

## Evaluation 1

Durée 1 heure.

*Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.  
Le barème sur 14 est indicatif.*

### Exercice 1 (9 pts.)

Un jeu vidéo est constitué de  $N$  niveaux successifs. Lorsque le joueur commence un niveau (ce qui suppose qu'il ait réussi les niveaux précédents), la probabilité qu'il le réussisse est  $2/3$ . Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui est égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.

1. Quelles sont toutes les valeurs possibles pour  $X$  ?
2. Calculer  $\mathbb{P}(X = N)$ . Que représente cette probabilité ?
3. Calculer  $\mathbb{P}(X = 0)$ ,  $\mathbb{P}(X = 1)$  puis  $\mathbb{P}(X = k)$  pour tout  $k \in \{1, \dots, N - 1\}$ .
4. Vérifier que

$$\sum_{k=0}^N \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

5. Pour tout entier  $0 \leq k \leq N$ , montrer que

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

6. On suppose pour cette question que le jeu a  $N = 4$  niveaux. Montrer que la relation

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(X \geq k). \quad (1)$$

est vraie pour  $N = 4$ .

*Indication* : Vous pourriez utiliser la relation  $\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{i=k}^4 \mathbb{P}(X = i)$ , pour tout  $k \leq 4$ .

7. On admettra dans cette question que l'équation (1) est vraie pour tout entier  $N$ .

Montrer alors que

$$\mathbb{E}(X) = 2 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}.$$

### Exercice 2 (5 pts.)

Une urne contient 15 boules, dont 6 blanches et 9 rouges. On tire au hasard et sans remise une boule de l'urne. Si la boule est blanche, on ajoute 4 boules blanches dans l'urne, sinon on ajoute 10 boules rouges. Puis on tire de nouveau une boule. Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on considère l'événement

$B_i$  : "tirer une boule blanche au  $i$ -ème tirage".

1. Calculer  $\mathbb{P}(B_1)$  et  $\mathbb{P}(B_2|B_1)$ .
2. Quelle est la probabilité d'obtenir successivement deux boules blanches ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au second tirage ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule blanche au premier tirage, sachant que la boule tirée au second tirage est blanche ?