

Evaluation 1

Durée 1 heure.

*Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Le barème sur 14 est indicatif.*

Exercice 1 (4,5 pts.)

On interroge des étudiants sur la signification du sigle "ADN". A chacun, on propose trois réponses différentes : A , B ou C , la réponse correcte étant la réponse A . Tout étudiant connaissant la réponse correcte la donne, sinon il choisit au hasard une des trois réponses proposées. On note θ la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse et p_A la probabilité qu'un étudiant interrogé donne la réponse A .

1. Exprimer p_A en fonction de θ .
2. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant choisi la réponse A connaisse réellement la signification du sigle "ADN" ?
3. Sur un groupe de 24 étudiants, on note N le nombre de bonnes réponses. Quelle loi suit N ? Justifier.
4. Quelle est l'espérance du nombre de bonnes réponses obtenues dans ce groupe ?

Exercice 2 (4 pts.)

Pour valider une épreuve de saut en hauteur, un sportif doit réussir deux fois le même saut (mais pas forcément à des essais consécutifs). On suppose qu'à chaque essai il a une probabilité p de réussir le saut, indépendamment d'un essai à un autre. On note S le nombre d'essais que le sportif doit faire pour valider l'épreuve.

1. Montrer que $\mathbb{P}(S = 2) = p^2$, $\mathbb{P}(S = 3) = 2(1 - p)p^2$ et $\mathbb{P}(S = 4) = 3(1 - p)^2p^2$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(S = k)$, pour tout $k \geq 2$.
3. Vérifier que la somme des probabilités trouvées à la question précédente vaut 1.

Exercice 3 (5,5 pts.)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in [-1, 0], \\ a & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que f définisse bien une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire ayant pour densité f . Calculer $\mathbb{P}(-1/2 < X < 1/2)$.
3. On pose $Y = X^2$. Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
4. Montrer que la fonction de répartition de Y est donnée par

$$F_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si } y \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } y < 0, \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

5. Déterminer la densité de la variable aléatoire Y .
6. Calculer l'espérance de Y .