Corrigé CC2, IC3
21 janvier 2011

Exercice 1

1) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. X_i v.a. à valeurs dans $\{0,1\}$.

$P(X_i = 0) = P(U_i > p) = \int_p^{+\infty} f_{U_i}(x)\,dx = \int_p^1 dx = 1-p$

$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p$.

$\Rightarrow X_i \sim \mathcal{B}er(p)$.

2) On a $Y = |\{i, U_i \leq p\}| = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (X_i compte 1 si $U_i \leq p$).

Y somme de Bernoulli indépendantes $\Rightarrow Y \sim \mathcal{B}(n,p)$.

3) $V = \max(U_1, \dots, U_n)$ $P(V \leq p) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{U_i \leq p\}\right)$ indep

$= \prod_{i=1}^{n} P(\{U_i \leq p\})$

$= p^n$.

De la même manière :

$P(W \leq p) = 1 - P(W > p) = 1 - (1-p)^n$

4) Soit $\lambda > 0$ et $T = -\frac{\ln(U_1)}{\lambda}$. T à valeurs dans $[0; +\infty[$.

Si $t < 0$ $F_T(t) = 0$.

Si $t \geq 0$ $F_T(t) = P\left(-\frac{\ln(U_1)}{\lambda} \leq t\right) = P(\ln(U_1) \geq -t\lambda)$

$= P(U_1 \geq e^{-t\lambda})$

$= 1 - e^{-t\lambda}$

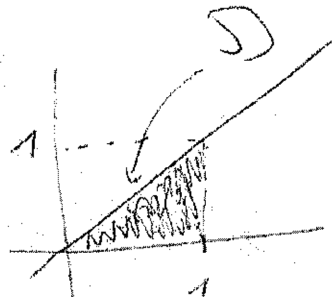
On obtient ainsi que

$f_T(t) = F_T'(t)$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

T suit une loi exponentielle de param. λ.

Exercice 2



1) On a $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$

$= \iint_D \frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\int_0^y \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)dy$

$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\left[\sqrt{x}\right]_0^y dy = \int_0^1 dy = 1$ ok.

2) En reprenant le calcul ci-dessus, on a vu que :

$$\int_D f(x,y)\,dx = \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dx \times \mathbb{1}_{\{y\in[0,1]\}} = \mathbb{1}_{\{y\in[0,1]\}}$$

$\Rightarrow Y \sim U_{[0,1]}$

Densité marginale de X :

$$\int_D f(x,y)\,dy = \mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}} \int_x^1 f(x,y)\,dy$$

$$= \mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}} \int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dy = \mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}} \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\sqrt{y}\right]_x^1$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & \text{si } x\in[0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) On remarque que :

$$f_X(x)\,f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & \text{si } x,y\in[0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\neq f(x,y)$ X et Y ne sont donc pas indépendantes.

4) $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\,f_X(x)\,dx$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \qquad \boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}}$$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

Or $\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx$

$$= \int_0^1 (x^{3/2} - x^2)\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{15} - \frac{1}{36}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[Y] = 1/2}$$

$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$

$$\boxed{\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{12}}$$

$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 y^2\,dy = \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Exercice 3

1) X_i et $\mathcal{E}_i$ gaussiennes indépendantes
donc $Y_i = X_i + \mathcal{E}_i \sim N(\mu, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

2) $\mathbb{E}[\bar{Y}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i] = \mu$ (linéarité de l'espérance)

$Var(\bar{Y}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$ (indep des Y_i).

$\Rightarrow \bar{Y}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}\right)$.

3) On cherche t t.q :

$P(|\bar{Y}_n - \mu| < t) = 95\%$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{\sqrt{n}\,|\bar{Y}_n - \mu|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} < \frac{t\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \right) = 95\%$.

$\frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \mu)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \sim N(0,1)$

$\Leftrightarrow P\left(|Z| < \frac{t\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right) = 95\%$ où $Z \sim N(0,1)$

$\Leftrightarrow \frac{t\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} = 1,96 \Leftrightarrow t = 1,96 \times \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{n}}$

On obtient donc l'IC :

$\left[\bar{Y}_n \pm 1,96 \times \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sqrt{n}} \right]$

Les erreurs $\mathcal{E}_i$ amènent une variance supplémentaire.

4) Sur ces réalisations, $\bar{y}_n = 0,3$. L'IC devient :

$\left[0,3 \pm 1,96 \times \frac{1}{10} \right] \approx [0,11 ; 0,50]$.

5) $\mathbb{E}[Y_i^2] < +\infty \quad \forall i, \quad Y_i$ i.i.d

$\frac{\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \mu)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$.