Contrôle final de Probabilités et Statistique

Durée 1h30

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème sur 20 est indicatif.

Quelques données numériques utiles pour l'ensemble du sujet :

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et F_Z sa fonction de répartition. On a les valeurs approchées suivantes :

$$F_Z(1) = 0.841,\ F_Z(1.65) = 0.95,\ F_Z(1.96) = 0.975,\ F_Z(3) = 0.9987.$$

Exercice 1 (2,5 points)

1. Énoncez l'inégalité de Chebychev.
2. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes, de lois respectives $\mathcal{N}(1,8)$ et $\mathcal{N}(2,8)$. Soit $S = X + Y$. Donnez la loi de S, ainsi que son espérance et sa variance. Calculez ensuite $\mathbb{P}(S < -1)$.

Exercice 2 (9 points)

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Donnez la densité et la fonction de répartition de X.
2. Soit $\mu > 0$. On pose $Y = \frac{X}{\mu}$. Calculez la fonction de répartition de Y et donnez sa loi.
3. Soit $0 < p < 1$ et Z une variable aléatoire, indépendante de X, telle que

$$\mathbb{P}(Z = 1) = p,\ \mathbb{P}(Z = -1) = 1 - p.$$

On pose $T = XZ$.

(a) Calculez l'espérance et la variance de Z.

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculez $\mathbb{P}(T > t\ \cap\ Z = 1)$ et $\mathbb{P}(T > t\ \cap\ Z = -1)$, puis $\mathbb{P}(T > t)$, en distinguant les cas $t \geq 0$ et $t < 0$.

(c) Montrez que la fonction de répartition de T est donnée par

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - pe^{-t} & \text{si } t \geq 0, \\ (1-p)e^{t} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

(d) Déterminez la densité de T.

(e) Calculez l'espérance de T et vérifiez que $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)$.

(f) Montrez que les variables T et Z ne sont pas indépendantes.

Indication : Une variable aléatoire continue U et une variable aléatoire discrète V sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}(\{U \in [a,b]\}\ \cap\ \{V = v\}) = \mathbb{P}(U \in [a,b])\ \mathbb{P}(V = v)$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et v valeur possible de V.

Exercice 3 (8,5 points)
Dans une promotion INSA de 1ère année formée de 400 étudiants, on suppose que chaque étudiant souhaite aller en pré-orientation IC avec probabilité p, et ce indépendamment des autres étudiants.

1. Pour estimer p, on interroge n étudiants de la promotion sur leur choix de pré-orientation. Pour $1 \leq i \leq n$ on pose $X_i = 1$ si le $i$ème étudiant interrogé souhaite aller en IC et 0 sinon. On définit ensuite
$$\hat{p}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$
   (a) Montrez que $\hat{p}_n$ est un estimateur consistant et sans biais de p.
   (b) Justifiez le fait que, pour n grand, la loi de $\hat{p}_n$ peut être approximée par une loi normale, dont vous préciserez les paramètres.
   (c) Construisez un intervalle de confiance asymptotique pour p de niveau de confiance 95%. Justifiez les différentes étapes de la construction.
   (d) On suppose que l'on a interrogé 100 étudiants de la promotion, et que 20 étudiants parmi ceux interrogés souhaitent aller en IC. Donnez une estimation ponctuelle de p, ainsi qu'un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95%.
2. On suppose dans la suite que $p = 0.2$. On appelle N le nombre total d'étudiants, parmi les 400 étudiants de la promotion, qui souhaitent aller en IC.
   (a) Quelle loi suit N ? Donnez son espérance et sa variance.
   (b) Par quelle loi, dont on précisera les paramètres, peut-on approximer la loi de N ? Justifiez.
   (c) On suppose que la pré-orientation IC peut accueillir au maximum 104 étudiants. Donnez une valeur approchée de la probabilité que la pré-orientation IC soit obligée de refuser des étudiants.