^3 (3r^3 - r^4)\,dr = \frac{8\pi}{9}\left[\frac{3r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right]_0^3 =$$

$$= \frac{8\pi}{9}\cdot\left(\frac{3^5}{4} - \frac{3^5}{5}\right) = 8\pi\cdot 27\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{54\pi}{5}}$$

3) $$F_S(s) = \mathbb{P}(S \le s) = \mathbb{P}(4\pi R^2 \le s) = \mathbb{P}\left(R \le \sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right)$$

$$= F_R\left(\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right)$$

$$= F_R\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right).$$

4) $$f_S(s) = F_S'(s) = F_R'\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right)\cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{s}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi s}}\cdot f_R\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right).$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi \cancel{s}}}\,\frac{\cancel{2}}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{\cancel{s}}{\pi}}\left(3 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}}\right),$$

si $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\pi}} \le 3$

$\Leftrightarrow 0 \le s \le 36\pi$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{36\pi}\left(3 - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{s}{\pi}}\right), & \text{si } 0 \le s \le 36\pi \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3

$X =$ la vitesse d'une automobile

$$X \sim \mathcal{N}(72, 8^2) \rightsquigarrow Z = \frac{X-72}{8} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

1) $\mathbb{P}(X > 80) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{80-72}{8}\right) = \mathbb{P}(Z > 1) = 1 - \mathbb{P}(Z < 1)$

$$= 1 - 0{,}8413 = \boxed{0{,}1587} \simeq 16\%$$

avec la table de $\mathcal{N}(0,1)$

2) $\mathbb{P}(X > 110 \mid X > 80) = \dfrac{\mathbb{P}(\{X > 110\} \cap \{X > 80\})}{\mathbb{P}(X > 80)} =$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > 110)}{\mathbb{P}(X > 80)} \cong \frac{0{,}000001}{16/100} = \boxed{\frac{0{,}0001}{16}} < 0{,}00001$$

$$\mathbb{P}(X > 110) = 1 - \mathbb{P}(X < 110) = 1 - \mathbb{P}\left(Z < \frac{110-72}{8}\right) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(Z < \frac{38}{8}\right) = 1 - \mathbb{P}(Z < 4{,}75)$$

$$\simeq 1 - 0{,}999999 \simeq 0{,}000001$$

Exercice 4

1) $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = 0, \ldots, Y_n = 0) \overset{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(Y_1 = 0) \ldots \mathbb{P}(Y_n = 0) = \underline{(1-p)^n}$

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{si la } i^{\text{ème}} \text{ personne est malade} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$Y_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ indép.

$\mathbb{P}(Y_i = 1) = p$.

$\mathbb{P}(X = n+1) = 1 - \mathbb{P}(X = 1)$, car X est une v.a. qui peut prendre seulement les valeurs 1 et $n+1$

$$= 1 - (1-p)^n.$$

2) $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + (n+1)\cdot \mathbb{P}(X=n+1)$

$= (1-p)^n + (n+1)\left[1-(1-p)^n\right] = \underline{n+1 - n\cdot(1-p)^n}.$

3) $\underline{\mathbb{E}(X) < n.} \iff \underline{n\cdot(1-p)^n > 1}.$

$p = 5\%$

$\boxed{n=2}$: $n\cdot(1-p)^n = 2\cdot(0{,}95)^2 = 2\cdot 0{,}9025 > 1$

$\Rightarrow$ la 2ème méthode est économique par rapport à la 1ère

$\boxed{n=100}$: $n\cdot(1-p)^n = 100\cdot(0{,}95)^{100} = 100\cdot 0{,}0059 = 0{,}59 < 1$

$\Rightarrow$ la 2ème méthode n'est pas économique par rapport à la 1ère.

4) $$\overline{Z}_N = \frac{Z_1 + \dots + Z_N}{N}$$

$Z_1 + \dots + Z_N \sim \mathcal{B}(N, p)$

$\overline{Z}_N$ prend les valeurs $\frac{k}{N}$, $k \in \{0, \dots, N\}$

$$\mathbb{P}\left(\overline{Z}_N = \frac{k}{N}\right) = C_N^k\, p^k (1-p)^{N-k}.$$

5) Par le TCL :

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_N - Np}{\sqrt{N p(1-p)}} \xrightarrow[N\to\infty]{Loi} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{N}(\overline{Z}_N - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow[N\to\infty]{Loi} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-1{,}96 < \frac{\sqrt{N}(\overline{Z}_N - p)}{\sqrt{p(1-p)}} < 1{,}96\right) \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ 0{,}95}}{\mathbb{P}(-1{,}96 < Z < 1{,}96)}$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\overline{Z}_N - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} < p < \overline{Z}_N + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0{,}95$$

$$\overline{Z}_N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathbb{P}} p$$ donc on obtient

$$\mathbb{P}\left(\overline{Z}_N - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\overline{Z}_N(1-\overline{Z}_N)}{N}} < p < \overline{Z}_N + 1{,}96\sqrt{\frac{\overline{Z}_N(1-\overline{Z}_N)}{N}} \right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0{,}95$$

$$IC_{0{,}95}(p) = \left[\overline{Z}_N \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\overline{Z}_N(1-\overline{Z}_N)}{N}} \right].$$