# Correction Evaluation 1

3 IC, 2012-2013

**Exc. 1**

1) $X$ peut prendre toutes les valeurs de $0$ à $N$.

2) $\mathbb{P}(X=N) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_N) \overset{\text{indép.}}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^N$.

avec $R_i$ l'événement "il réussit le niveau $i$"

C'est la probabilité que le joueur finisse le jeu en réussissant tous les niveaux.

3) $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(R_1^c) = \frac{1}{3}$ ; $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2^c) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k \cap R_{k+1}^c) = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^k \times \frac{1}{3}}$, pour $1 \leq k \leq N-1$.

4) $$\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^N$$

$$= \frac{1}{3} \times \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^N$$

somme des $N$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ $\rightarrow$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^N}{1-\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^N = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N + \left(\frac{2}{3}\right)^N = \boxed{1}.$$

5) $\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(\text{le joueur réussit au moins } k \text{ niveaux}) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k)$
$= \left(\frac{2}{3}\right)^k$, pour $k \in \{1, \dots, N\}$.

ou (calcul direct)

$\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X < k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k-1)$, pour $k \in \{1, \dots, N\}$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X=i) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^i \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

$\rightarrow$ Pour $k=0$ : $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, donc la relation est vérifiée $\forall k \in \{0, \dots, N\}$.

6) $$\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq 1) + \mathbb{P}(X \geq 2) + \mathbb{P}(X \geq 3) + \mathbb{P}(X \geq 4)$$

$$\begin{aligned} = {} & \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \\ & + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) \\ & + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) \\ & + \mathbb{P}(X=4) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(X=1) + 2\,\mathbb{P}(X=2) + 3\,\mathbb{P}(X=3) + 4\,\mathbb{P}(X=4)$$

$$= \sum_{k=0}^{4} k\,\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}(X).$$

7) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^N$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{N-1}\right] = \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^N}{1-\frac{2}{3}} =$$

$$= 2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^N\right] = 2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}.$$

---

$\boxed{\text{Exc. 2}}$

1) $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{boule blanche} \\ \text{au } 1^{\text{er}} \text{ tirage}\end{array}\right) = \frac{6}{6+9} = \frac{6}{15} = \boxed{\frac{2}{5}}$

$$\mathbb{P}(B_2 | B_1) = \frac{(6-1)+4}{(6-1)+4+9} = \frac{9}{18} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

on soustrait 1 du nb. de boules blanches car la $1^{\text{ère}}$ boule est tirée sans remise.

2) $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2 | B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{5}}$

3) $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2 \cap B_1) + \mathbb{P}(B_2 \cap B_1^c)$

$$= \mathbb{P}(B_2 | B_1) \times \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2 | B_1^c) \times \mathbb{P}(B_1^c)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \boxed{\frac{7}{20}}$$

$$\mathbb{P}(B_2 | B_1^c) = \frac{6}{6+(9-1)+10} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

4) $\mathbb{P}(B_1 | B_2) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} = \frac{\mathbb{P}(B_2 | B_1) \times \mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(B_2)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{20}} = \boxed{\frac{4}{7}}.$